

• РАДИО И СВЯЗЬ •

СПРАВОЧНИК

НАДЕЖНОСТЬ
ТЕХНИЧЕСКИХ
СИСТЕМ



Предисловие редактора	3
---------------------------------	---

РАЗДЕЛ I. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Глава 1. Термины и понятия надежности	
---------------------------------------	--

Ю. Н. Руденко, И. А. Ушаков	7
1.1. Предварительные замечания	7
1.2. Общие понятия	7
1.3. Характеристики отказов	10
1.4. Резервирование	11
1.5. Показатели безотказности и ремонтпригодности	12
1.6. Показатели долговечности и сохраняемости	14
1.7. Терминология по надежности в области систем энергетики	15

Глава 2. Показатели надежности	
--------------------------------	--

И. А. Ушаков	17
2.1. Предварительные замечания	17
2.2. Невосстанавливаемые объекты	19
2.3. Восстанавливаемые объекты	20
2.4. Специальные показатели	25
2.5. Выбор показателей надежности системы	28
2.6. Задание требований по надежности	29

РАЗДЕЛ II. МЕТОДЫ РАСЧЕТА

Глава 3. Надежность элемента	
------------------------------	--

Р. Барлоу, Ф. Прошан, И. А. Ушаков	31
3.1. Невосстанавливаемый элемент	31
3.2. Восстанавливаемый элемент	36

Глава 4. Системы без восстановления	
-------------------------------------	--

Б. А. Козлов, И. А. Ушаков	41
4.1. Последовательное соединение элементов	41
4.2. Нагруженный резерв	43
4.3. Ненагруженный резерв	47
4.4. «Схема гибели» (экспоненциальное распределение работки до отказа)	48

Глава 5. Системы с восстановлением	
------------------------------------	--

Б. А. Козлов, И. А. Ушаков, А. Э. Шур- ра-Бура	50
5.1. Общая схема марковского процесса	50
5.2. «Схема гибели и размножения»	54
5.3. Восстанавливаемые резервированные системы различной кратности с неидеальными параметрами контроля и переключения	63
5.4. Приближенный метод расчета надежности систем с восстановлением	66

Глава 6. Дублирование с восстановлением	
---	--

Б. А. Козлов, К. А. Суанес, И. А. Ушаков	71
6.1. Предварительные замечания	71
6.2. Идентичные элементы	72
6.3. Зависимые элементы	72
6.4. Учет контроля и переключения	75
6.5. Ненагруженный резерв с профилактикой	83

Глава 7. Системы с монотонной структурой	
--	--

В. А. Богатырев, Е. И. Литвак, И. А. Мизин, И. А. Ушаков	96
7.1. Предварительные замечания	96
7.2. Определение монотонной структуры	96
7.3. Метод прямого перебора	97
7.4. Метод разложения относительно особого элемента	99
7.5. Аналитико-статистический метод	100
7.6. Метод минимальных путей и разрезов	104

Глава 8. Расчет эффективности функционирования систем	
<i>И. А. Ушаков</i>	111
8.1. Предварительные замечания	111
8.2. Системы кратковременного действия	112
8.3. Системы длительного действия	115
8.4. Некоторые частные случаи	116
8.5. Вопросы декомпозиции сложных систем	125
8.6. Методические указания по оценке эффективности	127
8.7. Живучесть сложных систем	128
Глава 9. Системы с резервом времени	
<i>Г. Н. Черкесов</i>	130
9.1. Терминология и классификация	130
9.2. Одноканальные системы с необесценивающими отказами	133
9.3. Одноканальные системы с обесценивающими отказами	149
9.4. Одноканальные системы со случайной загрузкой	153
9.5. Многоканальные системы	159
Глава 10. Системы массового обслуживания с ненадежным прибором	
<i>Г. П. Климов, В. Ф. Матвеев</i>	169
10.1. Предварительные замечания	169
10.2. Стандартная однолинейная система с ожиданием	172
10.3. Система с поступлением требований группами	174
10.4. Система с обратной связью	177
10.5. Система с «разогревом»	179
10.6. Система с поступлением требований группами, с «разогревом» и с обратной связью	181
РАЗДЕЛ III. СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ЭВМ	
Глава 11. Методология моделирования	
<i>В. В. Калашников</i>	184
11.1. Предварительные замечания	184
11.2. Описание модели и процедуры имитации	184
11.3. Программное обеспечение	189
11.4. Организация имитационного эксперимента	190
11.5. Моделирование редких событий	192
11.6. Некоторые методологические вопросы	193
Глава 12. Моделирование высоконадежных систем	
<i>И. Н. Коваленко, Н. Ю. Кузнецов</i>	194
12.1. Предварительные замечания	194
12.2. Сущность метода ускоренного моделирования	194
12.3. Метод «взвешенного» моделирования	196
12.4. Алгоритм моделирования непосредственно на модели системы	197
12.5. Метод «искусственных» моментов регенерации	199
12.6. Численный метод нахождения вероятности безотказной работы высоконадежных систем	200
РАЗДЕЛ IV. ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НАДЕЖНОСТИ	
Глава 13. Оптимальное резервирование	
<i>Ю. Е. Малащенко, И. А. Ушаков, А. Э. Шура-Бура</i>	205
13.1. Предварительные замечания	205
13.2. Формулировка задач оптимального резервирования	206
13.3. Решение для показателя надежности типа <i>R</i> при одном ограничении	208
13.4. Приближенный метод решения для показателя надежности типа <i>T</i> при одном ограничении	222
13.5. Решение для показателя надежности типа <i>R</i> при нескольких ограничениях	224
13.6. Многофункциональная система при одном ограничении	228
13.7. Получение оценок сверху в задачах большой размерности	229
13.8. Приближенный алгоритм оптимального введения избыточности в системы с произвольной структурой	231
Глава 14. Обеспечение технических объектов запасными элементами	
<i>А. Э. Шура-Бура</i>	233
14.1. Предварительные замечания	233
14.2. Задачи оптимального проектирования системы ЗИП	238
14.3. Стратегии пополнения запасов элементов	239
14.4. Расчет показателей достаточности системы ЗИП сложной структуры	239
14.5. Расчет показателей достаточности одиночного комплекта ЗИП	241
14.6. Расчет показателя достаточности ремонтного комплекта ЗИП	245
14.7. Расчет показателя достаточности группового комплекта ЗИП	247
14.8. Оптимальное проектирование комплектов ЗИП	250
14.9. Оптимальное проектирование систем ЗИП сложной структуры	252

Глава 15. Оптимальное управление запасами		19.6. Процедура проверки согласия опытного распределения с теоретическим	329
Г. Б. Рубальский, И. А. Ушаков	257	19.7. Интервальная оценка показателей надежности	331
15.1. Управление запасом резервных изделий	257	19.8. Способ обработки неполных экспериментальных данных	341
15.2. Приближенное решение для иерархической системы многоименклатурного запаса элементов	267		
Глава 16. Оптимальное обнаружение и поиск отказов		Глава 20. Контроль показателей надежности	
Г. С. Паиковский, И. А. Ушаков	271	Э. В. Дзиркал	344
16.1. Предварительные замечания	271	20.1. Предварительные замечания	344
16.2. Контроль работоспособности и диагностирование систем с одиночным отказом	272	20.2. Одноступенчатый контроль	346
16.3. Последовательный поиск отказов с восстановлением объекта контроля	279	20.3. Последовательный контроль	356
16.4. Обнаружение отказавшего элемента	284		
Глава 17. Модели технического обслуживания		Глава 21. Вычисление доверительных границ для показателей надежности систем по результатам испытаний элементов	
В. А. Каиштанов	285	Ю. К. Беляев, Э. В. Дзиркал, Р. С. Судаков, О. И. Тескин	368
17.1. Построение математической модели	285	21.1. Предварительные замечания	368
17.2. Стратегии технического обслуживания при полной информации	289	21.2. Показатели надежности систем	369
17.3. Учет структуры системы	293	21.3. Общие методы построения доверительных оценок	370
17.4. Профилактика при известной средней наработке	298	21.4. Нижняя доверительная оценка надежности системы в случае безотказных испытаний компонент	373
		21.5. Биномиальные испытания элементов системы	375
РАЗДЕЛ V. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ		21.6. Испытания системы со «старееющими» элементами	378
Глава 18. Общие вопросы экспериментальной оценки надежности. Первичный анализ статистических данных		21.7. Интервальное оценивание показателя надежности системы из элементов с нормальным распределением наработки	380
Ф. И. Фишбейн	299		
18.1. Основные определения	299	Глава 22. Вычисление доверительных границ для показателей надежности сложных систем, состоящих из элементов с экспоненциальным распределением наработки	
18.2. Организация испытаний и сбор информации	301	И. В. Павлов, О. И. Тескин	381
18.3. Качественный анализ отказов и предварительная обработка результатов испытаний	304	22.1. Доверительные границы для показателей надежности последовательной системы без восстановления (метод плоскости)	381
Глава 19. Оценка показателей надежности по экспериментальным данным		22.2. Доверительные границы для коэффициента готовности восстанавливаемого устройства	383
М. В. Топольский, Ф. И. Фишбейн	307	22.3. Метод Линдстрема — Маддена для последовательных систем	385
19.1. Предварительные замечания	307	22.4. Метод подстановки	386
19.2. Типы оцениваемых показателей надежности	307	22.5. Метод фидуциальных вероятностей	390
19.3. Характер априорных сведений при определении показателей надежности по экспериментальным данным	308	22.6. Вычисление нижней доверительной границы для вероятности безотказной работы системы без восстановления методом фидуциальных вероятностей	391
19.4. Характер статистической информации при различных стратегиях испытаний	309		
19.5. Методы определения точечных оценок	314		

22.7. Вычисление вероятностей границ для показателей надежности систем с восстанавливаемыми элементами методом фидуциальных вероятностей	394	25.4. Граничные оценки для показателей надежности	436
Глава 23. Статистический контроль показателей надежности сложных систем по двум уровням		Глава 26. Надежность механических систем	
Э. В. Дзиркал, И. В. Павлов	398	В. В. Болотин, В. П. Чирков	438
23.1. Предварительные замечания	398	26.1. Основные понятия	438
23.2. Система с резервированием без восстановления	399	26.2. Модели отказов механических систем	442
23.3. Выигрыш от учета информации по элементам системы	401	26.3. Применение теории выбросов случайных процессов	446
23.4. Последовательно-параллельная система без восстановления	401	Глава 27. Методы расчета надежности систем с восстановлением	
23.5. Контроль коэффициента готовности системы с резервными восстанавливаемыми элементами	405	А. Д. Соловьев	457
23.6. Выигрыш от учета информации по элементам системы	408	27.1. Общая постановка задачи	457
23.7. Контроль коэффициента готовности системы при экспоненциальных распределениях наработки и времени восстановления элементов	409	27.2. Марковские модели восстанавливаемых систем	459
23.8. Контроль коэффициента готовности при экспоненциальных распределениях наработки и времени восстановления на основе F -распределения	410	27.3. Предельные теоремы и неравенства для регенерирующих процессов	462
23.9. Ориентировочный расчет плана контроля	411	27.4. Общая модель резервирования с восстановлением	465
23.10. Контроль показателя надежности по доверительным границам	414	27.5. Общая модель сложной восстанавливаемой системы	468
Глава 24. Форсированные испытания		Глава 28. Специальные системы исследования систем с восстановлением	
Г. Д. Карташов	418	В. С. Королюк, И. А. Ушаков, П. Франкен, И. Б. Шубинский, А. Штреллер	470
24.1. Основные понятия	418	28.1. Стационарные характеристики для полумарковского процесса	470
24.2. Форсированные испытания, проводимые на одной выборке	419	28.2. Способ введения фиктивных состояний	472
24.3. Методы «доламывания» и ступенчатых нагружений	423	28.3. Процессы марковского восстановления и алгоритмы фазового укрупнения	474
24.4. Пример исследования интегральных микросхем	429	28.4. Использование точечных процессов для расчета стационарных характеристик	482
РАЗДЕЛ VI. СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА		28.5. Топологический метод расчета надежности сложных систем	490
Глава 25. Распределения с монотонной функцией интенсивности		Глава 29. Надежность структурно-сложных ретрансляционных сетей	
Р. Барлоу, Ф. Прошан, И. А. Ушаков	431	В. А. Гадасин, И. А. Ушаков	496
25.1. Предварительные замечания	431	29.1. Предварительные замечания	496
25.2. Определения различных классов «стареющих» и «молодеющих» распределений	431	29.2. Надежность сетей с рекуррентной структурой	497
25.3. Сохранение монотонности функции интенсивности при различных преобразованиях	434	29.3. Оценка показателей надежности сетей с произвольной структурой	505
		Глава 30. Системы из элементов с многими состояниями	
		К. Райнике	517
		30.1. Предварительные замечания	517
		30.2. Построение математической модели	517
		30.3. Виды представления монотонных систем	518

30.4. Представление функции $S(x)$ на основе минимальных реализаций вектора состояния	519	35.1. Постановка задачи	550
30.5. Представление функции $S(x)$ на основе максимальных реализаций вектора состояния	521	35.2. Нормирование надежности	552
Глава 31. Использование диффузионных процессов		35.3. Расчеты надежности	552
<i>В. В. Ивлев, И. А. Ушаков</i>	521	Глава 36. Вибрационные нагрузки на радиоэлектронную аппаратуру	558
31.1. Предварительные замечания	521	<i>Ю. К. Коненков, М. Д. Давтян</i>	558
31.2. «Схема гибели и размножения». Коэффициент готовности	522	36.1. Предварительные замечания	558
31.3. Моменты распределений	526	36.2. Линейный осциллятор	561
31.4. Вероятность безотказной работы	527	36.3. Механические модели на основе линейных уравнений теории упругости	564
31.5. Немарковские модели надежности	528	36.4. Нелинейные колебательные модели электрорадиоэлементов	569
РАЗДЕЛ VII. ПРИМЕРЫ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ НАДЕЖНОСТИ		36.5. Методы расчета надежности радиоэлектронной аппаратуры, подверженной вибрациям	571
Глава 32. Надежность электроэнергетических систем		РАЗДЕЛ VIII. ПРИЛОЖЕНИЯ	
<i>Ю. Н. Руденко, И. А. Ушаков</i>	531	Приложение 1. Основные понятия и краткие сведения из теории вероятностей и математической статистики	578
32.1. Особенности электроэнергетических систем	531	<i>И. А. Ушаков</i>	578
32.2. Определение показателей надежности электроснабжения потребителей	532	П1.1. Случайные события и их характеристики (термины и определения)	578
32.3. Использование резервов мощности в ЭЭС	536	П1.2. Основные теоремы	579
Глава 33. Надежность магистральных газо- и нефтепроводов		П1.3. Случайные величины и функции распределения	581
<i>Е. Р. Ставровский, М. Г. Сухарев</i>	537	П1.4. Числовые характеристики случайных величин	581
33.1. Задачи расчета надежности	537	П1.5. Сводка характеристик функций распределения	583
33.2. Модели надежности звеньев трубопровода	538	П1.6. Предельные теоремы теории вероятностей	583
33.3. Расчет показателей надежности трубопровода	540	П1.7. Краткие сведения о случайных потоках	586
33.4. Временное резервирование в системах газо- и нефтеснабжения	543	П1.8. Основные определения из математической статистики	588
Глава 34. Надежность информационных систем		Приложение 2. Формулы. Числовые таблицы	591
<i>В. А. Богатырев, И. А. Мизин</i>	546	<i>И. А. Ушаков</i>	591
34.1. Предварительные замечания	546	П2.1. Константы	591
34.2. Основные показатели эффективности интегральных микросхем	547	П2.2. Элементарные формулы комбинаторики	591
34.3. Основные характеристики тракта передачи данных	549	П2.3. Конечные суммы	592
Глава 35. Надежность гидромеханических сооружений		П2.4. Ряды	592
<i>Э. Г. Газиев, И. А. Ушаков</i>	550	П2.5. Интегралы	592
		П2.6. Преобразование Лапласа	592
		П2.7. Стандартные числовые таблицы	593
		Список литературы	598

Рецензенты: докт. техн. наук проф. А. И. Перроте, докт. техн. наук проф. Ф. И. Кузьмин, канд. техн. наук А. Н. Явриян, канд. техн. наук Э. Т. Давыдов, канд. техн. наук И. В. Наливкин, канд. техн. наук А. И. Андреев

Редакция литературы по кибернетике и вычислительной технике

Надежность технических систем: Справочник /
Н 17 Ю. К. Беляев, В. А. Богатырев, В. В. Болотин и др.;
Под ред. И. А. Ушакова. — М.: Радио и связь, 1985. —
608 с., ил.

В пер.: 2 р. 70 к. 15 000 экз.

Рассматриваются вопросы расчета надежности на различных этапах разработки и эксплуатации технических систем, решения задач оптимального проектирования структур и моделирования процессов функционирования систем с учетом ресурсных и экономических ограничений.

В написании книги принимали участие также специалисты по надежности из ГДР, Республики Куба и США.

Для инженерно-технических работников.

Н 2401000000-117
046(01)-85 КБ-49-40-84

ББК 30.14

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Глава 1

ТЕРМИНЫ И ПОНЯТИЯ НАДЕЖНОСТИ

1.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В главе приводятся основные термины и понятия, используемые в данном справочнике. В основу перечня положен Государственный стандарт Союза ССР 27.002—83 «Надежность в технике. Термины и определения», формулирующий применяемые в науке и технике термины и определения в области надежности. Однако не все термины, используемые в данном справочнике, охватываются указанным ГОСТом, что привело к необходимости введения дополнительных терминов. Все термины расположены в тематическом порядке.

Основные термины и понятия теории вероятностей и математической статистики, используемые в справочнике, приведены в приложениях 1 и 2.

1.2. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Объект — техническое изделие определенного целевого назначения, рассматриваемое в периоды проектирования, производства, испытаний и эксплуатации.

Объектами могут быть различные системы и их элементы, в частности: сооружения, установки, технические изделия, устройства, машины, аппараты, приборы и их части, агрегаты и отдельные детали.

Надежность — свойство объекта сохранять способность выполнять заданные функции.

Надежность — сложное свойство, включающее, в свою очередь, в зависимости от назначения объекта и условий его эксплуатации такие свойства, как безотказность, долговечность, ремонтпригодность и сохраняемость или сочетание этих свойств объекта. Для конкретных объектов и условий их эксплуатации эти свойства могут иметь различную относительную значимость.

Система — объект, представляющий собой совокупность элементов, взаимодействующих в процессе выполнения определенного круга задач и взаимосвязанных функционально.

Элемент системы — объект, представляющий собой простейшую часть системы, отдельные части которого не представляют самостоятельного интереса в рамках конкретного рассмотрения.

Понятия «система» и «элемент» выражены друг через друга, поскольку одно из них следовало бы принять в качестве исходного, постулировать. Понятия эти относительны: объект, считавшийся системой в одном исследовании, может рассматриваться как элемент, если изучается объект большего масштаба. Кроме того, само деление системы на элементы зависит от характера рассмотрения (функциональные, конструктивные, схемные или оперативные элементы), от требуемой точности проводимого исследования, от уровня наших представлений, от объекта в целом и, наконец, даже от технических и научных наклонностей исследователя.

Безотказность — свойство объекта непрерывно сохранять работоспособность в течение некоторой наработки или в течение некоторого времени.

Долговечность — свойство объекта сохранять работоспособность до наступления предельного состояния с необходимыми перерывами для технического обслуживания и ремонта.

Ремонтопригодность — свойство объекта, заключающееся в его приспособленности к предупреждению и обнаружению отказов и повреждений, к восстановлению работоспособности и исправности в процессе технического обслуживания и ремонта.

Сохраняемость — свойство объекта непрерывно сохранять исправное и работоспособное состояние в течение (и после) хранения и (или) транспортирования.

Исправность — состояние объекта, при котором он соответствует всем требованиям, установленным нормативно-технической документацией.

Неисправность — состояние объекта, при котором он не соответствует хотя бы одному из требований, установленных нормативно-технической документацией.

Работоспособность — состояние объекта, при котором он способен выполнять заданные функции, сохраняя значения основных параметров в пределах, установленных нормативно-технической документацией.

Основные параметры характеризуют функционирование объекта при выполнении поставленных задач и устанавливаются в нормативно-технической документации.

Неработоспособность — состояние объекта, при котором значение хотя бы одного заданного параметра, характеризующего способность выполнять заданные функции, не соответствует требованиям, установленным нормативно-технической документацией.

Понятие «исправность» шире, чем понятие «работоспособность». Работоспособный объект в отличие от исправного удовлетворяет лишь тем требованиям нормативно-технической документации, которые обеспечивают его нормальное функционирование при выполнении поставленных задач.

Работоспособность и неработоспособность в общем случае могут быть полными или частичными. Полностью работоспособный объект обеспечивает в определенных условиях максимальную эффективность его применения. Эффективность применения в тех же условиях частично работоспособного объекта меньше максимально возможной, но значения ее показателей при этом еще находятся в пределах, установленных для такого функционирования, которое считается нормальным. Частично неработоспособный объект может функционировать, но уровень эффективности при этом ниже допустимого. Полностью неработоспособный объект применять по назначению невозможно.

Понятия частичной работоспособности и частичной неработоспособности применяются главным образом к «сложным» («большим») системам, для которых характерна возможность нахождения в нескольких состояниях. Эти состояния различаются уровнями эффективности функционирования системы. Работоспособность и неработоспособность некоторых объектов могут быть только полными, т. е. они могут иметь только два состояния.

Работоспособный объект в отличие от исправного обязан удовлетворять лишь тем требованиям нормативной документации, выполнение которых обеспечивает нормальное применение объекта по назначению. При этом он может не удовлетворять, например, эстетическим требованиям, если ухудшение внешнего вида объекта не препятствует его нормальному (эффективному) функционированию.

Очевидно, что работоспособный объект может быть неисправным, однако отклонения от требований нормативной документации при этом не настолько существенны, чтобы нарушалось нормальное функционирование.

Предельное состояние — состояние объекта, при котором его дальнейшее применение по назначению должно быть прекращено из-за неустранимого нарушения требований безопасности или неустранимого отклонения заданных параметров

за установленные пределы, недопустимого увеличения эксплуатационных расходов или необходимости проведения капитального ремонта.

Признаки (критерии) предельного состояния устанавливаются нормативно-технической документацией на данный объект. Невосстанавливаемый объект достигает предельного состояния при возникновении отказа или при достижении заранее установленного предельно допустимого значения срока службы или суммарной наработки. Предельно допустимые значения срока службы и наработки устанавливаются из соображений безопасности эксплуатации в связи с необратимым снижением эффективности использования ниже допустимой или в связи с увеличением интенсивности отказов, закономерным для объектов данного типа после установленного периода эксплуатации.

Для восстанавливаемых объектов переход в предельное состояние определяется наступлением момента, когда дальнейшая эксплуатация невозможна или нецелесообразна вследствие следующих причин:

становится невозможным поддержание его безопасности, безотказности или эффективности на минимально допустимом уровне;

в результате изнашивания и (или) старения объект пришел в такое состояние, при котором ремонт требует недопустимо больших затрат или не обеспечивает необходимой степени восстановления исправности или ресурса.

Для некоторых восстанавливаемых объектов предельным состоянием считается такое, когда необходимое восстановление исправности может быть осуществлено только с помощью капитального ремонта.

Повреждение — событие, заключающееся в нарушении исправности объекта при сохранении его работоспособности.

Отказ — событие, заключающееся в нарушении работоспособности объекта.

Критерий отказа — отличительный признак или совокупность признаков, согласно которым устанавливается факт возникновения отказа.

Признаки (критерии) отказов устанавливаются нормативно-технической документацией на данный объект.

Восстановление — процесс обнаружения и устранения отказа (повреждения) с целью восстановления его работоспособности (исправности).

Восстанавливаемый объект — объект, работоспособность которого в случае возникновения отказа подлежит восстановлению в рассматриваемых условиях.

Невосстанавливаемый объект — объект, работоспособность которого в случае возникновения отказа не подлежит восстановлению в рассматриваемых условиях.

При анализе надежности, особенно при выборе показателей надежности объекта, существенное значение имеет решение, которое должно быть принято в случае отказа объекта. Если в рассматриваемой ситуации восстановление работоспособности данного объекта при его отказе по каким-либо причинам признается нецелесообразным или неосуществимым (например, из-за невозможности прерывания выполняемой функции), то такой объект в данной ситуации является невосстанавливаемым. Таким образом, один и тот же объект в зависимости от особенностей или этапов эксплуатации может считаться восстанавливаемым или невосстанавливаемым.

Например, аппаратура метеоспутника на этапе хранения относится к восстанавливаемой, а во время полета в космосе — невосстанавливаемой. Более того, даже один и тот же объект можно отнести к тому или иному типу в зависимости от назначения: ЭВМ, используемая для неоперативных вычислений, является объектом восстанавливаемым, так как в случае отказа любая операция может быть повторена, а та же ЭВМ, управляющая сложным технологическим процессом в металлургии или химии, является невосстанавливаемым объектом, так как отказ или сбой приводит к непоправимым последствиям.

Показатель надежности — техническая характеристика, количественным образом определяющая одно или несколько свойств, составляющих надежность объекта.

Показатель надежности количественно характеризует, в какой степени данному объекту или данной группе объектов присущи определенные свойства, обуславливающие надежность. Показатель надежности может иметь размерность (например, среднее время восстановления) или не иметь ее (например, вероятность безотказной работы).

Наработка — продолжительность или объем работы объекта.

Объект может работать непрерывно или с перерывами. Во втором случае учитывается суммарная наработка. Нарработка может измеряться в единицах времени, циклах, единицах выработки (гектарах, кубометрах) и других единицах. В процессе эксплуатации или испытаний различают суточную наработку, месячную наработку, наработку до первого отказа, наработку между отказами, заданную наработку и т. д.

Если объект эксплуатируется в различных режимах нагрузки, то, например, наработка в облегченном режиме может быть выделена и учитываться отдельно от наработки при номинальной нагрузке.

Технический ресурс — наработка объекта от начала его эксплуатации до достижения предельного состояния или капитального (среднего) ремонта или от начала эксплуатации после ремонта (среднего или капитального) до следующего ремонта или достижения предельного состояния. (Обычно указывается, какой именно технический ресурс имеется в виду: до среднего, капитального, от капитального до ближайшего среднего ремонта и т. п. Если конкретного указания не содержится, то имеется в виду ресурс от начала эксплуатации до достижения предельного состояния после всех (средних и капитальных) ремонтов, т. е. до списания по техническому состоянию.)

Срок службы — календарная продолжительность эксплуатации объекта от ее начала или возобновления после капитального или среднего ремонта до наступления предельного состояния.

Под эксплуатацией объекта понимается стадия его существования в распоряжении потребителя при условии применения объекта по назначению, что может чередоваться с хранением, транспортированием, техническим обслуживанием и ремонтом, если это осуществляется потребителем.

Срок сохраняемости — календарная продолжительность хранения и (или) транспортирования объекта в заданных условиях, в течение и после которой сохраняются значения установленных показателей (в том числе показателей надежности) в заданных пределах.

Различают сохранность до применения (в упаковке изготовителя) и в процессе применения.

1.3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ОТКАЗОВ

Внезапный отказ — отказ, характеризующийся скачкообразным изменением значений одного или нескольких основных параметров объекта.

Внезапный отказ обычно является следствием постепенного накопления неисправностей и повреждений.

Постепенный отказ — отказ, характеризующийся постепенным изменением значений одного или нескольких основных параметров объекта.

Независимый отказ элемента — отказ элемента объекта, не обусловленный повреждениями и отказами других элементов объекта.

Зависимый отказ элемента — отказ элемента объекта, обусловленный повреждениями или отказами других элементов объекта.

Полный отказ — отказ, после возникновения которого использование объекта по назначению возможно, но при этом значения одного или нескольких основ.

Классификация отказов

Признак классификации	Вид отказа
Характер изменения основного параметра объекта до момента возникновения отказа	Внезапный
Возможность последующего использования объекта после возникновения его отказа	Постепенный
Связь между отказами	Полный
	Частичный
	Независимый
	Зависимый
Устойчивость неработоспособности	Устойчивый
	Самоустраняющийся
Наличие внешних проявлений отказа	Очевидный (явный)
Причина возникновения отказа:	
при конструировании (ошибка конструктора, несовершенство принятых методов конструирования)	Конструкционный
при изготовлении (ошибка при изготовлении — нарушение принятой технологии, несовершенство технологий)	Производственный
при эксплуатации (нарушение правил эксплуатации, внешние воздействия, не свойственные нормальной эксплуатации)	Эксплуатационный
Природа происхождения	Естественный
	Искусственный
	(вызываемый намеренно)

ных параметров находятся вне допустимых пределов, т. е. работоспособность объекта понижена.

Перебегающий отказ — многократно возникающий и самоустраняющийся отказ одного и того же характера.

Конструкционный отказ — отказ, возникающий вследствие ошибок конструктора (или несовершенства существующих у разработчика методов конструирования).

Производственный отказ — отказ, возникающий вследствие нарушения или несовершенства технологического процесса изготовления объекта или комплектующего изделия.

Эксплуатационный отказ — отказ, возникающий вследствие нарушения установленных правил эксплуатации или вследствие влияния непредусмотренных внешних воздействий.

Классификация отказов приведена в табл. 1.1.

1.4. РЕЗЕРВИРОВАНИЕ

Резервирование — метод повышения надежности объекта введением дополнительных элементов и функциональных возможностей сверх минимально необходимых для нормального выполнения объектом заданных функций.

Структурное резервирование — метод повышения надежности объекта, предусматривающий использование избыточных элементов, входящих в физическую структуру объекта.

Временное резервирование — метод повышения надежности объекта, предусматривающий использование избыточного времени, выделенного для выполнения задач.

Информационное резервирование — метод повышения надежности объекта, предусматривающий использование избыточной информации сверх минимально необходимой для выполнения задач.

Функциональное резервирование — метод повышения надежности объекта, предусматривающий использование способности элементов выполнять дополнительные функции вместо основных или наряду с ними.

Нагрузочное резервирование — метод повышения надежности объекта, предусматривающий использование способности его элементов воспринимать дополнительные нагрузки сверх номинальных.

Основной элемент — элемент основной физической структуры объекта, минимально необходимой для нормального выполнения объектом его задач.

Резервный элемент — элемент, предназначенный для обеспечения работоспособности объекта в случае отказа основного элемента.

Общее резервирование — резервирование, при котором резервируется объект в целом.

Раздельное резервирование — резервирование, при котором резервируются отдельные элементы объекта или их группы.

Скользящее резервирование — резервирование замещением, при котором группа основных элементов объекта резервируется одним или несколькими резервными элементами, каждый из которых может заменить любой отказавший основной элемент в данной группе.

Нагруженный резерв — резервный элемент, находящийся в том же режиме, что и основной.

Облегченный резерв — резервный элемент, находящийся в менее нагруженном режиме, чем основной.

Ненагруженный резерв — резервный элемент, практически не несущий нагрузок.

Восстанавливаемый резерв — резервный элемент, работоспособность которого в случае отказа подлежит восстановлению в процессе функционирования объекта.

Невосстанавливаемый резерв — резервный элемент, работоспособность которого в случае отказа не подлежит восстановлению в рассматриваемых условиях функционирования объекта.

Кратность резервирования — отношение числа резервных элементов к числу резервируемых элементов объекта.

Дублирование — резервирование, при котором одному основному элементу придается один резервный.

1.5. ПОКАЗАТЕЛИ БЕЗОТКАЗНОСТИ И РЕМОНТОПРИГОДНОСТИ

Наработка до отказа — вероятность того, что в пределах заданной наработки отказ объекта не возникнет (при условии работоспособности в начальный момент времени).

Для режимов хранения и транспортирования может применяться аналогично определяемый термин «вероятность невозникновения отказа».

Средняя наработка до отказа — математическое ожидание случайной наработки объекта до первого отказа.

Средняя наработка между отказами — математическое ожидание случайной наработки объекта между отказами.

Обычно этот показатель относится к установившемуся процессу эксплуатации. В принципе средняя наработка между отказами объектов, состоящих из стареющих во времени элементов, зависит от номера предыдущего отказа. Однако с ростом номера отказа (т. е. с увеличением длительности эксплуатации) эта величина стремится к некоторой постоянной, или, как говорят, к своему стационарному значению.

Средняя наработка на отказ — отношение наработки восстанавливаемого объекта за некоторый период времени к математическому ожиданию числа отказов в течение этой наработки.

Этим термином можно назвать краткую среднюю наработку до отказа и среднюю наработку между отказами, когда оба показателя совпадают. Для совпадения последних необходимо, чтобы после каждого отказа объект восстанавливался до первоначального состояния.

Заданная наработка — наработка, в течение которой объект должен безотказно работать для выполнения своих функций.

Среднее время простоя — математическое ожидание случайного времени вынужденного нерегламентированного пребывания объекта в состоянии неработоспособности.

Среднее время восстановления — математическое ожидание случайной продолжительности восстановления работоспособности (собственно ремонта).

Вероятность восстановления — вероятность того, что фактическая продолжительность восстановления работоспособности объекта не превысит заданной.

Показатель технической эффективности функционирования — мера качества собственно функционирования объекта или целесообразности использования объекта для выполнения заданных функций.

Показатель технической эффективности функционирования объекта определяется количественно как математическое ожидание выходного эффекта объекта, т. е. в зависимости от назначения системы принимает конкретное выражение. Часто показатель эффективности функционирования определяется как полная вероятность выполнения объектом задачи с учетом возможного снижения качества его работы из-за возникновения частичных отказов.

Коэффициент сохранения эффективности — показатель, характеризующий влияние степени надежности элементов объекта на техническую эффективность, представляемый в виде отношения показателя технической эффективности функционирования при реальной надежности к максимальному возможному значению этого показателя (т. е. соответствующему состоянию полной работоспособности всех элементов объекта).

П р и м е ч а н и е. При введении коэффициента сохранения эффективности предполагается, что выходной эффект системы является физической неотрицательной величиной, которая возрастает при увеличении надежности любого из элементов объекта (это может быть, например, объем произведенной продукции, быстродействие и т. п.).

Нестационарный коэффициент готовности — вероятность того, что объект окажется работоспособным в заданный момент времени, отсчитываемый от начала работы (или от другого строго определенного момента времени), для которого известно начальное состояние этого объекта.

Средний коэффициент готовности — усредненное на заданном интервале времени значение нестационарного коэффициента готовности.

Стационарный коэффициент готовности (для краткости просто коэффициент готовности) — вероятность того, что восстанавливаемый объект окажется работоспособным в произвольно выбранный момент времени в установившемся процессе эксплуатации. (Коэффициент готовности может быть определен и как отношение времени, в течение которого объект находится в работоспособном состоянии, к общей длительности рассматриваемого периода. Предполагается, что рассматривается установившийся процесс эксплуатации, математической моделью которого является стационарный случайный процесс.)

Коэффициент готовности является предельным значением, к которому стремятся и нестационарный, и средний коэффициенты готовности с ростом рассматриваемого интервала времени.

Часто используются показатели, характеризующие простоту объекта, — так называемые коэффициенты простоты соответствующего типа. Каждому коэффициенту готовности можно поставить в соответствие определенный коэффициент простоты, численно равный дополнению соответствующего коэффициента готовности до единицы. В соответствующих определениях работоспособность следует заменить на неработоспособность.

Нестационарный коэффициент оперативной готовности — вероятность того, что объект, находясь в режиме ожидания, окажется работоспособным в заданный момент времени, отсчитываемый от начала работы (или от другого строго определенного момента времени), и начиная с этого момента времени будет работать безотказно в течение заданного интервала времени.

Средний коэффициент оперативной готовности — усредненное на заданном интервале значение нестационарного коэффициента оперативной готовности.

Стационарный коэффициент оперативной готовности (для краткости просто коэффициент оперативной готовности) — вероятность того, что восстанавливаемый объект окажется работоспособным в произвольный момент времени и с этого момента времени будет работать безотказно в течение заданного интервала времени.

Предполагается, что рассматривается установившийся процесс эксплуатации, которому соответствует в качестве математической модели стационарный случайный процесс.

Коэффициент технического использования — отношение средней наработки объекта в единицах времени за некоторый период эксплуатации к сумме средних значений наработки, времени простоя, обусловленного техническим обслуживанием, и времени ремонтов за тот же период эксплуатации.

Интенсивность отказов — условная плотность вероятности отказа невосстанавливаемого объекта, определяемая для рассматриваемого момента времени при условии, что до этого момента отказ не возник.

Параметр потока отказов — плотность вероятности возникновения отказа восстанавливаемого объекта, определяемая для рассматриваемого момента времени. (Параметр потока отказа может быть определен как отношение числа отказов объекта за определенный интервал времени к длительности этого интервала при ординарном потоке отказов.)

Интенсивность восстановления — условная плотность вероятности восстановления работоспособности объекта, определенная для рассматриваемого момента времени, при условии, что до этого момента восстановление не было завершено.

1.6. ПОКАЗАТЕЛИ ДОЛГОВЕЧНОСТИ И СОХРАНЯЕМОСТИ

Гамма-процентный ресурс — наработка, в течение которой объект не достигает предельного состояния с заданной вероятностью $1 - \gamma$.

Средний ресурс — математическое ожидание ресурса.

Назначенный ресурс — суммарная наработка объекта, при достижении которой эксплуатация должна быть прекращена независимо от его состояния.

Средний ремонтный ресурс — средний ресурс между смежными капитальными ремонтами объекта.

Средний ресурс до списания — средний ресурс объекта от начала эксплуатации до его списания.

Средний ресурс до капитального ремонта — средний ресурс от начала эксплуатации объекта до его первого капитального ремонта.

Гамма-процентный срок службы — срок службы, в течение которого объект не достигает предельного состояния с вероятностью $1 - \gamma$.

Средний срок службы — математическое ожидание срока службы.

Средний межремонтный срок службы — средний срок службы между смежными капитальными ремонтами объекта.

Средний срок службы до капитального ремонта — средний срок службы от начала эксплуатации объекта до его первого капитального ремонта.

Средний срок службы до списания — средний срок службы от начала эксплуатации объекта до его списания.

Гамма-процентный срок сохраняемости — продолжительность хранения, в течение которой у объекта сохраняются установленные показатели с заданной вероятностью $1 - \gamma$.

Средний срок сохраняемости — математическое ожидание срока сохраняемости.

1.7. ТЕРМИНОЛОГИЯ ПО НАДЕЖНОСТИ В ОБЛАСТИ СИСТЕМ ЭНЕРГЕТИКИ

1.7.1. Предварительные замечания. Специфика больших систем энергетики привела к необходимости пересмотра ряда существующих понятий, а также к дополнению их некоторыми специфическими отраслевыми понятиями и терминами (например, «устойчивоспособность», «режимная управляемость», «безопасность» и т. п.)¹. Цель данного раздела — показать, как отраслевая специфика может и должна отражаться при исследованиях в области надежности. Здесь была сделана попытка отразить следующие особенности больших систем энергетики:

массовый и ответственный характер снабжения продукцией в условиях сплошной электрификации с учетом непрерывности и неразрывного единства процесса производства, передачи и потребления основных видов энергетики;

многоцелевое использование продукции и наличие категорий потребителей с разными требованиями к качеству продукции, к характеристикам непрерывности (бесперебойности) снабжения;

сугубо системный характер не только структуры, но и самого единого технологического процесса выполнения основных функций и, следовательно, определяющую роль и непосредственную тесную связь проявлений свойств надежности с качеством продукции, экономической эффективностью, маневренностью, экологической безвредностью и с другими сопряженными свойствами систем энергетики;

практическое отсутствие или пренебрежимо малую вероятность событий полного отказа системы в целом, а также полного непланового и планового ремонтов системы, что обусловлено наличием большого количества источников и потребителей энергии, наличием большого числа различных видов режимной избыточности систем энергетики;

значительное взаимное влияние управляемой (защищаемой), управляющей (защитающей) и обслуживающей составляющих систем не только по функциям, но и по состояниям;

регионально-отраслевое распределение большого числа непрерывно связанных разнородных элементов и процессов, в частности источников снабжения и потребителей;

значительную взаимную заменяемость как основных частей и видов продукции различных систем энергетики, так и средств обеспечения снабжения потребителей на всех иерархических уровнях.

1.7.2. Дополнительные термины (для систем энергетики).

Система энергетики — человеко-машинная система, предназначенная для добычи (производства, получения), переработки (преобразования), передачи, хранения и распределения соответствующей продукции и снабжения потребителей этой продукцией.

Примечания. 1. Системы энергетики в зависимости от их иерархического уровня и производимой продукции рассматриваются как: общенергетическая система, охватывающая основные элементы и связи топливно-энергетического комплекса страны; электроэнергетическая система (при одновременном производстве, преобразовании, передаче, хранении, распределении электрической и тепловой энергии); электрическая система (при производстве, преобразовании, передаче и распределении только электрической энергии); теплоснабжающая система (при производстве, преобразовании, передаче, хранении и распределении только тепловой энергии); газоснабжающая система (при добыче и получении, переработке, передаче, хранении и распределении газа и газового конденсата); нефтеснабжающая система (при добы-

¹ Сборник рекомендуемых терминов. Вып. 95. Надежность систем энергетики. Терминология. — М.: Наука. 1980.

и получении, переработке, передаче, хранении и распределении нефти и нефтепродуктов); водоснабжающая система (при добыче, переработке, хранении и распределении воды).

2. Под продукцией системы энергетики понимается вид энергии, энергоноситель, а также вода, сжатый воздух и др.

3. Любая система энергетики или ее элемент являются объектом энергетики (объектом).

Надежность — свойство объекта сохранять способность выполнять заданные функции в заданном объеме при определенных условиях функционирования.

Примечание. Применительно к системам энергетики в числе заданных функций рассматривается бесперебойное снабжение потребителей соответствующей продукцией требуемого качества и недопущение ситуаций, опасных для людей и окружающей среды.

Устойчивоспособность — свойство объекта непрерывно сохранять устойчивость в течение некоторого времени.

Примечание. Понятие «устойчивоспособность» как более сложное, чем «устойчивость», не может быть заменено последним. Понятие «устойчивость» для электрических систем определяет способность системы возвращаться к установившемуся или близкому к нему режиму после различного рода возмущений в течение допустимого интервала времени. Понятие же «устойчивоспособность» определяет свойство сохранять эту способность системы во времени.

Режимная управляемость (управляемость) — свойство объекта поддерживать нормальный режим посредством управления.

Примечание. Режимная управляемость как свойство, имеющее отношение к надежности, определяет возможность управления объектом с целью сохранения или восстановления нормального режима его работы. Режимная управляемость обеспечивается в основном выполнением специальных требований к конфигурации системы, к ее оперативной гибкости и средствам ввода управляющих воздействий, а также эффективностью функционирования средств управления.

Живучесть — свойство объекта противостоять локальным возмущениям и откатам, не допуская их каскадного (системного) развития с массовым нарушением питания потребителей.

Безопасность — свойство объекта не допускать ситуаций, опасных для людей и окружающей среды.

Рабочее состояние — состояние объекта, при котором он выполняет все или часть заданных функций в полном или частичном объеме (в отличие от работоспособного состояния, при котором объект, способен выполнять все или часть заданных функций).

Частично рабочее состояние — рабочее состояние объекта, при котором он выполняет хотя бы часть заданных функций.

Примечание. Для систем энергетики целесообразно разделить состояний на работоспособное и рабочее. Второе вводится в связи с тем, что иногда частичное снижение производительности системы не приводит к отказу, если оно совпадает по времени со снижением спроса на продукцию у потребителя. Иными словами, работоспособное состояние характеризует принципиальную возможность выполнения системой требуемых функций, а рабочее состояние характеризует реальное выполнение системой функции с учетом уровня текущего уровня потребления.

Например, в полностью рабочем состоянии может находиться также частично работоспособный объект, если он функционирует в условиях, характеризующихся пониженными требованиями к его работоспособности по сравнению с теми, на которые он рассчитан, в результате чего обеспечивается выполнение всех требующихся функций в требуемом объеме. Полностью или частично работоспособный объект может находиться в нерабочем состоянии, например в состоянии ненагруженного резерва или в состоянии предупредительного ремонта (при условии, что в процессе ремонта работоспособность его не нарушается или нарушается только частично). Очевидно, что неработоспособный объект не может находиться в рабочем состоянии.

Авария — событие, заключающееся в переходе объекта с одного уровня работоспособности или относительного уровня функционирования на другой, существенно более низкий, с крупным нарушением режима работы объекта. Авария может привести к частичному или полному разрушению объекта, массовому разрушению питания потребителей, созданию опасных условий для человека и окружающей среды. Признаки аварии указываются в нормативно-технической документации.

Резерв мощности, резерв производительности — разность между располагаемой мощностью (производительностью) объекта и его нагрузкой в данный момент времени при допустимых значениях параметров режима его работы и показателях качества производимой продукции. В условиях оперативного управления или при краткосрочном планировании резерв мощности обеспечивает покрытие небаланса между производством и потреблением, который возникает либо в результате вывода оборудования в ремонт, либо в результате его отказа, либо при случайных и непредвиденных увеличениях потребления.

Ремонтный резерв — часть резерва мощности (производительности) объекта, предназначенная для компенсации потери его мощности (производительности), вызванной предупредительным ремонтом.

Оперативный резерв — часть резерва мощности (производительности) объекта, предназначенная для компенсации небаланса между производством и потреблением продукции, вызванного отказами элементов объекта, случайным и непредвиденным увеличением потребления продукции.

Аварийный резерв — часть оперативного резерва объекта, предназначенная для компенсации потери его мощности (производительности), вызванной отказами элементов объекта.

Резерв продукции (запас продукции) — количество накопленной продукции сверх необходимой для компенсации дефицита мощности в течение определенного интервала времени.

Технологический резерв — резерв мощности и (или) резерв продукции потребителя, который может быть использован для предотвращения остановки технологического процесса потребителя при нарушении его снабжения.

Глава 2

ПОКАЗАТЕЛИ НАДЕЖНОСТИ

2.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В дальнейшем изложении под словом «объект» будет пониматься не просто некоторое техническое изделие, а определенные технические (средства «материальные носители»), предназначенные для выполнения заданных функций. Именно эта особенность выполняемых функций и рассматриваемых режимов работы определяет, является объект восстанавливаемым или невосстанавливаемым.

При анализе надежности, особенно при выборе показателей надежности объекта, существенное значение имеет решение, которое должно быть принято при отказе объекта. Если в рассматриваемой ситуации восстановление работоспособности данного объекта в случае его отказа по каким-либо причинам признается нецелесообразным или неосуществимым (например, из-за невозможности прерывания выполняемой функции), то такой объект в данной ситуации является невосстанавливаемым. Таким образом, один и тот же объект в зависимости от особенностей или этапов эксплуатации может считаться восстанавливаемым или невосстанавливаемым.

Например, аппаратура метеоспутника на этапе хранения относится к восстанавливаемой, а во время полета в космосе, естественно, к невосстанавливаемой.

Более того, один и тот же объект может быть отнесен к тому или иному типу в зависимости от назначения: ЭВМ, используемая для неоперативных вычислений, является объектом восстанавливаемым, так как в случае отказа любая операция может быть повторена, а та же ЭВМ, используемая для управления сложным технологическим процессом в металлургии или химии, при анализе надежности считается невозстанавливаемым объектом, так как отказ или сбой приводит к неприемлемым последствиям.

Под восстановлением объекта понимается не только ремонт той или иной его части, но в ряде случаев и полная его замена или замена частей. Действительно, для пользователя, заинтересованного в выполнении определенных заданных функций, совершенно неважно, восстанавливается работоспособность непосредственно ремонтом объекта или заменой его на совершенно другое работоспособное. (В качестве примера можно привести использование транспортного средства из общего парка аналогичных средств для выполнения регулярных рейсов по определенному маршруту.)

Для показателей надежности приводятся две формы представления: вероятностная и статистическая. Вероятностная форма обычно бывает удобнее при априорных аналитических расчетах надежности, статистическая — при экспериментальном исследовании надежности технических объектов. Кроме того, оказывается, что одни показатели лучше интерпретируются в вероятностных терминах, а другие — в статистических.

Для простоты пояснения статистических показателей надежности невозстанавливаемых объектов будем рассматривать только такую схему испытаний или эксплуатации этих объектов, при которой несколько образцов работают до отказа. В этом случае статистические показатели допускают простое частотное толкование. Кроме того, с ростом числа испытываемых объектов статистические показатели будут сходиться в пределе (по вероятности) к аналогичным вероятностным показателям.

Процесс эксплуатации объекта с восстановлением можно представить как последовательность интервалов работоспособности ξ_i , чередующихся с интервалами простоя η_i , т. е. $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots$ Математической моделью процесса эксплуатации объекта может явиться соответствующий случайный процесс.

Для объектов с восстановлением характерен специфический вид случайного процесса, описывающего функционирование их во время эксплуатации. Основная особенность этого случайного процесса заключается в том, что в общем случае распределения $F_1(t), F_2(t), \dots$ соответствующих случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ могут быть отличны друг от друга. Это объясняется тем, что в очередной момент начала работы после восстановления объект характеризуется вполне определенным начальным состоянием. В дальнейшем рассматривают в основном либо характеристики объектов до первого отказа, либо стационарные характеристики. Под стационарными характеристиками будем понимать характеристики соответствующих стационарных случайных процессов. В этом случае начальные состояния оказываются одинаковыми в вероятностном смысле, т. е. случайные величины ξ_k, ξ_{k+1} и т. д. имеют для всех k одинаковые распределения $F_k(t) = F(t)$. Аналогично и случайные величины $\eta_1, \eta_2, \dots$ могут иметь различные распределения, однако всюду (если это не будет оговорено особо) будем полагать их эквивалентными случайными величинами с распределением $G(t)$. (Через $g(t)$ будем обозначать плотность распределения $G(t)$, если она существует.)

Практически во всех случаях будем полагать, что чередующиеся величины ξ_i и η_i взаимно независимы, а распределение каждой из них не зависит от номера i , т. е. будем изучать случайный процесс $\{\xi, \eta\}$, который в теории восстановления носит название альтернирующего.

Предварительно введем следующие обозначения:

$f_1(t)$ — плотность распределения $F_1(t)$;

$F_1(t) = P\{\xi_1 \leq t\}$ — распределение времени до первого отказа;

$n(t)$ — число отказавших объектов к моменту t ;

$N(t)$ — число работоспособных объектов к моменту t ;

$\Delta n(t, t')$ — число объектов, отказавших в интервале времени $[t, t']$;

ξ_1 — случайная наработка объекта до первого отказа;

$\xi_1^{(i)}$ — реализация случайной величины ξ_1 для i -го объекта.

1. Вероятность безотказной работы объекта в интервале времени от 0 до t_0 .

а. Вероятностное определение

$$P(t_0) = P(0; t_0) = P\{\xi_1 \geq t_0\} = 1 - F_1(t_0),$$

т. е. $P(t_0)$ — вероятность того, что объект проработает безотказно в течение заданного времени работы t_0 , начав работать в момент времени $t=0$, или вероятность того, что наработка до отказа окажется больше заданного времени работы t_0 .

б. Статистическое определение

$$\widehat{P}(t_0) = N(t_0)/N(0) = 1 - n(t_0)/N(0),$$

т. е. $\widehat{P}(t_0)$ — отношение числа объектов, безотказно проработавших до момента времени t_0 , к числу объектов, исправных в начальный момент времени $t=0$, или частость события, состоящего в том, что реализация времени работы объекта до отказа окажется больше заданного времени работы t_0 .

Иногда сама выполняемая объектом задача имеет случайную длительность ξ , характеризующуюся своей функцией распределения $W(t) = P\{\xi \leq t\}$. В этом случае полная вероятность безотказной работы объекта за время выполнения задачи запишется как

$$P_0 = \int_0^{\infty} P(t) dW(t).$$

2. Вероятность отказа объекта в интервале времени от 0 до t_0 определяется как дополнительная к вероятности безотказной работы, т. е.

$$Q(t_0) = 1 - P(t_0) \text{ и } \widehat{Q}(t_0) = 1 - \widehat{P}(t_0).$$

3. Вероятность безотказной работы объекта в интервале времени от t до $t + t_0$.

а. Вероятностное определение

$$P(t, t + t_0) = P\{\xi_1 \geq t + t_0 | \xi_1 > t\} = P(0, t + t_0)/P(0, t) = P(t + t_0)/P(t),$$

т. е. $P(t, t + t_0)$ — вероятность того, что объект проработает безотказно в течение заданного времени работы t_0 , начинающегося с момента времени t , или условная вероятность того, что случайная наработка объекта до отказа окажется больше величины $t + t_0$ при условии, что объект уже проработал безотказно до момента времени t .

б. Статистическое определение

$$\widehat{P}(t, t + t_0) = N(t + t_0)/N(t),$$

т. е. $\widehat{P}(t, t + t_0)$ — отношение числа объектов, проработавших до момента времени $t + t_0$, к числу объектов, исправных к моменту времени t , или частость события, состоящего в том, что реализация наработки объекта до отказа окажется больше $t + t_0$ при условии, что эта реализация больше величины t .

4. Вероятность отказа объекта в интервале времени от t до $t + t_0$ определяется как дополнительная к соответствующей вероятности, т. е.

$$Q(t, t + t_0) = 1 - P(t, t + t_0) = \frac{P(t) - P(t + t_0)}{P(t)};$$

$$\widehat{Q}(t, t + t_0) = 1 - \widehat{P}(t, t + t_0).$$

5. Плотность распределения отказов.

а. Вероятностное определение

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t) = \frac{d}{dt} Q(t) = -\frac{d}{dt} P(t),$$

т. е. $f(t)$ — плотность вероятности того, что время работы объекта до отказа окажется меньше t , или плотность вероятности отказа к моменту времени t .

б. Статистическое определение

$$\widehat{f}(t) = \frac{n(t + \Delta t) - n(t)}{N(0) \Delta t} = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{N(0) \Delta t} = \frac{\Delta n(t, t + \Delta t)}{N(0) \Delta t},$$

т. е. $\widehat{f}(t)$ — отношение числа отказов в интервале времени $[t, t + \Delta t]$ к произведению числа исправных объектов в начальный момент времени $t = 0$ на длительность интервала времени Δt .

6. Интенсивность отказов объекта в момент времени t .

а. Вероятностное определение

$$\lambda(t) = \frac{1}{1 - F(t)} \frac{d}{dt} F(t) = \frac{f(t)}{P(t)},$$

т. е. $\lambda(t)$ — условная плотность вероятности отказа объекта к моменту времени t при условии, что до этого момента отказ изделия не произошел.

б. Статистическое определение

$$\widehat{\lambda}(t) = \frac{n(t + \Delta t) - n(t)}{N(t) \Delta t} = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{N(t) \Delta t} = \frac{\Delta n(t, t + \Delta t)}{N(t) \Delta t},$$

т. е. $\widehat{\lambda}(t)$ — отношение числа отказов в интервале времени $[t, t + \Delta t]$ к произведению числа исправных объектов в момент времени t на длительность интервала времени Δt .

7. Средняя наработка объекта до отказа.

а. Вероятностное определение

$$T_1 = M\{\xi_1\} = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x dQ(x) = \int_0^{\infty} P(x) dx,$$

т. е. T_1 — математическое ожидание (среднее значение) наработки до отказа.

б. Статистическое определение

$$\widehat{T}_1 = \frac{1}{N(0)} (\xi_1^{(1)} + \xi_1^{(2)} + \dots + \xi_1^{[N(0)]}) = \frac{1}{N(0)} \sum_{i=1}^{N(0)} \xi_1^{(i)},$$

или

$$\widehat{T}_1 = \xi_1^{(1)} + \frac{N(0) - 1}{N(0)} [\xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)}] + \dots + \frac{1}{N(0)} [\xi_1^{[N(0)]} - \xi_1^{[N(0) - 1]}].$$

2.3. ВОССТАНАВЛИВАЕМЫЕ ОБЪЕКТЫ

Для восстанавливаемых объектов приводятся только дополнительные показатели надежности. Все показатели для невосстанавливаемых объектов также могут быть применимы для характеристики восстанавливаемых объектов, повторно они не приводятся.

Введем дополнительные обозначения: $g(t)$ — плотность распределения $G(t)$; $G(t) = P\{\eta \leq t\}$ — распределение времени восстановления; $n(t, t')$ — число объектов, неработоспособных в момент t или отказавших хотя бы один раз в интервале $[t, t']$; $n_{\text{в}}(t)$ — число объектов, восстановление которых длилось меньше t ; $N(t, t')$ — число объектов, работоспособных в момент t и не проработавших безотказно до t' ; $N_{\text{в}}(t)$ — число объектов, восстановление которых длилось больше t ; t_{∞} — произвольный «достаточно удаленный» момент времени, соответствующий стационарному режиму случайного процесса; $\Delta n_{\text{в}}(t, t')$ — число объектов, восстановление которых длилось больше t , но меньше t' ; ξ_k — случайное время работы (случайная наработка) объекта перед k -м отказом (после $(k-1)$ -го восстановления); $\xi_k^{(i)}$ — реализация ξ_k для i -го объекта; η_k — случайное время восстановления (простоя) объекта после k -го отказа; $\eta^{(i)}$ — i -я реализация времени восстановления.

1. Средняя наработка между отказами.

а. Вероятностное определение

$$T = T_{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} M\{T_k\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k T_j,$$

т. е. T — математическое ожидание предельного значения наработки между отказами для стационарного процесса.

Здесь T_k — средняя наработка объекта от момента окончания $(k-1)$ -го восстановления до k -го отказа, определяемая как

$$T_k = M\{\xi_k\} = \int_0^{\infty} t f_k(t) dt = \int_0^{\infty} t dQ_k(t) = \int_0^{\infty} P_k(t) dt,$$

т. е. T_k — математическое ожидание (среднее значение) наработки объекта от момента окончания $(k-1)$ -го отказа.

б. Статистическое определение

$$\widehat{T}_k = \frac{1}{N(0)} \sum_{i=1}^{N(0)} \{\theta_k^{(i)} | k \gg 1\},$$

т. е. $\widehat{T}_k$ — среднее арифметическое реализаций времени работы до k -го отказа при «достаточно большом» k .

Для $\widehat{T}_k$ при произвольном фиксированном k справедливо следующее статистическое определение:

$$\widehat{T}_k = \frac{1}{N(0)} (\xi_k^{(1)} + \xi_k^{(2)} + \dots + \xi_k^{[N(0)]}) = \frac{1}{N(0)} \sum_{i=1}^{N(0)} \xi_k^{(i)},$$

или

$$\begin{aligned} \widehat{T}_k &= \xi_k^{(1)} + \frac{N(0)-1}{N(0)} [\xi_k^{(2)} - \xi_k^{(1)}] + \dots + \frac{1}{N(0)} [\xi_k^{[N(0)]} - \xi_k^{[N(0)-1]}] = \\ &= \sum_{i=1}^{N(0)} \frac{N(0)-i+1}{N(0)} [\xi_k^{(i)} - \xi_k^{(i-1)}], \end{aligned}$$

где принято, что $\xi_k^{(1)} \leq \xi_k^{(2)} \leq \dots \leq \xi_k^{[N(0)]}$, причем $\xi_k^{(0)} = 0$. Здесь $N(0)$ — общее число объектов, начавших работать после $(k-1)$ -го восстановления; $\xi_k^{(i)}$ — реализация времени работы после $(k-1)$ -го восстановления до k -го отказа для i -го изделия (в порядке поступления отказов); T_k — среднее арифметическое реализаций наработки объектов от момента окончания $(k-1)$ -го восстановления до k -го отказа.

2. Параметр потока отказов.

а. Вероятностное определение (для стационарного ординарного потока отказов)

$$\lambda = 1/T,$$

т. е. λ — математическое ожидание числа отказов объекта с восстановлением в единицу времени для установившегося процесса эксплуатации.

б. Статистическое определение

$$\hat{\lambda} = 1/\hat{T},$$

т. е. $\hat{\lambda}$ — среднее число отказов объекта с восстановлением в единицу времени.

(В теории надежности в отличие от теории массового обслуживания, как правило, не приходится различать интенсивность и параметр потока событий (отказов), так как поток отказов физически является всегда ординарным.)

3. Средняя наработка на отказ.

а. Вероятностное определение

$$T(t_0) = \frac{t_0}{M\{n(t_0)\}},$$

т. е. $T(t_0)$ — отношение суммарной наработки t_0 за заданный период времени к математическому ожиданию числа отказов за это же время.

б. Статистическое определение

$$\hat{T}(t_0) = \frac{t_0}{n(t_0)} = \frac{1}{n(t_0)} \left[\sum_{k=1}^{n(t_0)} \hat{T}_k + \zeta \right],$$

т. е. $\hat{T}(t_0)$ — отношение суммарной наработки t_0 за время наблюдения за объектом к наблюдаемому числу отказов за это же время, где ζ — наработка объекта от момента устранения последнего отказа до окончания наблюдения за объектом.

4. Среднее время восстановления объекта.

а. Вероятностное определение

$$\tau = M\{\eta\} = \int_0^{\infty} t g(t) dt = \int_0^{\infty} t dG(t) = \int_0^{\infty} [1 - G(t)] dt,$$

т. е. τ — математическое ожидание (среднее значение) времени восстановления объекта.

б. Статистическое определение

$$\hat{\tau} = \frac{1}{N(0)} (\eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \dots + \eta^{[N(0)]}) = \frac{1}{N(0)} \sum_{i=1}^{N(0)} \eta^{(i)}$$

или

$$\begin{aligned} \hat{\tau} &= \eta^{(1)} + \frac{N(0)-1}{N(0)} [\eta^{(2)} - \eta^{(1)}] + \dots + \frac{1}{N(0)} [\eta^{[N(0)]} - \eta^{[N(0)-1]}] = \\ &= \sum_{i=1}^{N(0)} \frac{N(0)-i+1}{N(0)} [\eta^{(i)} - \eta^{(i-1)}], \end{aligned}$$

где принято, что $\eta^{(1)} \leq \eta^{(2)} \leq \dots \leq \eta^{[N(0)]}$, причем $\eta^{(0)} = 0$; $\hat{\tau}$ — среднее арифметическое реализаций времени восстановления.

5. Интенсивность восстановления объекта в момент времени t , отсчитываемый от момента начала восстановления.

а. Вероятностное определение

$$\mu(t) = \frac{g(t)}{1 - G(t)},$$

т. е. $\mu(t)$ — условная плотность вероятности восстановления объекта в момент времени t , отсчитываемого от момента начала восстановления, при условии, что до момента времени t восстановления объекта не произошло.

б. Статистическое определение

$$\widehat{\mu}(t) = \frac{n_B(t + \Delta t) - n_B(t)}{N_B(t) \Delta t} = \frac{N_B(t + \Delta t) - N_B(t)}{N_B(t) \Delta t} = \frac{\Delta n_B(t, t + \Delta t)}{N_B(t) \Delta t},$$

т. е. $\widehat{\mu}(t)$ — отношение числа восстановлений в интервале времени $[t, t + \Delta t]$ к произведению числа объектов, еще не восстановленных к моменту t , на длительность интервала времени Δt .

б. Нестационарный коэффициент оперативной готовности.

а. Вероятностное определение

$$\begin{aligned} R(t, t + t_0) &= \sum_{k=1}^{\infty} P \left\{ \sum_{i=0}^k (\xi_i + \eta_i) < t < t + t_0 \leq \xi_{k+1} + \sum_{i=0}^k (\xi_i + \eta_i) \right\} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P \{ [t, t + t_0] \in \theta_k \}, \end{aligned}$$

т. е. $R(t, t + t_0)$ — вероятность того, что объект окажется работоспособным в момент t и проработает безотказно в течение заданного времени t_0 , начиная с этого момента, или вероятность того, что интервал времени $[t, t + t_0]$ целиком попадает внутрь одного из интервалов θ_k , $k = 1, 2, \dots$

б. Статистическое определение

$$\widehat{R}(t, t + t_0) = \frac{N(0) - n(t, t + t_0)}{N(0)} = \frac{N(t, t + t_0)}{N(0)},$$

т. е. $\widehat{R}(t, t + t_0)$ — отношение числа объектов, работоспособных в момент времени t и проработавших безотказно до момента времени $t + t_0$, к общему числу объектов в момент времени t .

Этот показатель для восстанавливаемых объектов определяется иначе, чем для невосстанавливаемых.

7. Стационарный коэффициент оперативной готовности, или стационарная вероятность безотказной работы объекта в течение заданного времени работы t_0 . (Для краткости обычно называется просто коэффициентом оперативной готовности.)

а. Вероятностное определение

$$R(t_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} R(t, t + t_0),$$

т. е. $R(t_0)$ — вероятность того, что объект проработает безотказно в течение заданного времени t_0 , начиная с произвольного «достаточно удаленного» момента времени t .

Для любых распределений наработки между отказами и времени восстановления, имеющих конечные средние значения T и τ соответственно, всегда можно записать

$$R(t_0) = \frac{1}{T + \tau} \int_{t_0}^{\infty} P_{\infty}(t) dt,$$

где $P_{\infty}(t) = 1 - F_{\infty}(t)$ ($F_{\infty}(t)$ — функция распределения наработки между отказами).

б. Статистическое определение

$$\widehat{R}(t_0) = \frac{N(t_\infty, t_\infty + t_0)}{N(0)},$$

т. е. $\widehat{R}(t_0)$ — отношение числа объектов, исправных в произвольный «достаточно удаленный» момент времени и проработавших затем безотказно в течение заданного времени t_0 , к общему числу объектов.

8. Нестационарный коэффициент готовности объекта.

а. Вероятностное определение

$$K(t) = \sum_{i=1}^{\infty} P \left\{ \sum_{k=0}^i (\xi_k + \eta_k) < t < \sum_{k=0}^i (\xi_k + \eta_k) + \xi_{i+1} \right\},$$

или

$$K(t) = R(t, t_0 = 0),$$

т. е. $K(t)$ — вероятность того, что в момент времени t объект находится в состоянии работоспособности (при известных начальных условиях в момент $t = 0$)

б. Статистическое определение

$$\widehat{K}(t) = N(t)/N(0) = 1 - n(t)/N(0),$$

т. е. $\widehat{K}(t)$ — отношение числа объектов, находящихся в момент времени t в состоянии работоспособности, к общему числу объектов.

9. Нестационарный средний коэффициент готовности объекта.

а. Вероятностное определение

$$K^*(t) = \frac{1}{t} \int_0^t K(x) dx,$$

т. е. $K^*(t)$ — математическое ожидание отношения времени, в течение которого объект находится в соответствии работоспособности в интервале $[0, t]$, ко всей длительности этого интервала.

б. Статистическое определение

$$\widehat{K}^*(t) = \frac{1}{tN(0)} \sum_{i=1}^{N(0)} \sum_k (\xi_k^{(i)} | \xi_k^{(i)} \in [0, t]) = \frac{1}{tN(0)} \sum_{i=1}^{N(0)} s_i(t),$$

где $s_i(t)$ — суммарная наработка i -го объекта за время t , т. е. $K^*(t)$ — среднее арифметическое суммарных наработок объектов за время t .

10. Стационарный коэффициент готовности объекта. (Для краткости обычно называется просто коэффициентом готовности.)

а. Вероятностное определение

$$K = \lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} K^*(t), \text{ или } K = R(t_0 = 0),$$

т. е. K — вероятность нахождения объекта в состоянии работоспособности для стационарного случайного процесса (т.е. в произвольный «достаточно удаленный» момент времени), или математическое ожидание отношения времени (для стационарного случайного процесса), в течение которого объект находится в состоянии работоспособности в некотором интервале, ко всей длительности этого интервала.

Для любых распределений наработки между отказами и времени восстановления, имеющих конечные средние значения T_∞ и τ соответственно, всегда можно записать

$$K = T_\infty / (T_\infty + \tau).$$

$$\widehat{K} = N(t_{\infty})/N(0) = 1 - n(t_{\infty})/N(0),$$

т. е. $\widehat{K}$ — отношение числа объектов, находящихся в состоянии работоспособности в произвольный «достаточно удаленный» момент времени, к общему числу объектов.

11. Нестационарный коэффициент простоя объекта является дополнительным для нестационарного коэффициента готовности, т. е.

$$k(t) = 1 - K(t) \text{ и } \widehat{k}(t) = 1 - \widehat{K}(t).$$

12. Коэффициент простоя объекта k является дополнительным для коэффициента готовности, т. е.

$$k = 1 - K \text{ и } \widehat{k} = n(t_{\infty})/N(0).$$

2.4. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ

В последнее время с появлением современных сложных систем, применяющих вычислительные средства, для многих практических расчетов надежности стали использоваться специальные показатели, основными из которых являются:

- 1) вероятность заданной суммарной наработки за фиксированное календарное время t ;
- 2) вероятность наличия не менее чем заданного интервала безотказной работы за фиксированное календарное время t ;
- 3) вероятность наличия не менее чем заданного интервала безотказной работы за фиксированное календарное время t ;
- 4) вероятность отсутствия интервала простоя, большего допустимой величины, за фиксированное суммарное время простоя t ;
- 5) вероятность отсутствия интервала простоя, большего допустимой величины, за фиксированное календарное время t .

Первый показатель оказывается важным для тех систем, которые допускают перерывы в работе и могут продолжать выполнение своих функций начиная с любого момента. Эти системы имеют своеобразный временной резерв: для них важно, чтобы за требуемое время суммарная наработка системы составила бы не менее заданной величины (или, иными словами, чтобы суммарное время простоя не превышало определенной величины). К подобного рода системам можно отнести системы, выпускающие какую-либо массовую однородную продукцию, когда объем выпуска зависит только лишь от длительности суммарной наработки.

Второй показатель используется для оценки надежности систем, которые имеют возможность повторных попыток выполнения задачи. Эти системы также характеризуются определенной временной избыточностью; необходимо, чтобы система за требуемое время t проработала непрерывно хотя бы один раз в течение интервала времени, достаточного для выполнения задачи.

Третий показатель является частным случаем второго. Он получается в предположении пренебрежимой малости суммарного времени простоя по сравнению с периодом t . Для математических моделей в этом случае делается предположение о мгновенном восстановлении объекта после отказа.

Первые два показателя можно использовать для оценки ЭВМ, в которых после сбоя или отказа возможно повторное выполнение прежней программы. Третий показатель полезен для описания систем, которым свойственна своеобразная «инерционность» в процессе функционирования: эти системы не чувствительны к достаточно кратковременным перерывам. Примерами могут служить средства обработки траекторий управляемых объектов, у которых допускается экстраполяция координат при пропадании ограниченного количества данных.

1. Вероятность заданной суммарной наработки a за фиксированное время t .
 а. Вероятностное определение

$$A(a, t) = P\{s(t) \geq a\},$$

где a — заданный уровень суммарной наработки; $s(t)$ — суммарная наработка за время t . Таким образом, $A(a, t)$ — вероятность того, что суммарная наработка объекта за время t превысит заданную величину t_0 .

б. Статистическое определение

$$\widehat{A}(a, t) = \frac{1}{N(0)} \sum_{i=1}^{N(0)} [s_i(t)]_a,$$

где $s_i(t)$ — суммарная наработка i -го объекта за время t .

Запись $[s_i(t)]_a$ означает следующее:

$$[s_i(t)]_a = \begin{cases} 1, & \text{если } s_i(t) \geq a, \\ 0, & \text{если } s_i(t) < a. \end{cases}$$

Иначе говоря, $\widehat{A}(a, t)$ — отношение числа объектов, суммарная наработка которых за время t превысила величину a , к общему числу объектов.

2. Вероятность наличия интервала безотказной работы, большего заданной величины b , за фиксированное календарное время t .

а. Вероятностное определение

$$B(b, t) = P\{\exists \xi_i \geq b | \xi_i \in [0, t]\},$$

где ξ_i — интервал безотказной работы (включая часть незавершенного последнего интервала ξ^*), т. е. $B(b, t)$ — вероятность того, что за наработку t появится хотя бы один интервал безотказной работы ξ_i (включая часть незавершенного последнего интервала ξ^*), больший заданной величины b .

б. Статистическое определение

$$\widehat{B}(t_0, t) = \frac{1}{N(0)} \sum_{i=1}^{N(0)} [\{\xi, \eta\}_i]_b,$$

где $\{\xi, \eta\}_i$ — реализация последовательности интервалов безотказной работы и простоя для i -го объекта за время t .

Запись $[\{\xi, \eta\}_i]_b$ означает следующее:

$$[\{\xi, \eta\}_i]_b = \begin{cases} 1, & \text{если за время } t \text{ в } \{\xi, \eta\}_i \text{ существует хотя бы один} \\ & \text{интервал } \xi_j \text{ (включая часть незавершенного последнего} \\ & \text{интервала } \xi^*), \text{ больший } b, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Итак, $\widehat{B}(b, t)$ — доля общего числа объектов, у которых в реализации процесса функционирования за время t окажется хотя бы один интервал безотказной работы θ_j (включая возможную часть незавершенного последнего интервала θ^*), больший заданной величины.

3. Вероятность наличия интервала безотказной работы, большего заданной величины b , за фиксированную суммарную наработку t .

а. Вероятностное определение

$$B^*(b, t) = P\{\{\exists \xi_i \geq b | s(t) = t, \xi \in [0, t]\},$$

где ξ_i — любой интервал безотказной работы, включая в данном случае и часть незавершенного последнего интервала ξ_i^* , т. е. $B^*(b, t)$ — вероятность того, что за суммарную наработку t появится хотя бы один интервал безотказной работы ξ_i (включая и часть незавершенного последнего момента ξ_i^*), больший заданной величины b ($\exists$ — квантор «существует»).

6. Статистическое определение

$$\widehat{B}^*(b, t) = \frac{1}{N(0)} \sum_{i=1}^{N(0)} [\{\xi\}_i]_b,$$

где $\{\xi\}_i$ — реализация последовательности интервалов безотказной работы для i -го объекта за время t^* при условии, что восстановление отказов мгновенно. Запись $[\{\xi_i\}]_b$ означает следующее:

$$[\{\xi\}_i]_b = \begin{cases} 1, & \text{если за суммарную наработку } t \text{ в } \{\xi\}_i \text{ существует хотя бы} \\ & \text{один интервал } \xi_j \text{ (включая часть незавершенного последнего} \\ & \text{интервала } \xi^*), \text{ больший } b, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, $\widehat{B}^*(b, t)$ — доля общего числа объектов, у которых в реализации процесса функционирования за суммарную наработку t окажется хотя бы один интервал безотказной работы ξ_i (включая часть незавершенного последнего интервала ξ^*), больший заданной величины b .

4. Вероятность отсутствия интервала простоя, большего допустимой величины c , за фиксированное суммарное время простоя t .

а. Вероятностное определение

$$C^*(c, t) = P \{ \forall \eta_i < c | s_B(t) = t, \eta_i \in [0, t] \},$$

где η_i — интервал простоя (включая часть незавершенного последнего интервала η^*); $s_B(t)$ — суммарное время простоя, т. е. $C^*(c, t)$ — вероятность того, что за суммарное время простоя не появится ни одного интервала простоя η_i (включая часть незавершенного последнего интервала η^*), большего заданной величины c ($\forall$ — квантор «для всех»).

б. Статистическое определение

$$\widehat{C}^*(c, t) = \frac{1}{N(0)} \sum_{i=1}^{N(0)} [\{\eta\}_i]_c,$$

где $\{\eta\}_i$ — реализация последовательности интервалов простоя для i -го объекта за суммарное время простоя t .

Запись $[\{\eta_i\}]_c$ означает:

$$[\{\eta_i\}]_c = \begin{cases} 1, & \text{если за время } t \text{ в } \{\eta\}_i \text{ не существует ни одного} \\ & \text{интервала } \xi_j \text{ (включая часть незавершенного последне-} \\ & \text{го интервала } \eta^*), \text{ большего } c, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Итак, $C^*(c, t)$ — доля общего числа объектов, у которых в реализации времени простоя за суммарное время простоя t не окажется ни одного интервала простоя ξ (включая часть незавершенного последнего интервала η^*), большего заданной величины c .

5. Вероятность отсутствия интервала простоя, большего допустимой величины c , за фиксированное календарное время t .

а. Вероятностное определение

$$C(c, t) = P \{ \forall \eta_i < c | \eta_i \in [0, t] \},$$

где η_i — интервал простоя (включая часть незавершенного последнего интервала η^*), т. е. $C(c, t)$ — вероятность того, что за время t не появится ни одного интервала простоя η_i (включая возможную часть незавершенного последнего интервала η^*), большего c .

$$\widehat{C}(c, t) = \frac{1}{N(0)} \sum_{i=1}^{N(0)} I\{\xi, \eta\}_{i|c},$$

где $\{\xi, \eta\}_i$ — реализация последовательности интервалов безотказной работы и простоя для i -го объекта за время t .

Запись $I\{\xi, \eta\}_{i|c}$ означает следующее:

$$I\{\xi, \eta\}_{i|c} = \begin{cases} 1, & \text{если за время } t \text{ в } \{\theta, \eta\} \text{ не существует ни одного} \\ & \text{интервала } \eta_j \text{ (включая возможную часть незавершен-} \\ & \text{ного последнего интервала } \eta^*), \text{ большего } c, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, $\widehat{C}(c, t)$ — доля общего числа объектов, у которых в реализации процесса функционирования за время t не окажется ни одного интервала простоя η_j (включая возможную часть незавершенного последнего интервала η^*), большего c .

2.5. ВЫБОР ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМЫ

Выбор показателей надежности является конкретной задачей, решение которой существенным образом зависит от характера технического объекта, его назначения и общих требований к процессу и результатам его функционирования.

Показатели надежности в зависимости от уровня рассматриваемого объекта удобно подразделять на оперативные и технические. Оперативными показателями надежности удобно характеризовать системы — это показатели, характеризующие качество функционирования системы с точки зрения потребителя.

Технические показатели имеют своеобразный «технологический» характер: они нужны для использования в дальнейших расчетах или статистических оценках. Эти показатели назначаются для подсистем (элементов). Например, если дублированную систему удобно характеризовать коэффициентом готовности (оперативный показатель), то каждый из резервных элементов удобнее характеризовать техническими показателями — распределениями наработки и времени восстановления (или их основными параметрами, например математическими ожиданиями), поскольку именно они позволяют рассчитать показатель надежности системы в целом с учетом особенностей эксплуатации и технического обслуживания. Действительно, знания лишь коэффициентов готовности элементов недостаточно при ограниченном восстановлении.

Выбор вида показателей зависит в основном от общего назначения системы, но на него может влиять также и степень важности или ответственности функций, выполняемых системой.

Выбирая показатели надежности для технического объекта, следует иметь в виду некоторые простые и очевидные рекомендации:

1) общее число показателей надежности должно быть по возможности минимальным;

2) следует избегать сложных комплексных показателей, получаемых в виде каких-либо сверток критериев (например, взвешиванием с различными «весами»);

3) выбранные показатели надежности должны иметь простой физический смысл;

4) выбранные показатели надежности должны допускать возможность проведения подтверждающих (поверочных) оценок на этапе проектирования (аналитических расчетов или имитационного моделирования);

5) выбранные показатели надежности должны допускать возможность статистической (опытной) оценки при проведении специальных испытаний или по результатам эксплуатации;

6) выбранные показатели должны допускать задание норм надежности в количественной форме.

2.6. ЗАДАНИЕ ТРЕБОВАНИЙ ПО НАДЕЖНОСТИ

2.6.1. Предварительные замечания. При задании требований по надежности следует различать технические объекты трех уровней:

1) системы — технические объекты, выполняющие определенные самостоятельные функции и характеризующиеся оперативно-техническими показателями надежности и эффективности функционирования;

2) подсистемы — технические объекты, входящие в состав системы, выполняющие частные функциональные задачи и характеризующиеся в основном техническими показателями надежности;

3) элементы — технические объекты, представляющие собой элементную базу подсистем.

(Понятия системы, подсистемы и элемента являются, как уже отмечалось, относительными.)

2.6.2. Задание требований на систему.

1. Экспертное (директивное) задание требований основывается только на общей инженерной интуиции и практическом опыте, а поэтому не требует каких-либо особых комментариев.

2. Задание требований по прототипу основывается на анализе имеющейся статистической информации по надежности уже существующих технических объектов, близких к рассматриваемому по назначению, структуре или элементной базе. Требования по надежности в этом случае задаются с учетом возможного роста надежности элементной базы, масштаба рассматриваемой системы по сравнению с прототипом, условий функционирования и т. п. Такой прогноз в значительной степени также опирается на экспертные оценки, однако подтверждается конкретными фактическими данными.

3. Задание оптимального уровня надежности возникает только в том случае, когда:

выходной эффект от функционирования системы измерим в тех же (обычно стоимостных) единицах, что и затраты на ее создание;

достоверно известны исходные данные о надежности элементной базы; полностью определены принципы построения как структуры, так и процессов функционирования (возможность резервирования, использование различной элементной базы, режим использования, регламент технического обслуживания и т. п.).

В этом случае задание требований сводится к максимизации целевой функции вида

$$F_k(R) = E_k(R) - C_k(R),$$

где R — показатель надежности системы, зависящий от выбранного k -го варианта структуры системы S_k и от надежности элементов i -го типа r_i , т. е.

$$R = R(S_k, r_i, k = 1, \dots, m, i = 1, \dots, n),$$

где, в свою очередь, m — число рассматриваемых вариантов структуры, а n — число различных комплектующих элементов; $E_k(R)$ — выходной эффект от функционирования k -го варианта системы в стоимостном выражении при уровне надежности R ; $C_k(R)$ — затраты на обеспечение уровня надежности, равного R , для k -го варианта системы.

Для всякого фиксированного k решение обычно способом из условия

$$\partial E_h(R)/\partial R = \partial C_h(R)/\partial R,$$

после чего выбирается вариант, для которого достигается наибольшее абсолютное значение из оптимальных решений $E_h(R)$.

Если выходной эффект системы несоизмерим с затратами (объекты обороны, системы безопасности различных транспортных средств и т.п.), то задание требований по надежности на систему возможно только двумя первыми способами.

2.6.3. Задание требований на подсистему. Предполагается, что требования на подсистему задаются при наличии уже каким-то образом заданных требований на систему в целом.

1. Метод равномерного распределения. Если система состоит из N примерно близких по сложности (т. е. по структуре и числу входящих элементов) подсистем, то можно заданный показатель надежности (R) типа вероятности безотказной работы, коэффициента оперативной готовности или коэффициента готовности распределять по правилу

$$R_i = \sqrt[N]{R}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Задаваемая средняя наработка для i -й подсистемы в этом случае приблизительно равна $T_i = NT$, $i = 1, \dots, N$, T — заданная средняя наработка системы.

2. Метод пропорционального распределения. Если n_i — число элементов в i -й подсистеме, то

$$R_i = \sqrt[n_i]{R}, \quad i = 1, \dots, N, \quad a_i = n_i \left(\sum_{1 \leq j \leq N} n_j \right)^{-1}.$$

Под n_i в данном случае следует понимать число в некотором смысле «приведенных» элементов. Если известны интенсивности отказов элементов (или прототипов элементов) j -го типа λ_j , то метод пропорционального распределения можно модифицировать, положив

$$a_i = \sum_{1 \leq j \leq M} \lambda_j n_{ij} \left(\sum_{1 \leq i \leq N} \sum_{1 \leq j \leq M} \lambda_j n_{ij} \right)^{-1}.$$

3. Метод оптимального распределения. Если при задании требований по надежности на систему в целом (R) известны структура системы (S) и методы повышения надежности подсистем, т. е. функции $R_i(C_i)$, где C_i — ресурс, затрачиваемый на обеспечение надежности подсистемы, то можно найти оптимальное распределение требований по надежности для двух случаев:

а) максимум показателя надежности системы при ограничениях на суммарный ресурс C^0

$$\max_c \left\{ R(S, R_i(C_i)) \mid \sum_{1 \leq i \leq N} C_i \leq C^0 \right\}, \quad C = (C_1, C_2, \dots, C_N);$$

б) минимум затрат на систему при достижении заданного показателя надежности R^0

$$\min \{ C(S, R_i(C_i)) \mid R^0 \}.$$

Обе задачи решаются обычными способами дискретного программирования, как задачи на условную оптимизацию.

2.6.4. Задание требований на элемент. Если в пределах данного исследования элементом является относительно сложная подсистема, то подход к заданию требований совпадает с тем, который был описан выше.

Если же элементом является технологическая единица типа микроэлемента и радиоэлектронной детали, то в настоящее время существуют лишь экспертные способы задания требований, включая способы задания по прототипу.

МЕТОДЫ РАСЧЕТА

Глава 3

НАДЕЖНОСТЬ ЭЛЕМЕНТА

3.1. НЕВОССТАНАВЛИВАЕМЫЙ ЭЛЕМЕНТ

3.1.1. Предварительные замечания. Понятие «элемент» является весьма относительным, зависящим от характера объекта в целом и от задач исследования. Так, при анализе надежности радиоэлектронных комплексов элементом могут считаться целая РЛС, система передачи данных, ЭВМ, энергосистема и т. д. В теории надежности под элементом системы обычно понимают достаточно самостоятельную и четко выделенную (конструктивно, схемно или функционально) ее часть, дальнейшая детализация которой нецелесообразна в пределах проводимого анализа. При анализе надежности РЛС элементом можно считать отдельный ее канал, блок или стойку аппаратуры, при анализе надежности какого-либо блока — отдельный модуль, ячейку, радиодеталь, ЭВП, транзистор и т. д.

Иными словами, простая система, разбиение которой на элементы не имеет смысла в рамках данного исследования, может рассматриваться как элемент.

3.1.2. Произвольное распределение. Предполагается, что известно распределение наработки элемента до отказа $F(t)$. Показатели надежности элемента выражаются через известный закон распределения или его основные параметры.

В табл. 3.1 приведены основные показатели надежности для произвольного закона распределения наработки до отказа. При этом дискретная функция распределения задается выражением

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \leq t < t_1, \\ v_1 & \text{для } t_1 \leq t < t_2, \\ v_1 + v_2 & \text{для } t_2 \leq t < t_3, \\ \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^{k(t)} v_i & \text{для } t_{k(t)} \leq t < t_{k(t)+1}, \end{cases}$$

где t_i — момент i -го по счету скачка дискретной функции распределения $F(t)$; $k(t)$ — число скачков функции $F(t)$ к моменту t ; v_i — скачок функции $F(t)$ в точке t_i .

3.1.3. Экспоненциальное распределение. В табл. 3.2 приведены основные показатели надежности элемента для экспоненциального распределения наработки до отказа. Приближенные значения приводятся для условия $\lambda t_0 \ll 1$. Погрешность равна $0,5 (\lambda t_0)^2$. Практически приближенные значения показателей можно использовать, если $\lambda t_0 < 0,1$.

3.1.4. «Стареющие» распределения. В гл. 25 рассматриваются различные классы так называемых «стареющих» распределений, которые часто встречаются на практике. Для вероятности безотказной работы элемента, который имеет возрастающую или возрастающую в среднем функцию интенсивности, т. е. ВФИ или ВСФИ-распределения, относящиеся к «стареющим», можно дать хорошие

Невосстанавливаемый элемент. Произвольное распределение наработки до отказа $F(t)$

Показатель	Непрерывная функция	Дискретная функция
$P(t_0)$	$1 - F(t_0)$	$1 - \sum_{i=1}^{k(t_0)} v_i$
$Q(t_0)$	$F(t_0)$	$\sum_{i=1}^{k(t_0)} v_i$
$P(t, t+t_0)$	$\frac{1 - F(t+t_0)}{1 - F(t)}$	$\left(1 - \sum_{i=1}^{k(t+t_0)} v_i\right) / \left(1 - \sum_{i=1}^{k(t)} v_i\right)$
$Q(t, t+t_0)$	$\frac{F(t+t_0) - F(t)}{1 - F(t)}$	$\left(\sum_{i=k(t)}^{k(t+t_0)} v_i\right) / \left(1 - \sum_{i=1}^{k(t)} v_i\right)$
T	$\int_0^{\infty} [1 - F(t)] dt$	$\sum_{i=1}^N v_i t_i$

оценки на основании информации о средней наработке до отказа и дисперсии. Рассматриваются следующие случаи:

ВФИ-распределение при известном значении средней наработки до отказа T . Верхние и нижние границы представлены на рис. 3.1 и в табл. 3.3. Верхняя граница, которая может быть найдена решением уравнения $1 - \omega_t T = e^{-\omega_t t}$, для $t > T$ протабулирована (табл. 3.4);

ВФИ-распределение при известных значениях средней наработки до отказа и дисперсии распределения. Верхняя и нижняя границы для этого случая приведены в табл. 3.5 и 3.6;

ВСФИ-распределение при известном значении средней наработки до отказа. Для этого случая в табл. 3.7 приводится нижняя оценка для $t/T < 1$.

3.1.5. Вероятность безотказной работы при случайной длительности выполнения задачи. Если время выполнения элементом задачи t_0 является случайной величиной с распределением $W(t)$, то вероятность безотказной работы элемента можно записать в виде

$$P = \int_0^{\infty} P(t) dW(t) = \int_0^{\infty} P(t) \omega(t) dt,$$

где $\omega(t)$ — плотность распределения $W(t)$.

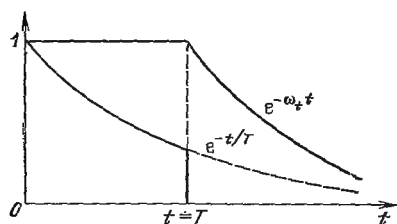


Рис. 3.1. Верхняя и нижняя границы для ВФИ-распределения при известном среднем значении

Таблица 3.2

Невосстанавливаемый элемент. Экспоненциальный закон распределения наработки до отказа $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$

Показатель	Точное значение	Приближенное значение
$P(t_0) = P(t, t+t_0)$	$e^{-\lambda t_0}$	$1 - \lambda t_0$
$Q(t_0) = Q(t, t+t_0)$	$1 - e^{-\lambda t_0}$	λt_0
T	$\frac{1}{\lambda}$	—
$\lambda(t)$	λ	—

Верхняя и нижняя границы вероятности безотказной работы $P(t)$ и квантили ξ_p для ВФИ-распределения

Показатель	Нижняя граница	Верхняя граница	Интервал, для которого справедлива оценка	Примечание
$P(t)$	$e^{-t/T}$ 0	1 $e^{-\omega_t t}$	$0 \leq t < T$ $t \geq T$	ω_t определяется из уравнения $1 - \omega_t T = e^{-\omega_t t}$
	$e^{-\alpha t}$ —	— $e^{-\alpha t}$	$t \leq \xi_p$ $t \geq \xi_p$	ξ_p определяется из уравнения $F(\xi_p) = p$
ξ_p	$-\ln(1-p) T$ T	$-\frac{\ln(1-p)}{p} T$ $-\frac{\ln(1-p)}{p} T$	$p \leq 1 - e^{-1}$ $p \geq 1 - e^{-1}$	$\alpha = -\frac{\ln(1-p)}{\xi_p}$

Таблица 3.4

Верхние границы вероятности безотказной работы для ВФИ-распределения с известным T

t/T	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08	t/T	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08
1,0	1,000	0,961	0,924	0,889	0,856	1,6	0,358	0,348	0,337	0,328	0,318
1,1	0,824	0,794	0,765	0,738	0,711	1,7	0,309	0,300	0,292	0,283	0,275
1,2	0,686	0,662	0,640	0,618	0,597	1,8	0,268	0,260	0,253	0,246	0,239
1,3	0,577	0,558	0,540	0,522	0,505	1,9	0,233	0,226	0,220	0,214	0,209
1,4	0,489	0,474	0,459	0,444	0,430	2,0	0,203	0,198	0,193	0,188	0,183
1,5	0,417	0,404	0,392	0,380	0,369						

Таблица 3.5

Верхние границы вероятности безотказной работы для ВФИ-распределения с известным T и σ^2

t/T	σ^2/T^2					t/T	σ^2/T^2				
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50		0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
0,30	1,000	1,000	1,000	1,000	0,993	0,05	1,000	1,000	1,000	1,000	0,951
0,33	1,000	1,000	1,000	1,000	0,964	0,10	1,000	1,000	1,000	9,952	0,905
0,36	1,000	1,000	1,000	1,000	0,936	0,15	1,000	1,000	0,957	0,906	0,861
0,39	1,000	1,000	1,000	0,978	0,909	0,20	1,000	0,964	0,910	0,862	0,819
0,42	1,000	1,000	1,000	0,951	0,883	0,25	0,976	0,917	0,866	0,820	0,779
0,45	1,000	1,000	1,000	0,924	0,857	0,30	0,930	0,873	0,824	0,780	0,741
0,48	1,000	1,000	0,974	0,897	0,833	0,35	0,884	0,831	0,784	0,742	0,705
0,51	1,100	1,000	0,947	0,872	0,809	0,40	0,842	0,790	0,746	0,706	0,670
0,54	1,000	1,000	0,921	0,847	0,785	0,45	0,801	0,752	0,709	0,671	0,638
0,57	1,000	0,985	0,896	0,823	0,763	0,50	0,762	0,716	0,675	0,639	0,606
0,60	1,000	0,959	0,871	0,800	0,741	0,55	0,726	0,681	0,642	0,608	0,577
0,63	1,000	0,933	0,847	0,777	0,719	0,60	0,691	0,648	0,611	0,578	0,549
0,66	1,000	0,909	0,824	0,755	0,699	0,65	0,658	0,616	0,581	0,550	0,522
0,69	0,995	0,885	0,801	0,734	0,678	0,70	0,626	0,587	0,553	0,523	0,487
0,72	0,972	0,862	0,779	0,713	0,659	0,75	0,596	0,558	0,526	0,497	0,472

t/T	σ^2/T^2					t/T	σ^2/T^2				
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50		0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
0,75	0,949	0,840	0,758	0,693	0,640	0,80	0,567	0,531	0,500	0,473	0,450
0,78	0,927	0,819	0,737	0,674	0,622	0,85	0,540	0,506	0,476	0,450	0,427
0,81	0,906	0,798	0,718	0,655	0,604	0,90	0,514	0,481	0,453	0,428	0,407
0,84	0,887	0,778	0,698	0,636	0,587	0,95	0,490	0,458	0,431	0,407	0,387
0,87	0,868	0,758	0,680	0,619	0,570	1,00	0,467	0,436	0,410	0,388	0,368
0,90	0,850	0,740	0,661	0,601	0,554	1,05	0,444	0,415	0,390	0,369	0,350
1,00	0,796	0,682	0,608	0,548	0,503	1,10	0,423	0,395	0,371	0,351	0,333
1,05	0,774	0,656	0,579	0,523	0,479	1,15	0,402	0,376	0,353	0,334	0,317
1,10	0,756	0,632	0,554	0,499	0,457	1,20	0,383	0,358	0,336	0,317	0,301
1,15	0,742	0,609	0,531	0,476	0,435	1,25	0,365	0,340	0,320	0,302	0,286
1,20	0,633	0,588	0,509	0,455	0,415						
1,25	0,514	0,570	0,488	0,435	0,396	1,30	0,348	0,324	0,304	0,287	0,272
1,30	0,411	0,554	0,469	0,416	0,377	1,35	0,331	0,308	0,289	0,273	0,259
1,35	0,326	0,519	0,451	0,397	0,360	1,40	0,316	0,293	0,275	0,260	0,247
1,40	0,258	0,444	0,434	0,380	0,343	1,45	0,300	0,279	0,262	0,247	0,235
1,50	0,163	0,321	0,405	0,348	0,313	1,50	0,286	0,266	0,249	0,235	0,223

Таблица 3.6

Нижние границы вероятности безотказной работы
для ВФИ-распределения с известным T и σ^2

t/T	σ^2/T^2					t/T	σ^2/T^2				
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50		0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
0,05	0,987	0,978	0,970	0,965	0,961	0,05	0,957	0,955	0,953	0,952	0,951
0,10	0,974	0,956	0,941	0,931	0,923	0,10	0,917	0,912	0,909	0,906	0,905
0,15	0,962	0,934	0,913	0,893	0,886	0,15	0,878	0,871	0,866	0,863	0,861
0,20	0,949	0,913	0,886	0,866	0,851	0,20	0,840	0,832	0,826	0,821	0,819
0,25	0,937	0,892	0,860	0,836	0,818	0,25	0,804	0,794	0,787	0,782	0,779
0,30	0,925	0,872	0,834	0,806	0,786	0,30	0,770	0,758	0,750	0,744	0,741
0,35	0,913	0,853	0,810	0,778	0,755	0,35	0,737	0,724	0,715	0,708	0,705
0,40	0,901	0,834	0,786	0,751	0,725	0,40	0,706	0,692	0,682	0,674	0,670
0,45	0,886	0,813	0,762	0,724	0,696	0,50	0,647	0,631	0,619	0,611	0,606
0,50	0,868	0,790	0,737	0,698	0,669	0,55	0,619	0,602	0,590	0,582	0,577
0,55	0,847	0,763	0,709	0,671	0,642	0,60	0,592	0,575	0,563	0,554	0,549
0,60	0,819	0,731	0,677	0,639	0,613	0,65	0,564	0,548	0,536	0,527	0,522
0,65	0,787	0,695	0,643	0,608	0,583	0,70	0,534	0,521	0,511	0,502	0,497
0,70	0,747	0,655	0,605	0,574	0,551	0,75	0,505	0,494	0,485	0,478	0,472
0,75	0,699	0,609	0,567	0,538	0,518	0,80	0,475	0,466	0,460	0,454	0,449
0,80	0,640	0,562	0,524	0,502	0,486	0,85	0,446	0,440	0,435	0,431	0,427
0,85	0,569	0,510	0,482	0,466	0,454	0,90	0,419	0,415	0,411	0,409	0,407
0,90	0,502	0,460	0,411	0,431	0,424	0,95	0,392	0,390	0,389	0,388	0,387
0,95	0,452	0,412	0,403	0,399	0,395	1,00	0,368	0,368	0,368	0,368	0,368
1,00	0,368	0,368	0,368	0,368	0,368	1,05	0,345	0,347	0,348	0,349	0,350
1,05	0,315	0,329	0,336	0,340	0,342	1,10	0,324	0,326	0,329	0,331	0,333
1,10	0,270	0,292	0,305	0,312	0,318	1,15	0,303	0,308	0,311	0,314	0,317
1,15	0,230	0,264	0,280	0,290	0,298	1,20	0,284	0,290	0,294	0,298	0,301
1,20	0	0,236	0,256	0,268	0,277	1,25	0,266	0,273	0,278	0,283	0,286
1,25	0	0,211	0,233	0,248	0,258	1,30	0,250	0,257	0,263	0,268	0,272
1,30	0	0,188	0,213	0,229	0,241	1,35	0,234	0,242	0,249	0,254	0,259
1,35	0	0	0,194	0,212	0,224	1,40	0,220	0,228	0,235	0,241	0,247
1,40	0	0	0,177	0,196	0,209	1,45	0,206	0,215	0,222	0,229	0,235
1,45	0	0	0,162	0,181	0,195	1,50	0,193	0,202	0,210	0,217	0,223
1,50	0	0	0,146	0,167	0,182						

**Нижняя граница вероятности безотказной работы
для ВСФИ-распределения с известным T**

t/T	Нижняя граница	t/T	Нижняя граница	t/T	Нижняя граница	t/T	Нижняя граница
0,00	1,0000	0,10	0,9043	0,20	0,8155	0,40	0,6488
0,01	0,9900	0,11	0,8952	0,22	0,7983	0,45	0,6080
0,02	0,9801	0,12	0,9961	0,24	0,7813	0,50	0,5671
0,03	0,9704	0,13	0,8771	0,26	0,7644	0,55	0,5258
0,04	0,9607	0,14	0,8681	0,28	0,7476	0,60	0,4839
0,05	0,9511	0,15	0,8592	0,30	0,7310	0,70	0,3964
0,06	0,9416	0,16	0,8504	0,32	0,7144	0,80	0,3005
0,07	0,9322	0,17	0,8416	0,34	0,6979	0,90	0,1865
0,08	0,9228	0,18	0,8329	0,36	0,6815	0,99	0,0341
0,09	0,9136	0,19	0,8242	0,38	0,6651		

Выражения для P представлены в табл. 3.8. Порядок и погрешности приведенных формул $(\lambda t_0)^3$. Через m_k обозначен k -й начальный момент распределения $W(t)$.

Пример 3.1. ЭВМ, характеризуемая пуассоновским потоком сбоев с интенсивностью $\lambda = 0,1 \text{ ч}^{-1}$, предназначена для решения задач, длительность которых является случайной величиной, распределенной по нормальному закону со средним $t_0 = 3 \text{ ч}$ и средним квадратическим $\sigma = 0,5 \text{ ч}$. Требуется найти вероятность того, что сбой не появится за время решения произвольно выбранной задачи.

Таблица 3.8

**Невосстанавливаемый элемент. Вероятность безотказной работы
случайной длительности выполнения задачи**

Распределение	Точное выражение	Приближенное выражение
Экспоненциальное $w(t) = \frac{1}{t_0} e^{-\frac{t}{t_0}}$	$\frac{1}{1 - \lambda t_0}$	$1 - \lambda t_0 + (\lambda t_0)^2$
Нормальное $w(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t_0 - t)^2}{2\sigma^2}}$	$e^{-\lambda t_0 + \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2}}$	$1 - \lambda t_0 + \frac{\lambda^2 (t_0^2 + \sigma^2)}{2}$
Произвольное $W(t)$	$1 - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda^k m_k}{k!}$	$1 - \lambda t_0 + \frac{\lambda^2 (t_0^2 + \sigma^2)}{2}$

Решение. По формуле, приведенной в табл. 3.8 для нормального распределения, находим

$$P = 1 - 0,3 + 0,01 (9 + 0,25)/2 \approx 0,75.$$

Заметим, что если бы длительность решения задачи была постоянной, то

$$P = e^{-0,1 \cdot 3} \approx 0,74.$$

Пример 3.2. Длительность обслуживания требования в системе обработки данных имеет экспоненциальное распределение со средним $a = 3$ ч. При обслуживании происходят сбои с интенсивностью $\lambda = 0,1$ ч⁻¹. Требуется найти вероятность того, что за время обслуживания очередного требования не возникнет сбоя.

Решение. По формуле, приведенной в табл. 3.8 для экспоненциального распределения, находим

$$P = 1/(1 + 0,3) = 0,7693 \approx 0,77.$$

Заметим, что, используя приближенную формулу для произвольного распределения $W(t)$ с учетом $\sigma^2 = a$ для экспоненциального распределения, получаем

$$P \approx 1 - 0,3 + 0,01(9 + 3)/2 \approx 0,76.$$

3.2. ВОССТАНАВЛИВАЕМЫЙ ЭЛЕМЕНТ

3.2.1. Предварительные замечания. Процесс функционирования восстанавливаемого элемента можно описать как последовательность чередующихся интервалов работоспособности и простоя: $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots$

В данном пункте будет рассмотрен случай, когда все ξ_i имеют одно и то же распределение $F(t)$, а все η_i — одно и то же распределение $G(t)$, причем все величины ξ_i и η_i взаимнонезависимы. (Такой случайный процесс называется альтернирующим процессом восстановления.) Этот же процесс функционирования восстанавливаемого элемента удобно описать графом перехода из состояния работоспособности H_0 в состояние отказа H_1 .

3.2.2. Произвольные распределения наработки до отказа и времени восстановления. Значения средней наработки до отказа T и среднего времени восстановления τ находятся стандартным образом на основании известных законов распределения $F(t)$ и $G(t)$ соответственно. Стационарный коэффициент готовности определяется как

$$K = T/(T + \tau). \quad (3.1)$$

Стационарный коэффициент оперативной готовности

$$R(t_0) = \frac{1}{T + \tau} \int_{t_0}^{\infty} P(x) dx. \quad (3.2)$$

Используемое иногда выражение для коэффициента оперативной готовности вида $R(t_0) = KP(t_0)$ является в общем случае неверным. Эта формула справедлива только для экспоненциального распределения наработки до отказа элемента.

Если известно, что распределение наработки между отказами является «стаеющим», то коэффициент оперативной готовности $R(t_0)$ имеет следующие верхнюю и нижнюю границы:

$$K(1 - t_0/T) \leq R(t_0) \leq Ke^{-t_0/T}. \quad (3.3)$$

3.2.3. Экспоненциальные распределения наработки до отказа $F(t)$ и времени восстановления $G(t)$. В табл. 3.9 приведены основные показатели надежности элемента для экспоненциальных законов распределения наработки до отказа $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ и времени восстановления $G(t) = 1 - e^{-\mu t}$. Приближенные значения показателей приведены для условий $\lambda t_0 \ll 1$ и $\gamma = \lambda/\mu \ll 1$. Коэффициенты $K(t)$ и $k(t)$ соответствуют случаю, когда в момент времени $t = 0$

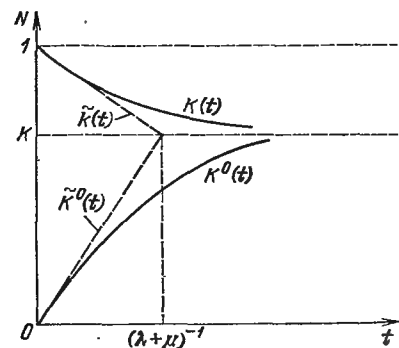


Рис. 3.2. Пояснение формул для коэффициента готовности

Восстанавливаемый элемент. Экспоненциальные законы распределения наработки между отказами $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ и времени восстановления $G(t) = 1 - e^{-\mu t}$

Показатель	Точное значение	Приближенное значение
$P(t_0)$	$e^{-\lambda t_0}$	$1 - \lambda t_0$
$Q(t_0)$	$1 - e^{-\lambda t_0}$	λt_0
T	$\frac{1}{\lambda}$	—
τ	$\frac{1}{\mu}$	—
K	$\frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{T}{T + \tau} = \frac{1}{1 + \gamma}$	$1 - \gamma$
k	$\frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{\tau}{T + \tau} = \frac{\gamma}{1 + \gamma}$	γ
$K(t)$	$K + k e^{-(\lambda + \mu)t}$	$1 - \gamma(1 - e^{-\mu t})$
$K^0(t)$	$K(1 - e^{-(\lambda + \mu)t})$	$(1 - \gamma)(1 - e^{-\mu t})$
$k(t)$	$k(1 - e^{-(\lambda + \mu)t})$	$\gamma(1 - e^{-\mu t})$
$k^0(t)$	$k + K e^{-(\lambda + \mu)t}$	$e^{-\mu t} + \gamma(1 - e^{-\mu t})$
$R(t_0)$	$K e^{-\lambda t_0}$	$1 - \gamma - \lambda t_0$
$R(t, t_0)$	$(K + k e^{-(\lambda + \mu)t}) e^{-\lambda t_0}$	$[1 - (1 - \gamma)e^{-\mu t}](1 - \lambda t_0)$

элемент находится в состоянии работоспособности, коэффициенты $K^0(t)$ и $k^0(t)$ — случаю, когда в момент времени $t = 0$ элемент находится в состоянии отказа. График зависимости коэффициента готовности представлен на рис. 3.2.

3.2.4. Частично контролируемый восстанавливаемый элемент. Рассмотрим функционирование восстанавливаемого элемента, часть которого контролируется лишь периодически. Это означает, что возникший в этой части элемента отказ остается некоторое время необнаруженным. Отказ в контролируемой части элемента обнаруживается мгновенно после возникновения. Восстановление работоспособности элемента продолжается в среднем время τ . Средняя наработка элемента до отказа T , среднее время простоя элемента с учетом пребывания в состоянии необнаруженного отказа τ_c .

В табл. 3.10 приведены формулы для расчета основных показателей надежности. Приближенные формулы справедливы для достаточно надежного элемента, т. е. когда величины γ , приведенные выше, много меньше единицы. В этой таблице введены обозначения $\gamma_0 = t_0/T$, $\gamma = \tau/T$ и $\gamma_v = t_v/T$, где t_v — постоянный период между проверками неконтролируемой части (если эти проверки осуществляются через случайное время, то предполагается, что оно имеет экспоненциальное распределение с параметром ν).

Частично контролируемый восстанавливаемый элемент

Показатель		A_1	A_2	A_3	A_4
τ_c	нижняя оценка	$0,5 t_v \alpha + \tau$	$\frac{\alpha}{v} + \tau$	$0,5 t_v \alpha + \tau$	$\frac{\alpha}{v} + \tau$
	верхняя оценка	$\alpha t_v + \tau$		$t_v \alpha + \tau$	
$P_c(t_0)$		$P(t_0)$	$P(t_0)$	$e^{-\gamma_0}$	$e^{-\gamma_0}$
K	нижняя оценка	$1 - (\alpha \gamma_v + \gamma)$	$1 - (\alpha \gamma_v + \gamma)$	$1 - (\alpha \gamma_v + \gamma)$	$1 - (\alpha \gamma_v + \gamma)$
	верхняя оценка	$1 - (0,5 \alpha \gamma_v + \gamma)$		$1 - (0,5 \alpha \gamma_v + \gamma)$	
$R(t_0)$	нижняя оценка	$(1 - \gamma_0) \times [1 - (\alpha \gamma_v + \gamma)]$	$(1 - \gamma_0) [1 - (\alpha \gamma_v + \gamma)]$	$(1 - \gamma_0) [1 - (\alpha \gamma_v + \gamma)]$	$[1 - (\alpha \gamma_v + \gamma)] e^{-\gamma_0}$
	верхняя оценка	$[1 - (0,5 \alpha \gamma_v + \gamma)] e^{-\gamma_0}$	$[1 - (0,5 \alpha \gamma_v + \gamma)] e^{-\gamma_0}$	$[1 - (0,5 \alpha \gamma_v + \gamma)] e^{-\gamma_0}$	

В заголовках таблицы введены условные обозначения: A_1 — произвольное распределение наработки до отказа и периодических проверок неконтролируемой части через случайное время t_v ; A_2 — произвольное распределение наработки до отказа и проверок неконтролируемой части через случайные экспоненциально-распределенные интервалы времени; A_3 и A_4 — случаи, аналогичные соответственно A_1 и A_2 , но для экспоненциального распределения наработки до отказа.

Предполагается, что если отказ возникает, то в неконтролируемой части элемента он может возникнуть с вероятностью α , а в контролируемой — с вероятностью $1 - \alpha$.

Для отдельных показателей надежности приведены верхняя и нижняя оценки, так как произвольное распределение $P(t)$ предполагается «стареющим», т. е. предельными случаями для него являются экспоненциальное и вырожденное распределения.

3.2.5. Восстанавливаемый элемент с регламентными работами.

1. Описание режимов проведения регламентных работ. Рассматривается функционирование элемента, у которого отсутствует непрерывный контроль работоспособности. Проверка состояния элемента и возможные предупредительные замены его осуществляются периодически через время θ . Проведение регламентных работ (если недопустима их отсрочка или прерывание) препятствует нормальному функционированию элемента.

Для удобства изложения результатов введем обозначения для различных режимов работы элемента и проведения регламентных работ.

По режиму работы элемента во время проведения регламентных работ: A_1 — режим, при котором в течение регламентной работы элемент находится в рабочем состоянии, хотя и не выполняет своих оперативных функций;

A_2 — режим, при котором в течение регламентных работ отказ элемента возникнуть не может.

По глубине проведения регламентных работ:

B_1 — во время регламентной работы длительностью Δ_1 производится только контроль работоспособности элемента;

B_2 — во время регламентной работы длительностью Δ_2 производится предупредительная замена элемента;

B_3 — во время каждой регламентной работы производится контроль работоспособности элемента, а предупредительная замена осуществляется только ровно на m -й регламентной работе.

По разновидности режима B_3 :

C_1 — отсчет номера регламентной работы, во время которой должна осуществляться предупредительная замена, ведется от предыдущей предупредительной замены либо от ближайшей аварийной замены;

C_2 — аварийные замены не изменяют заранее предопределенного порядка предупредительных замен.

По выявлению отказов:

D_1 — отказ может быть обнаружен только при проведении регламентной работы;

D_2 — отказ может быть выявлен не только в процессе регламентной работы, но и непосредственно по наблюдаемым характеристикам функционирования через некоторое время после возникновения.

По моменту выявления отказа во время регламентной работы:

E_1 — отказ выявляется в самом начале регламентной работы и устраняется одновременно с проведением регламента;

E_2 — отказ выявляется на некоторой фазе регламентной работы и сразу же начинает устраняться;

E_3 — отказ выявляется в процессе регламентной работы, но начинает устраняться лишь по завершении ее.

По достоверности контроля:

F_1 — абсолютно достоверный контроль работоспособности, выявляющий отказ элемента во время текущей регламентной работы с достоверностью единиц;

F_2 — недостоверный контроль, выявляющий отказ элемента во время каждой текущей регламентной работы с вероятностью $1 - \beta$.

Делается допущение о том, что вероятность обнаружения отказа при каждом цикле контроля постоянна.

В ряде случаев, когда, с одной стороны, выполняемые элементом функции достаточно ответственны, а с другой — элемент большую часть времени проводит в режиме ожидания, допускается или отсрочка проведения регламентной работы, или даже возможность перехода элемента из режима регламентной работы в режим выполнения задачи. Вход в нормальный режим работы может оказаться и невозможным, если регламентная работа находится в такой фазе, что выход из нее неосуществим за допустимое время. Поэтому можно ввести дополнительный показатель $(1 - \gamma)$ — вероятность своевременного выхода из регламентной работы.

В связи с этим будем рассматривать еще такие режимы.

По степени жесткости проведения регламентных работ:

G_1 — регламентные работы являются обязательными и проводятся, невзирая на то, в какой фазе находится выполнение основных функций;

G_2 — регламентные работы допускают отсрочку, если в момент необходимости начала регламентной работы выполняется основная задача.

По возможности выхода из регламентной работы:

H_1 — невозможен выход из регламентной работы в нормальный режим;

H_2 — возможен выход из регламентной работы.

Далее всюду делается предположение, что после завершения предупредительной замены элемент полностью обновляется, а в случае прерывания регла-

Выражения для κ^*

Режимы	H_1	H_2
A_1	$\frac{T - \pi - \zeta - \chi}{T - \zeta - \chi}$	$1 - \left(1 - \frac{T - \pi - \zeta - \chi}{T - \zeta - \chi}\right) (1 - \gamma)$
A_2	$\frac{T - \zeta - \chi}{T - \zeta - \chi + \pi}$	$1 - \left(1 - \frac{T - \zeta - \chi}{T - \zeta - \chi + \pi}\right) (1 - \gamma)$

ментной работы при экстренном выходе в режим рабочего функционирования его характеристики остаются теми же, что и до начала ее проведения.

2. Структура основных показателей надежности. Стационарный коэффициент оперативной готовности в данном случае

$$R(t_0) = K^* P^*(t_0), \quad (3.4)$$

где K^* — стационарная вероятность того, что элемент может в произвольный момент времени успешно начать выполнение задачи; $P^*(t_0)$ — вероятность того, что элемент проработает в течение требуемого интервала времени t_0 , начиная с некоторого случайного момента в стационарном режиме функционирования, до отказа или до наступления регламентной работы, которую по условиям эксплуатации нельзя отсрочить.

Вероятность K^* можно приближенно записать в виде

$$K^* \approx \kappa^* K, \quad (3.5)$$

где K — стационарный коэффициент готовности, равный в данном случае

$$K = T / (T + \zeta + \chi) \quad (3.6)$$

(здесь T — средняя наработка на отказ; ζ — среднее время собственно восстановления; χ — среднее время пребывания в состоянии необнаруженного отказа); κ^* — величина, близкая по смыслу коэффициенту использования. Значения κ^* приведены в табл. 3.11.

Выражения для входящих в табл. 3.11 величин для различных режимов приведены в табл. 3.12—3.14.

Таблица 3.12

Выражения для κ

Режи- мы	D_1	D_2	
		Точное выражение	Приближенное выражение
F_1	0,50	$M \min(\delta, \nu)$	$\left(\frac{1}{\delta} + \frac{2}{\theta}\right)^{-1}$
F_2	$\theta(0,5 + \beta)$	$M \min(\delta, \nu^*)$	$\left[\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\theta(0,5 + \beta)}\right]^{-1}$

Таблица 3.13

Выражения для ζ

Режи- мы	E_1	E_2	E_3
B_1	τ	$0,5\Delta_1 + \tau$	$\Delta_1 + \tau$
B_2	τ	$0,5\Delta_2 + \tau$	$\Delta_2 + \tau$
B_3	τ	$0,5\Delta^* + \tau$	$\Delta^* + \tau$

Выражения для π

Режи- мы	C_1	C_2
B_1	$\frac{T}{\theta} \Delta_1$	$\frac{T}{\theta} \Delta_1$
B_2	$\frac{T}{\theta} \Delta_2$	$\frac{T}{\theta} \Delta_2$
B_3	$\frac{T}{m\theta} \Delta_2 + \frac{(m-1)}{m\theta} \Delta_1$	$\left[\frac{T}{m\theta} \right] \Delta_2 +$ $+ \left(\left[\frac{T}{\theta} \right] - \left[\frac{T}{m\theta} \right] \right) \Delta_1$

Выражения для $P^*(t_0)$

G_1	G_2	
	ниж- няя оценка	Верхняя оценка
$1 - \frac{t_0(T+\theta)}{\theta T}$	$1 - \frac{t_0}{T}$	$e^{-t_0/T}$

В табл. 3.12 v^* — случайная величина с распределением $P\{v^* = \theta(0,5 + k)\} = (1 - \beta)\beta^k$.

Заметим, что в выражениях табл. 3.13 всегда $\Delta_1 < \Delta_2$, так как регламентная работа, включающая в свой состав только контроль работоспособности, всегда занимает меньше време-

ни, чем регламентная работа, включающая предупредительную замену элемента, в которую входит и контроль работоспособности по полной программе. Аналогично аварийная замена не может быть короче предупредительной. Эти обстоятельства учтены при составлении табл. 3.13.

Входящую в табл. 3.13 величину Δ^* можно приближенно вычислять по формуле

$$\Delta^* = \Delta_1(m-1)/m + \Delta_2/m. \quad (3.7)$$

В табл. 3.14 $[x]$ обозначает целую часть x .

Заметим, что для практических расчетов различие в режимах C_1 и C_2 несущественно.

Наконец, приведем выражения для вычисления вероятности $P^*(t_0)$ (табл. 3.15). В табл. 3.15 нижняя и верхняя оценки записаны для ВФИ-распределения наработки до отказа.

Глава 4

СИСТЕМЫ БЕЗ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

4.1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ

4.1.1. Предварительные замечания. При расчетах надежности последовательным называется такое соединение элементов, при котором отказ хотя бы одного из них приводит к отказу всего соединения в целом (рис. 4.1). Последовательное соединение в указанном выше смысле не всегда совпадает с физическим последовательным соединением элементов. (Например, расчет надежности электрической схемы группы параллельно включенных конденсаторов по отношению к отказу типа «короткое замыкание» следует производить, как для последовательного соединения элементов, так как отказ каждого конденсатора приводит к отказу всей группы.)

В дальнейшем, если особо не оговаривается обратное, отказы элементов предполагаются независимыми, т. е. отказ любой группы элементов никак не влияет на вероятностные характеристики остальных элементов. Напомним, что элемент здесь понимается в широком смысле слова — это один из самостоятельных

участков последовательного соединения (такой участок системы может представлять собой, например, соединение резервных элементов).

4.1.2. Система из независимых элементов. Случайная наработка $\theta^{(1)}$ до отказа системы из m последовательно соединенных невосстанавливаемых элементов определяется минимальным значением случайных наработок $\theta_i^{(i)}$ ее элементов, т. е.

Т а б л и ц а 4.1

$$\theta^{(1)} = \min_{1 \leq i \leq m} \theta_i^{(i)}.$$

Если известны распределения наработок до отказа отдельных элементов $P_i(t)$, то тогда для независимых элементов

$$P(t_0) = \prod_{i=1}^m P_i(t_0).$$

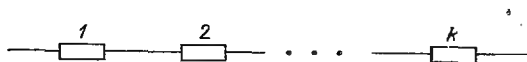


Рис. 4.1. Структурная схема последовательного соединения элементов

Показатели надежности последовательной системы

Показатель	Точное выражение	Приближенное выражение
$P(t_0)$	$e^{-\Lambda t_0}$	$1 - \Lambda t_0$
$Q(t_0)$	$1 - e^{-\Lambda t_0}$	Λt_0
$P(t + t_0)$	$e^{-\Lambda t_0}$	$1 - \Lambda t_0$
$Q(t; t + t_0)$	$1 - e^{-\Lambda t_0}$	Λt_0
T	$1/\Lambda$	—

В общем случае точное значение средней наработки до отказа можно вычислить лишь в виде интеграла

$$T = \int_0^{\infty} P(t) dt,$$

который, как правило, удается взять только численными методами.

4.1.3. Экспоненциальное распределение. В табл. 4.1 приведены основные показатели надежности для системы из последовательно соединенных невосстанавливаемых взаимно независимых элементов, у каждого из которых распределение наработки до отказа является экспоненциальным:

$$P(t_0) = e^{-\lambda_i t_0}.$$

Приближенные выражения для показателей надежности даны при условии, что

$$\Lambda t_0 \ll 1, \quad \text{где } \Lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i.$$

4.1.4. Последовательное соединение зависимых элементов. Предположение о независимости элементов систем на практике часто оказывается неверным. Например, зависимость элементов может проявляться даже следующим образом: на все элементы одновременно оказывает влияние один и тот же внешний воздействующий фактор (температура, вибрация, радиация и т. п.), поэтому все элементы одновременно становятся менее надежными.

Чаще всего элементы являются зависимыми, причем корреляция положительна.

Для последовательного соединения зависимых указанным образом элементов:

$$P(t_0) \geq \prod_{i=1}^m P_i(t); \quad T_1 \geq \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^m P_i(t) dt.$$

Показатели надежности системы из последовательно соединенных
«стареющих» элементов

Показатель	Нижняя граница	Верхняя граница	Интервал, для которого справедлива граница
$P(t)$	$e^{-t} \sum_{i=1}^m \frac{1}{T_i}$	1	$t < T_{(1)}$
	0	$\exp \left\{ -\sum_{i=1}^k \omega_t^{(i)} t \right\}$	$T_{(k)} < t \leq T_{k+1}$
T	$\left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{T_i} \right)^{-1}$	$\min T_i$	для любых T_i

4.1.5. ВФИ-распределение. В табл. 4.2 приведены нижняя и верхняя оценки для некоторых показателей надежности системы, представляющей собой последовательное соединение элементов, имеющих ВФИ-распределение наработки до отказа, причем предполагается, что известны значения средней наработки до отказа каждого элемента T_i . В табл. 4.2 через $T_{(k)}$ обозначена k -я из величин T_i , упорядоченных по возрастанию, т. е.

$$T_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq m} T_i; \quad T_{(2)} = \min_{1 \leq i \leq m} \{T_i | T_i > T_{(1)}\}, \dots$$

Значения $e^{-\omega_t t}$ протабулированы и приведены в табл. 3.4.

Если дополнительно известны дисперсии σ_i^2 для каждого элемента, то верхняя и нижняя границы вероятности безотказной работы последовательной системы $P(t)$ могут быть найдены как произведения соответствующих численных верхних и нижних границ вероятностей безотказной работы элементов, приведенных в табл. 3.5 и 3.6.

Численные значения границ для наработки до отказа T в последнем случае могут быть получены численным интегрированием соответствующих границ вероятности безотказной работы.

4.2. НАГРУЖЕННЫЙ РЕЗЕРВ

4.2.1. Предварительные замечания. Предполагается, что отказы элементов обнаруживаются мгновенно после их возникновения и переключения на резерв осуществляется без прерывания работы системы. При этом считается, что переключатель абсолютно надежен, а индикация отказа достоверна. Кроме того, считается, что при переходе на резервный элемент не возникают какие-либо переходные режимы, нарушающие нормальное функционирование.

4.2.2. Резервирование одного основного элемента. Структурная схема резервной группы, состоящей из одного основного и m нагруженных резервных элементов, представлена на рис. 4.2.

1. Вероятность безотказной работы определяется по формуле

$$P(t_0) = 1 - \prod_{1 \leq i \leq m+1} q_i(t_0), \quad (4.1)$$

где $q_i(t_0)$ — вероятность отказа i -го элемента за время t_0 .

Для экспоненциального распределения наработки элементов до отказа, т. е. для $q_i(t_0) = 1 - e^{-\lambda_i t_0}$, при малых t_0 справедлива следующая простая оценка снизу:

$$\tilde{P}(t_0) \approx 1 - t_0^{m+1} \prod_{1 \leq i \leq m+1} \lambda_i, \quad (4.2)$$

где λ_i — интенсивность отказов i -го элемента. При идентичных элементах, что чаще всего бывает на практике, (4.2) принимает вид

$$\tilde{P}(t_0) \approx 1 - (\lambda t_0)^{m+1} \quad (4.3)$$

(погрешность данной формулы не превышает $\delta = 0,5(m+1)(\lambda t_0)^{m+2}$).

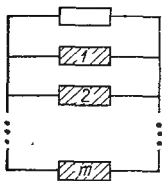


Рис. 4.2. Структурная схема системы из одного основного и m резервных элементов

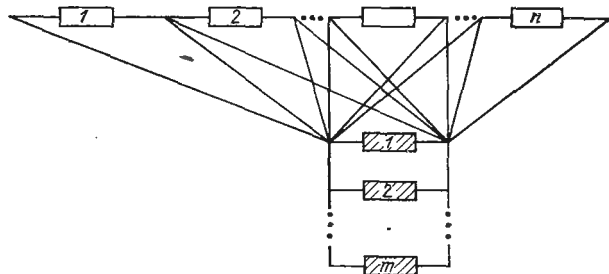


Рис. 4.3. Структурная схема системы из n основных и m резервных элементов

2. Средняя наработка до отказа в общем случае может быть найдена только численным интегрированием по формуле

$$T = \int_0^{\infty} P(t) dt, \quad (4.4)$$

где $P(t)$ определяется из (4.1).

Для идентичных элементов удастся записать компактные формулы: экспоненциальное распределение наработки до отказа каждого элемента $p(t) = \exp(-\lambda t)$

$$T = \lambda^{-1} \sum_{k=1}^{m+1} k^{-1}; \quad (4.5)$$

при большом m можно пользоваться приближенным выражением

$$\tilde{T} \approx \lambda^{-1} [C + \ln(m+1) + (2m+2)^{-1}], \quad (4.6)$$

где $C = 0,577...$ — константа Эйлера;

распределение Гнеденко—Вейбулла для наработки до отказа $p(t) = \exp(-\lambda t^\alpha)$

$$T = \lambda^{-\alpha-1} \Gamma(1+\alpha^{-1}) \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k-1} C_{m+1}^k k^{\alpha-1} \quad (4.7)$$

или для больших m

$$\tilde{T} \approx [\lambda^{-1} \ln(m+1)]^{\alpha-1}; \quad (4.8)$$

идентичные ВФИ-распределения основного и резервных элементов; известно значение квантили $r(T)$:

$$0,56/(m+1) \leq r(T) \leq 1/(m+1). \quad (4.9)$$

4.2.3. Скользящее резервирование. Резервная группа состоит из n основных и m резервных элементов, находящихся в нагруженном режиме (рис. 4.3). Выражения для $P(t_0)$ и T приводятся в табл. 4.3, в которой приняты следующие дополнительные обозначения:

$$P = \prod_{1 \leq i \leq n+m} p_i(t_0); \quad (4.10)$$

p_i — сокращенная запись $p_i(t_0)$; $\tilde{p}_i$ — вероятность безотказной работы i -го элемента для экспоненциального распределения, т. е. $\tilde{p}_i = \exp(-\lambda_i t_0)$; $\tilde{q}_i = 1 - \tilde{p}_i$; $q_{(i)}$ (или $\tilde{q}_{(i)}$) — величины q_i (или $\tilde{q}_i$), упорядоченные в порядке невозрастания, т. е. $q_{(1)} \geq q_{(2)} \geq \dots$ (или $\tilde{q}_{(1)} \geq \tilde{q}_{(2)} \geq \dots$);

$$\gamma_i = [1 - p_i(t_0)]/p_i(t_0) \quad (4.11)$$

($\tilde{\gamma}_i$ получается из γ_i заменой $p_i(t_0)$ на $\tilde{p}_i(t_0)$); $\lambda_{(i)}$ — величины λ_i , упорядоченные в порядке невозрастания, т. е. $\lambda_{(1)} \geq \lambda_{(2)} \geq \dots$;

$$T_{(i)} = (\lambda_{(i)})^{-1}; \quad \Lambda = \sum_{1 \leq i \leq n+m} \lambda_i.$$

Поясним вывод формулы для $P(t_0)$ для разных элементов. Резервная группа работоспособна, если в ней имеется не менее m любых работоспособных элементов. Вероятность этого события

$$P(t_0) = \prod_{i=1}^{m+n} p_i + \sum_{i=1}^{m+n} q_i \prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n+m} p_j + \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{m+n} q_i q_j \prod_{\substack{k=1 \\ (k \neq i, j)}}^{n+m} p_k + \dots \\ \dots + \sum_{g_m \in G_m} \prod_{i \in g_m} q_i \prod_{k \in g_m} p_k, \quad (4.12)$$

где g_m — множество ровно m различных индексов $k \in (1, \dots, n)$; $\bar{g}_m$ — дополнительное множество, т. е. $g_m \cap \bar{g}_m = \emptyset$, $g_m \cup \bar{g}_m = (1, \dots, n)$; G_m — множество всех g_m , т. е. всех различных наборов по m индексов из n (число их, естественно, равно C_{n+m}^m).

Используя введенные выражения для P и γ , получаем выражение, приведенное в табл. 4.3.

Приближенное выражение получается из эквивалентного представления (4.12):

$$P(t_0) \approx 1 - \left(\sum_{g_{m+1} \in G_{m+1}} \prod_{i \in \bar{g}_{m+1}} q_i \prod_{k \in g_{m+1}} p_k + \dots + \prod_{i=1}^{n+m} q_i \right), \quad (4.13)$$

если в нем учесть только первый член в скобках. Приближенное выражение приемлемо при расчетах при выполнении условия

$$\max_{1 \leq i \leq n} q_i \ll 1/(n+m). \quad (4.14)$$

В табл. 4.3 в нескольких случаях не приводятся точные выражения для T . Здесь для получения численных значений следует использовать представление T в виде интеграла от функции $P(t_0)$.

Точное выражение для T в случае различных элементов при экспоненциальном распределении можно получить, используя комбинаторную формулу:

$$T = \frac{1}{\Lambda} + \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\lambda_i}{\Lambda} \frac{1}{\Lambda - \lambda_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\lambda_i \lambda_j}{\Lambda^2} \frac{1}{\Lambda - \lambda_i - \lambda_j} + \dots \quad (4.15)$$

Показатели надежности для системы с нагруженным скользящим резервом

Распределение	Элементы	Показатель	Точное выражение	Приближенное выражение	
				Заниженное значение	Завышенное значение
Произвольное	Разные	$P(t_0)$	$P \left(1 + \sum_{1 \leq i \leq n+m} \gamma_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n+m} \gamma_i \gamma_j + \dots \right. \\ \left. \dots + \sum_{g_m \in G_m} \prod_{k \in g_m} \gamma_k \right)$	$1 - C_{n+m}^{m+1} \prod_{1 \leq i \leq n+m} q_{(i)}$	$1 - C_{n+m}^{m+1} \left((n+m)^{-1} \sum_{1 \leq i \leq n+m} q_i \right)^{m+1}$
		T	Не приводится	$T_{(m)}$	$\sum_{0 \leq k \leq m} \left(\Lambda - \sum_{1 \leq i \leq k} \lambda_{(i)} \right)^{-1}, \lambda_{(0)} = 0$
	Идентичные	$P(t_0)$	$\sum_{0 \leq j \leq m} C_{n+m}^j p^{n+m-j} q^j =$ $= 1 - \sum_{m+1 \leq j \leq n+m} C_{n+m}^j p^{n+m-j} q^j$	$1 - C_{n+m}^{m+1} q^{m+1}$	
		T	Не приводится	$\int_0^\infty P(t_0) dt$	$\lambda^{-1} \sum_{0 \leq j \leq m} (n+m-j)^{-1}$
Экспоненциальное	Разные	$P(t_0)$	$P \left(1 + \sum_{0 \leq i \leq n} \tilde{\gamma}_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \tilde{\gamma}_i \tilde{\gamma}_j + \dots \right. \\ \left. \dots + \sum_{g_m \in G_m} \prod_{k \in g_m} \tilde{\gamma}_k \right)$	$1 - C_{n+m}^{m+1} t_0^{m+1} \prod_{1 \leq i \leq m+1} \lambda_{(i)}$	$1 - C_{n+m}^{m+1} \left((n+m)^{-1} \sum_{1 \leq i \leq n+m} \lambda_i t_0 \right)^{m+1}$
		T	Не приводится	$\sum_{0 \leq k \leq m} \left(\Lambda - k(n+m)^{-1} \times \right. \\ \left. \times \sum_{1 \leq i \leq n+m} \lambda_i \right)^{-1}$	$\sum_{0 \leq k \leq m} \left(\Lambda - \sum_{1 \leq i \leq k} \lambda_{(i)} \right)^{-1}, \lambda_{(0)} = 0$
	Идентичные	$P(t_0)$	$\sum_{0 \leq j \leq m} C_{n+m}^j \tilde{p}^{n+m-j} \tilde{q}^j =$ $= 1 - \sum_{m+1 \leq j \leq n+m} C_{n+m}^j \tilde{p}^{n+m-j} \tilde{q}^j$	$1 - C_{n+m}^{m+1} \tilde{q}^{m+1}$	
		T	$\lambda^{-1} \sum_{0 \leq j \leq m} (n+m-j)^{-1}$	$\ln \frac{n+m}{n} - \frac{m}{n(n+m)}$	

Целесообразнее воспользоваться приближенными оценками, приведенными в табл. 4.3. Заниженная оценка получена на основании того, что $T(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+m})$ является выпуклой вниз функцией своих аргументов. Завышенная приближенная оценка получена в том предположении, что отказавшие элементы оказываются самыми ненадежными. Причем обе эти формулы имеют в своей основе точное выражение для случая идентичных элементов с экспоненциальным распределением.

4.3. НЕНАГРУЖЕННЫЙ РЕЗЕРВ

4.3.1. Предварительные замечания. Предполагаются мгновенное обнаружение отказа и мгновенное подключение резервного элемента на место основного без прерывания нормального функционирования системы (резервной группы). Переключатель предполагается идеальным и абсолютно надежным. Резервные элементы, находящиеся в ненагруженном режиме, не отказывают, и с течением времени их вероятностно-временные характеристики не меняются, т. е. на место отказавшего основного элемента подключается каждый раз совершенно новый резервный элемент со своими начальными характеристиками.

Если указанные предположения неприемлемы для решения конкретной задачи, то следует перейти к рассмотрению восстанавливаемого элемента без резервирования, у которого время восстановления равно времени переключения на резерв, а последний всегда исправен.

Рассматривается только наиболее часто встречающийся на практике случай, когда резервная группа состоит из идентичных элементов.

4.3.2. Резервирование одного основного элемента. Вероятность безотказной работы резервной группы из одного основного и m резервных элементов определяется по рекуррентной формуле

$$P(t_0) = r_{m+1}(t_0) = \int_0^{t_0} r_m(t_0 - x) f(x) dx, \quad (4.16)$$

где $f(x)$ — плотность распределения наработки до отказа, или, иначе,

$$P(t_0) = 1 - F^{*(m+1)}(t_0), \quad (4.17)$$

где $F^{*k}(t)$ — k -кратная свертка распределения $F(t)$:

$$F^{*k}(t) = \int_0^t F^{*(k-1)}(t-x) dF(x) = \int_0^t F(t-x) dF^{*(k-1)}(x). \quad (4.18)$$

Если элементы резервной группы имеют ВФИ-распределение наработки до отказа, то можно воспользоваться соответствующими оценками, приведенными в гл. 3, имея в виду, что дисперсия распределения для резервной группы в $m+1$ раз больше дисперсии распределения для отдельного элемента.

Если дисперсия распределения для каждого элемента неизвестна, но известно, что распределение относится к классу ВФИ, то для F можно взять даже предельный случай, т. е. считать, что F есть экспоненциальное распределение. Тогда для резервной группы коэффициент вариации нужно положить

$$\sigma_\Sigma / T_\Sigma = \sqrt{(m+1)^{-1}}.$$

Для экспоненциального распределения

$$P(t_0) = \sum_{0 \leq k \leq m} \frac{(\lambda t_0)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda t_0}. \quad (4.19)$$

Средняя наработка до отказа

$$T_\Sigma = (m+1) T. \quad (4.20)$$

Показатели надежности для ненагруженного скользящего резервирования

Распределение	Значение показателя	$P(t_0)$	T
Произвольное	Приближенное заниженное завышенное	$1 - (F^*(s+1)(t))^{m+n(1-s)} (F^*(t))^{sn-m}$ $F^*(m+n)(nt_0)$	$\left(1 + \left[\frac{m}{n}\right]\right)T$, где $[x]$ — целая часть числа x $\frac{n+m}{n}T$
Экспоненциальное	Точное	$e^{-n\lambda t_0} \sum_{0 \leq k \leq m+1} \frac{(n\lambda t_0)^k}{k!}$	$\frac{m+1}{n}T$

4.3.3. Скользящее резервирование. Резервная группа состоит из n основных и m резервных элементов, которые находятся в ненагруженном режиме. Все элементы идентичные (наиболее важный для практики случай).

Для произвольного распределения данная задача не решается в обозримой форме. Поэтому в табл. 4.4 приводятся приближенные завышенная и заниженная оценки. Идея получения заниженной оценки вероятности безотказной работы заключается в том, что резервная группа со скользящим резервом заменяется последовательной системой из n элементов, каждому из которых придается свой резерв (резерв распределяется поровну). Завышенная оценка вероятности безотказной работы получается исходя из предположения, что вся полезная наработка элементов резервной группы до момента $(m+1)$ -го отказа распределяется поровну между всеми основными (рабочими) позициями системы.

Оценки для средней наработки до отказа получаются на основании оценок для ВФИ-распределения. В указанных оценках через s обозначена целая часть величины $(m+n)n^{-1}$. Кроме того, как и ранее, F^{*s} — s -кратная свертка, определяемая по рекуррентной формуле

$$F^{*s}(t) = \int_0^t F^{*(s-1)}(t-x) dF(x).$$

4.4. «СХЕМА ГИБЕЛИ» (ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАРАБОТКИ ДО ОТКАЗА)

Резервированная система, распределения наработки до отказа отдельных элементов которой являются экспоненциальными, описывается так называемой «схемой гибели». Пусть система состоит из k рабочих и m резервных элементов и возникающий поток отказов подчиняется следующим условиям:

1. Если к моменту времени t произошел j -й отказ, то независимо от момента возникновения его и всех предыдущих отказов вероятность того, что на бесконечно малом участке $(t, t+\Delta t)$ произойдет следующий $(j+1)$ -й отказ, равна $\Lambda_j \Delta t + o(\Delta t)$, а вероятность того, что на этом участке не произойдет отказа, равна $1 - \Lambda_j \Delta t + o(\Delta t)$.

2. После того как происходит $(m+1)$ -й отказ, невозстанавливаемая система попадает в состояние отказа и никаких изменений в системе в дальнейшем не происходит, а поэтому $\Lambda_{m+1} = 0$.

Система может попасть в конечное число состояний, соответствующих числу отказавших элементов $H_0, H_1, \dots, H_j, \dots, H_m, H_{m+1}$, причем последнее состоя-

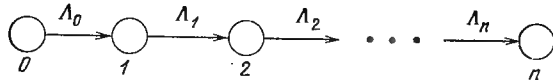


Рис. 4.4. Граф переходов, описывающий «схему гибели»

ние H_{m+1} по условию 2 является состоянием отказа («поглощающим»). Состояние H_j есть такое состояние системы, в котором у нее есть j отказавших элементов.

Граф переходов рассматриваемой системы представлен на рис. 4.4, в соответствии с которым получаем систему дифференциальных уравнений следующего вида:

$$p'_j(t) = \Lambda_{j-1} p_{j-1}(t) - \Lambda_j p_j(t), \quad 0 \leq j \leq n+1; \quad \Lambda_{-1} = \Lambda_{n+1} = 0.$$

Здесь $p_j(t)$ есть вероятность того, что система в момент времени t находится в состоянии H_j . Пусть эти вероятности удовлетворяют начальным условиям:

$$p_0(0) = 1; \quad p_j(0) = 0; \quad 1 \leq j \leq m+1,$$

т. е. система в момент времени t является полностью исправной.

Таблица 4.5

Вероятность безотказной работы системы, поведение которой описывается «схемой гибели»

Показатель	Точное значение	Приближенное значение	Условие приближения
$P(t_0)$	$\prod_{0 \leq j \leq m} \Lambda_j \sum_{0 \leq i \leq m} \frac{e^{-\Lambda_i t_0}}{\Lambda_i \prod_{\substack{0 \leq k \leq m \\ k \neq i}} (\Lambda_k - \Lambda_i)}$	$1 - \frac{t_0^{m+1}}{(m+1)!} \prod_{0 \leq i \leq m} \Lambda_i$	$\max_{1 \leq i \leq m} \Lambda_i t_0 \ll 1$
		$1 - \Phi \left(\frac{t_0 - \sum_{0 \leq i \leq m} \Lambda_i^{-1}}{\sqrt{\sum_{0 \leq i \leq m} \Lambda_i^{-2}}} \right)$	m велико (применима аппроксимация суммы случайных величин нормальной величиной)

Соответствующие выражения для вероятности безотказной работы представлены в табл. 4.5. Выражение для средней наработки до отказа

$$T = \sum_{0 \leq i \leq m} \Lambda_i^{-1}.$$

Если рассматриваемая система состоит из идентичных элементов, то для нагруженного режима работы резервных элементов

$$\Lambda_j = k\lambda + (n-j)\lambda = (N-j)\lambda, \quad 0 \leq j \leq n,$$

где λ — интенсивность отказов одного элемента; $N = k + n$; для облегченного режима

$$\Lambda_j = k\lambda + (n-j)v\lambda, \quad 0 \leq j \leq n,$$

где $v\lambda$ — интенсивность отказов одного резервного элемента; $0 < v < 1$; v — коэффициент нагруженности резерва; для ненагруженного режима

$$\Lambda_j = k\lambda, \quad 0 \leq j \leq n.$$

СИСТЕМЫ С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ

5.1. ОБЩАЯ СХЕМА МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

5.1.1. Принцип составления графа переходов. Аналитические выражения и конструктивные вычислительные схемы для различных показателей надежности восстанавливаемых систем могут быть получены для тех случаев, когда все распределения наработки до отказа и времени восстановления отдельных элементов являются экспоненциальными, т. е. процесс функционирования системы описывается однородным марковским процессом.

Следует заметить, что предположение об экспоненциальности распределений не всегда оправдано. Особенно это относится к распределениям времени восстановления, поскольку предположение о независимости оставшейся длительности ремонта от уже затраченного на ремонт времени довольно неестественно. Однако если в среднем наработка до отказа элементов значительно больше времени ремонта, то многие показатели надежности не зависят от характера распределения времени восстановления.

Если известно словесное описание структуры и принципа функционирования и восстановления работоспособности системы, то можно определить множество всех возможных состояний системы, причем, задав определенный критерий отказа, все состояния можно разделить на два класса: работоспособности и отказа. Если известны интенсивности отказов и восстановления отдельных элементов системы, то можно построить граф переходов, вершинами которого будут возможные состояния системы, а ребрами — возможные переходы с интенсивностями, определяемыми соответствующими характеристиками безотказности и ремонтно-пригодности элементов. Например, если известно, что система находится в некотором состоянии H_i и для перехода ее в состояние H_j необходимо, чтобы произошло определенное событие (отказ или восстановление какого-либо элемента), то от состояния H_i к состоянию H_j проводится стрелка, у которой указывается интенсивность реализации данного события. Заметим, что при построении подобных графов не все события (переходы) могут оказаться разрешенными. Все ограничения на граф переходов в явном виде содержатся в словесном описании принципа функционирования и восстановления системы. На основании построенного графа переходов легко выписать необходимую систему уравнений, решение которых позволит получить требуемый показатель надежности.

5.1.2. Расчет нестационарного коэффициента готовности. Обозначим через E_+ множество состояний работоспособности системы, а через E_- — множество состояний отказа (в соответствии с выбранным критерием отказа). Обозначим через $E(k)$ множество тех состояний, из которых возможен непосредственный переход в некоторое состояние k , а через $e(k)$ — множество состояний, в которые возможен непосредственный переход из данного состояния k .

Для каждого состояния k можно записать следующее дифференциальное уравнение:

$$p'_k(t) = -p_k(t) \sum_{i \in e(k)} \Lambda_{ki} + \sum_{i \in E(k)} \Lambda_{ik}(t), \quad (5.1)$$

где запись $i \in A$ означает, что суммирование ведется по всем таким состояниям i , которые относятся к множеству A . Через Λ_{ij} обозначена интенсивность перехода из состояния i в состояние j , а через $p_i(t)$ — вероятность пребывания системы в состоянии H_i в момент времени t .

Если граф переходов содержит n различных состояний, то в результате может быть составлено n различных дифференциальных уравнений. Для опреде-

ления нестационарного коэффициента готовности взять $n - 1$ уравнение (5.1) и одно дополнительное уравнение вида

$$\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1,$$

а также начальные условия вида $p_i(0) = p_i$, где через $p_i(0)$ обозначена вероятность состояния в момент времени $t = 0$. Если известно, что в момент времени $t = 0$ система находится именно в состоянии H_i , то $p_i(0) = 1$ и $p_j(0) = 0$ для всех остальных состояний $j \neq i$.

Для нахождения искомого показателя надежности к записанной системе дифференциальных уравнений применяется преобразование Лапласа, в результате чего получается система алгебраических уравнений:

$$s\varphi_k(s) - p_k = -\varphi_k(s) \sum_{i \in e(k)} \Lambda_{ki} + \sum_{i \in E(k)} \Lambda_{ik} \varphi_i(s)$$

(для выбранных $n - 1$ уравнений);

$$\sum_{i=1}^n s\varphi_i(s) = 1,$$

где

$$\varphi_i(s) = \int_0^{\infty} p_i(t) e^{-st} dt$$

— преобразование Лапласа для $p_i(t)$.

Эту систему уравнений удобно записать в форме:

$$b_{11}\varphi_1(s) + b_{12}\varphi_2(s) + \dots + b_{1n}\varphi_n(s) = c_1,$$

$$b_{21}\varphi_1(s) + b_{22}\varphi_2(s) + \dots + b_{2n}\varphi_n(s) = c_2,$$

$$b_{n1}\varphi_1(s) + b_{n2}\varphi_2(s) + \dots + b_{nn}\varphi_n(s) = c_n,$$

где b_{ij} — коэффициент при j -м члене в i -й строке; c_i — i -й свободный член.

Данную систему алгебраических уравнений можно решить, используя правило Крамера:

$$\varphi_i(s) = D_i(s)/D(s),$$

где $D(s)$ — определитель системы алгебраических уравнений, а $D_i(s)$ — тот же определитель, в котором i -й столбец заменен на столбец свободных членов.

Далее находим преобразование Лапласа нестационарного коэффициента готовности:

$$\varphi(s) = \sum_{i \in E_+} \varphi_i(s) = \frac{1}{D(s)} \sum_{i \in E_+} D_i(s).$$

Для обращения полученного преобразования Лапласа можно пользоваться следующей простой процедурой:

1. Записываем

$$\varphi(s) = \frac{A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \dots + A_m s^m}{B_0 + B_1 s + B_2 s^2 + \dots + B_{m+1} s^{m+1}}, \quad (5.2)$$

где A_j и B_j — известные коэффициенты.

2. Находим корни полинома:

$$B_0 + B_1 s + B_2 s^2 + \dots + B_{m+1} s^{m+1} = 0.$$

Пусть эти корни равны $b_1, b_2, \dots, b_{m+1}$. Это означает, что

$$B_0 + B_1 s + \dots + B_{m+1} s^{m+1} = \prod_{j=1}^{m+1} (s - b_j).$$

3. Записываем $\varphi(s)$ условно в виде суммы простых дробей:

$$\varphi(s) = \frac{\beta_1}{s - b_1} - \frac{\beta_2}{s - b_2} + \dots + \frac{\beta_{m+1}}{s - b_{m+1}}, \quad (5.3)$$

где β_j — искомые коэффициенты.

4. Перепишем $\varphi(s)$ в приведенном виде:

$$\varphi(s) = \frac{\sum_{j=1}^n \beta_j \prod_{i \neq j} (s - b_i)}{(s - b_1)(s - b_2) \dots (s - b_{m+1})}.$$

Раскрывая все произведения и приводя подобные члены, получаем

$$\varphi(s) = \frac{\varphi_0 + \varphi_1 s + \varphi_2 s^2 + \dots + \varphi_m s^m}{(s - b_1)(s - b_2) \dots (s - b_{m+1})}, \quad (5.4)$$

где φ_i выражены через различные β_j и b_j .

5. Полиномы вида (5.2) и (5.4) равны тогда, и только тогда, когда $A_0 = \varphi_0$, $A_1 = \varphi_1$, $A_2 = \varphi_2$, ..., $A_m = \varphi_m$.

Из этих уравнений определяются искомые коэффициенты β_j .

6. После нахождения β_j к $\varphi(s)$ вида (5.3) применим обратное преобразование Лапласа: из выражения

$$\varphi(s) = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\beta_j}{s - b_j}$$

определим

$$K(t) = \sum_{j=1}^{m+1} \beta_j e^{-b_j t}.$$

Примечание. Если $\varphi(s)$ имеет кратные корни знаменателя, например k равных значений b_j , то (5.3) должно быть записано в виде

$$\varphi(s) = \frac{\beta_1}{s - b_1} + \dots + \frac{\beta_j}{(s - b_j)^k} + \dots + \frac{\beta_{m+1}}{s - b_{m+1}},$$

где k — кратность корня b_j .

К членам вида $\beta_j/(s - b_j)^k$ применяется соответствующее обратное преобразование Лапласа.

5.1.3. Расчет вероятности безотказной работы. При нахождении вероятности безотказной работы необходимо в графе переходов ввести так называемые поглощающие состояния вместо всех состояний отказа. Это в принципе означает, что следует обратить в нуль все интенсивности переходов из любого состояния отказа. При написании дифференциальных уравнений можно лишь соответствующим образом изменить области суммирования.

Для каждого состояния работоспособности k ($k \in G$) можно записать следующее дифференциальное уравнение:

$$p'_k(t) = -p_k(t) \sum_{i \in e(k)} \Lambda_{ki} + \sum_{i \in E_+ \cap E(k)} \Lambda_{ik} p_i(t),$$

где вторая сумма берется по подмножеству тех состояний $E(k)$, которые одновременно принадлежат E_+ .

Если граф переходов содержит m различных состояний работоспособности, в результате может быть составлено m различных дифференциальных уравнений. Все эти уравнения и начальные условия вида $p_i(0) = p_i$ используются для нахождения вероятности безотказной работы.

Для определения искомой характеристики надежности к записанной системе дифференциальных уравнений применяется преобразование Лапласа, в результате чего получается система алгебраических уравнений:

$$s\varphi_k(s) - p_k = -\varphi_k(s) \sum_{i \in e(k)} \Lambda_{ki} + \sum_{i \in E(k) \cap E_+} \Lambda_{ik} \varphi_i(s).$$

Решение этой системы уравнений и определение вероятности безотказной работы осуществляются далее так же, как и для нестационарного коэффициента готовности.

5.1.4. Расчет средней наработки и коэффициента готовности. Если $\varphi(s)$ есть преобразование Лапласа для вероятности безотказной работы, то

$$T = \int_0^{\infty} P(t) dt = \left[\int_0^{\infty} e^{-st} P(t) dt \right]_{s=0} = \varphi(s) |_{s=0}.$$

Таким образом, чтобы найти среднюю наработку до отказа (или между отказами), достаточно решить систему уравнений вида

$$-p_k(0) = \varphi_k(0) \sum_{i \in e(k)} \Lambda_{ki} + \sum_{i \in E(k)} \Lambda_{ik} \varphi_i(0)$$

для всех $k \in G$. (Эта система получается из (5.4) приравниванием $s = 0$.)

Заметим лишь, что для получения средней наработки до отказа необходимо взять в качестве начальных условий $p_i(0) = 1$ и $p_j(0) = 0$ для $j \neq i$, где i — исходное состояние процесса, а для получения средней наработки между отказами (в стационарном режиме) необходимо взять в качестве начальных условий

$$p_i(0) = p_i \left(\sum_{j \in E_+} p_j \right)^{-1}.$$

Пример 5.1. Рассмотрим восстанавливаемую дублированную систему, состоящую из разнонадежных элементов, интенсивности отказов и восстановления которых соответственно равны: $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$. Граф переходов представлен на рис. 5.1, где H_0 — состояние системы, в котором отказавших элементов нет; H_1 (H_2) — состояние системы, в котором первый (второй) элемент является отказавшим; H_{12} — состояния системы, в котором оба элемента отказали.

Обозначая через $p_k(t)$ вероятность пребывания системы в состоянии H_k , получаем две системы дифференциальных уравнений, соответствующих двум случаям.

1. Состояние H_{12} поглощающее:

$$p'_0(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2) p_0(t) + \mu_1 p_1(t) + \mu_2 p_2(t);$$

$$p'_1(t) = \lambda_1 p_0(t) - (\lambda_2 + \mu_1) p_1(t);$$

$$p'_2(t) = \lambda_2 p_0(t) - (\lambda_1 + \mu_2) p_2(t);$$

$$p'_{1,2}(t) = \lambda_2 p_1(t) + \lambda_1 p_2(t).$$

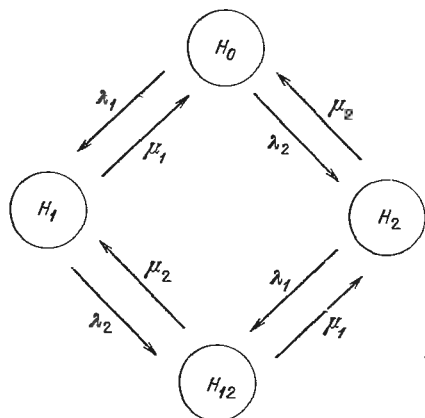


Рис. 5.1. Граф переходов для примера 5.1

2. Состояние H_2 отражающее:

$$\begin{aligned} p'_0(t) &= -(\lambda_1 + \lambda_2) p_0(t) + \mu_1 p_1(t) + \mu_2 p_2(t); \\ p'_1(t) &= \lambda_1 p_0(t) - (\lambda_2 + \mu_1) p_1(t) + \mu_2 p_{12}(t); \\ p'_2(t) &= \lambda_2 p_0(t) - (\lambda_1 + \mu_2) p_2(t) + \mu_1 p_{12}(t); \\ p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) + p_{12}(t) &= 1. \end{aligned}$$

Отсюда выражения для средней наработки между отказами T , до отказа T_0 и коэффициента готовности K :

$$\begin{aligned} T &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -(\lambda_1 + \lambda_2) & \mu_1 & \mu_2 & p_0(0) \\ \lambda_1 & -(\lambda_2 + \mu_1) & 0 & p_1(0) \\ \lambda_2 & 0 & -(\lambda_1 + \mu_2) & p_2(0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -(\lambda_1 + \lambda_2) & \mu_1 & \mu_2 \\ \lambda_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & 0 \\ \lambda_2 & 0 & -(\lambda_1 + \mu_2) \end{vmatrix}}; \\ T_0 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & 0 \\ \lambda_2 & 0 & -(\lambda_1 + \mu_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -(\lambda_1 + \lambda_2) & \mu_1 & \mu_2 \\ \lambda_1 & -(\lambda_2 + \mu_1) & 0 \\ \lambda_2 & 0 & -(\lambda_1 + \mu_2) \end{vmatrix}}; \\ K &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -(\lambda_1 + \lambda_2) & \mu_1 & \mu_2 & 0 \\ \lambda_1 & -(\lambda_2 + \mu_1) & 0 & \mu_2 \\ \lambda_2 & 0 & -(\lambda_1 + \mu_2) & \mu_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -(\lambda_1 + \lambda_2) & \mu_1 & \mu_2 & 0 \\ \lambda_1 & -(\lambda_2 + \mu_1) & 0 & \mu_2 \\ \lambda_2 & 0 & -(\lambda_1 + \mu_2) & \mu_1 \end{vmatrix}}. \end{aligned}$$

5.2. «СХЕМА ГИБЕЛИ И РАЗМНОЖЕНИЯ»

5.2.1. Предварительные замечания. Рассматриваются марковские модели восстанавливаемых систем, т. е. таких систем, для которых случайная длительность пребывания в том или ином состоянии, определяемом состояниями ее элементов, имеет экспоненциальное распределение, причем длительность пребывания в каждом состоянии не зависит от предыстории функционирования этой системы. Более того, обычные резервированные системы с восстановлением описываются так называемой «схемой гибели и размножения», которая может быть представлена строго упорядоченной совокупностью состояний.

В зависимости от того, сколько элементов в системе может восстанавливаться одновременно, различают два основных режима восстановления: 1) ограниченное восстановление, когда в любой момент времени может восстанавливаться не более одного отказавшего элемента; 2) неограниченное восстановление, когда в любой момент времени может восстанавливаться одновременно любое число от-

Последовательная система из n различных восстанавливаемых элементов с интенсивностями отказов λ_i и восстановления μ_i . При отказе система выключается

Показатель	Точное значение	Приближенное значение	Условие приближения
T	$\frac{1}{\Lambda}$	—	—
τ	$\frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^n \gamma_i$	—	—
$P(t_0)$	$e^{-\Lambda t_0}$	$1 - \Lambda t_0$	$\Lambda t_0 \ll 1$
K	$\left(1 + \sum_{i=1}^n \gamma_i\right)^{-1}$	$1 - \sum_{i=1}^n \gamma_i$	$\max_i \gamma_i \ll \frac{1}{n}$
$K(t)$	$K + (1-K) e^{-t(\Lambda + 1/\tau)}$	$1 - \Lambda \tau (1 - e^{-t/\tau})$	$\Lambda \tau \ll 1$
$R(t_0)$	$K e^{-\Lambda t_0}$	$1 - \Lambda (\tau + t_0)$	$\Lambda t_0 \ll 1, \Lambda \tau \ll 1$

казавших элементов. Для нахождения показателей надежности в различных частных случаях, описываемых более сложными графами переходов, следует воспользоваться общим методом нахождения характеристик для марковских процессов с непрерывным временем (см. § 5.1).

При рассмотрении систем с резервированием предполагается, что отказ любого основного элемента обнаруживается сразу же, и замена его работоспособным осуществляется мгновенно. Иными словами, это соответствует ситуации, когда контролирующие и переключающие устройства в системе являются идеальными.

5.2.2. Последовательная система. В табл. 5.1 приведены показатели надежности для такого режима работы, когда при отказе любого элемента система выключается, т. е. новые отказы во время восстановления отказавшего элемента возникнуть не могут. В табл. 5.2 приведены показатели надежности для случая, когда работа элементов системы не зависит от состояния остальных элементов системы (предполагается, что восстановление неограниченное).

В табл. 5.3—5.5 приведены показатели надежности для системы, состоящей из одинаковых элементов. (Эти результаты могут оказаться полезными при ориентировочных расчетах надежности.) Во всех таблицах обозначено $\gamma_i = \lambda_i/\mu_i$ и $\Lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

5.2.3. Общая схема резервирования с восстановлением. Рассматривается система, состоящая из k основных и $n = n_1 + n_2 + n_3$ резервных элементов (рис. 5.2), из которых n_1 элементов находится в нагруженном, n_2 — в облегченном и n_3 — в ненагруженном режимах. В любой момент времени рассматриваемая система считается работоспособной, если не менее k ее элементов из общего числа $N = k + n$ работоспособны. Предполагается следующая схема использования резерва: отказавшие элементы поступают в ремонтные органы, при этом на ме-

Последовательная система из различных восстанавливаемых элементов с интенсивностями отказов λ_i и восстановления μ_i . Восстановление неограниченное. При отказе система не выключается

Показатель	Точное значение	Приближенное значение	Условие приближения
T	$\frac{1}{\Lambda}$	—	—
τ	$\frac{1}{\Lambda} \left(\prod_{i=1}^n (1 + \gamma_i) - 1 \right)$	$\frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^n \gamma_i$	$\max_i \gamma_i \ll \frac{1}{n}$
$P(t_0)$	$e^{-\Lambda t_0}$	$1 - \Lambda t_0$	$\Lambda t_0 \ll 1$
K	$\prod_{i=1}^n (1 + \gamma_i)^{-1}$	$1 - \sum_{i=1}^n \gamma_i$	$\max_i \gamma_i \ll \frac{1}{n}$
$K(t)$	Не приводится	$1 - \Lambda \tau (1 - e^{-t_0/\tau})$	$\Lambda \tau \ll 1$
$R(t_0)$	$K e^{-\Lambda t_0}$	$1 - \Lambda (\tau + t_0)$	$\Lambda t_0 \ll 1, \Lambda \tau \ll 1$

сто основных элементов подключаются резервные из нагруженного резерва, на их место — резервные элементы из облегченного резерва, а на место последних — элементы из ненагруженного резерва, т. е. исчерпание резерва фактически происходит в обратном порядке: сначала исчерпывается ненагруженный резерв, затем облегченный, а последним — нагруженный. Предположим, что в любой момент времени одновременно в системе может восстанавливаться l отказавших эле-

Таблица 5.3

Последовательная система из n одинаковых восстанавливаемых элементов с интенсивностями отказов λ и восстановления μ . При отказе система выключается

Показатель	Точное значение	Приближенное значение	Условие приближения
T	$1/n\lambda$	—	—
τ	$1/\mu$	—	—
$P(t_0)$	$e^{-n\lambda t_0}$	$1 - n\lambda t_0$	$n\lambda t_0 \ll 1$
K	$(1 + n\gamma)^{-1}$	$1 - n\gamma$	$\gamma \ll 1/n$
$K(t)$	$K + (1 - K) e^{-t(n\lambda + \frac{1}{\tau})}$	$1 - n\lambda \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$	$n\lambda \tau \ll 1$
$R(t_0)$	$K e^{-n\lambda t_0}$	$1 - n\lambda (\tau + t_0)$	$n\lambda t_0 \ll 1, n\lambda \tau \ll 1$

Последовательная система из n одинаковых восстанавливаемых элементов с интенсивностями отказов λ и восстановления μ . При отказе система не выключается. Восстановление неограниченное

Показатель	Точное значение	Приближенное значение	Условие приближения
T	$1/n\tau$	—	—
τ	$\frac{1}{n\lambda} \left[(1+\gamma)^n - 1 \right]$	$\frac{1}{\mu}$	$\gamma \ll \frac{1}{n}$
$P(t_0)$	$e^{-n\lambda t_0}$	$1 - n\lambda t_0$	$n\lambda t_0 \ll 1$
K	$(1+\gamma)^{-n}$	$1 - n\gamma$	$\gamma \ll \frac{1}{n}$
$K(t)$	Не приводятся	$1 - n\lambda \tau (1 - e^{-t/\tau})$	$n\lambda \tau \ll 1$
$R(t_0)$	$K e^{-n\lambda t_0}$	$1 - n\lambda (\tau^* + t_0)$	$\frac{n\lambda t_0}{n\lambda \tau^*} \ll 1$

ментов (где $1 \leq l \leq N$), т.е. в ремонтном органе имеется l обслуживающих (восстанавливающих) приборов.

Функционирование рассматриваемой системы описывается следующим образом. Если в момент времени t система находится в состоянии H_j (состоянии, в котором система имеет j отказавших элементов), то за последующий промежуток времени Δt она с вероятностью $\Lambda \Delta t + o(\Delta t)$ может перейти в состояние H_{j+1} (т.е. в системе откажет еще один из исправных элементов), с вероятностью $M_j \Delta t + o(\Delta t)$ — в состояние H_{j-1} (т.е. будет восстановлен один из j ранее отказавших элементов) и с вероятностью $1 - \Lambda_j \Delta t - M_j \Delta t + o(\Delta t)$ может остаться в состоянии H_j . Все Λ_j, M_j — величины постоянные, имеющие простой физи-

Таблица 5.5

Последовательная система из n одинаковых восстанавливаемых элементов с интенсивностями отказов λ и восстановления μ . При отказе система не выключается. Восстановление ограниченное

Показатель	Точное значение	Приближенное значение	Условия приближения
T	$1/n\lambda$	—	—
τ	$\frac{(n-1)!}{\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{\gamma^i}{(n-i)!}$	$\frac{1}{\mu}$	$\frac{(n-1)\gamma}{\mu} \ll 1$
$P(t_0)$	$e^{-n\lambda t_0}$	$1 - n\lambda t_0$	$n\lambda t_0 \ll 1$
K	$\left[n! \sum_{i=0}^n \frac{\gamma^i}{(n-i)!} \right]^{-1}$	$1 - n\gamma$	$n\gamma \ll 1$
$R(t_0)$	$K e^{-n\lambda t_0}$	$1 - n(\lambda t_0 + \gamma)$	$n(\lambda t_0 + \gamma) \ll 1$

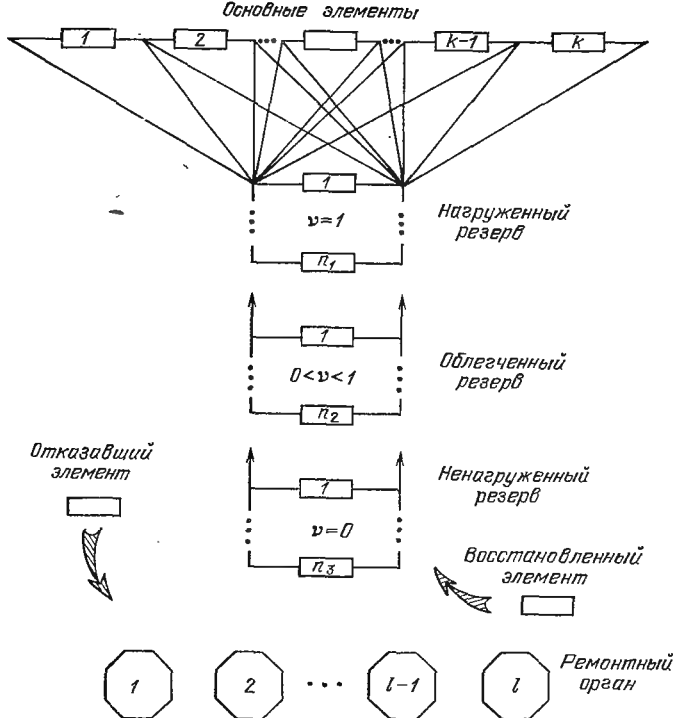


Рис. 5.2. Структурная схема системы (для общего случая)

ческий смысл. Например, для системы, состоящей из *k* резервных, *n*₁ нагруженных резервных, *n*₂ облегченных резервных (с коэффициентом нагруженности *v*, *0* < *v* < 1), *n*₃ ненагруженных резервных элементов, при восстановлении отказавших элементов системы *l* ремонтными органами имеем:

для интенсивностей переходов (отказов) Λ_j , $0 \leq j \leq n = n_1 + n_2 + n_3$:

$$\Lambda_0 = k\lambda + n_1\lambda + n_2v\lambda,$$

$$\Lambda_1 = k\lambda + n_1\lambda + n_2v\lambda = \Lambda_0,$$

.....

$$\Lambda_{n_3} = \Lambda_0,$$

$$\Lambda_{n_3+1} = k\lambda + n_1\lambda + (n_2 - 1)v\lambda,$$

$$\Lambda_{n_3+2} = k\lambda + n_1\lambda + (n_2 - 2)v\lambda,$$

.....

$$\Lambda_{n_3+n_2} = k\lambda + n_1\lambda,$$

$$\Lambda_{n_3+n_2+1} = k\lambda + (n_1 - 1)\lambda,$$

$$\Lambda_{n_3+n_2+2} = k\lambda + (n_2 - 1)\lambda,$$

.....

$$\Lambda_{n_3+n_2+n_1} = k\lambda;$$

для интенсивностей переходов (восстановлений) M_j , $1 \leq j \leq n$:

$$M_1 = \mu, M_2 = 2\mu, \dots, M_l = l\mu, M_{l+1} = l\mu, \dots, M_n = l\mu.$$

Очевидно, в рассматриваемом случае система, имеющая n резервных элементов, может находиться в конечном числе состояний соответственно числу отказавших элементов: $H_0, H_1, H_2, \dots, H_n, H_{n+1}$.

Состояние H_{n+1} , в котором система содержит $n + 1$ отказавших элементов (т. е. отказавшими являются все n резервные и еще один из основных элементов), есть состояние отказа системы. Для данной системы будут рассмотрены две модели, соответствующие задачам, в которых состояние отказа системы является поглощающим и отражающим.

В первом случае рассматривается процесс функционирования системы только до ее отказа, т. е. предполагается, что система, попав в состояние H_{n+1} , уже из него больше не выходит.

Во втором случае система, оказавшись в состоянии H_{n+1} , может вернуться затем в состояние H_n и т. д. (Как уже указывалось, в системе не может быть более $n + 1$ отказавших элементов.)

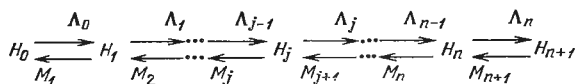


Рис. 5.3. Граф переходов для системы, состоящей из m резервных элементов

В теории надежности первая модель соответствует задачам определения вероятности безотказной работы системы, средней наработки до отказа, а вторая — задачам отыскания нестационарного и стационарного коэффициентов готовности.

Граф переходов системы (для обоих случаев) приведен на рис. 5.3, на котором обозначено: H_j — состояние системы, в котором среди всех ее $N = k + n$ элементов имеется j отказавших, $0 \leq j \leq n + 1$; Λ_j — интенсивность перехода системы (отказа одного из ее исправных элементов) из состояния, в котором в системе было j отказавших элементов, в состояние, в котором в системе будет на один отказавший элемент больше, т. е. $j + 1$ элемент, $0 \leq j \leq n$; M_j — интенсивность перехода системы (восстановления одного из ее отказавших элементов) из состояния, в котором в системе было j отказавших элементов, в состояние, в котором в системе будет на один отказавший элемент меньше, т. е. $j - 1$ элемент, $1 \leq j \leq n + 1$.

Поведение системы, у которой состояние H_{n+1} является поглощающим, описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$p'_j = \Lambda_{j-1} p_{j-1}(t) - (\Lambda_j + M_j) p_j(t) + M_{j+1} p_{j+1}(t), \quad 0 \leq j \leq n + 1; \quad (5.5)$$

$$\Lambda_{-1} = \Lambda_{n+1} = M_0 = M_{n+1} = M_{n+2} = 0, \quad (5.6)$$

где $p_j(t)$ есть вероятность того, что система в момент времени t находится в состоянии H_j , при этом

$$\sum_{j=0}^{n+1} p_j(t) = 1.$$

Поведение системы, у которой состояние H_{n+1} является отражающим, описывается фактически той же системой дифференциальных уравнений (5.5), но при измененных условиях (5.6), а именно $M_{n+1} \neq 0$.

В табл. 5.6 сведены выражения для основных показателей надежности системы (из k рабочих и n резервных элементов), полученные решением приведенных выше дифференциальных уравнений. В таблице использованы следующие верхние индексы: (0) — для случая, когда начальным условием функционирования является состояние полной исправности, (n) — для случая, когда начальным условием функционирования является момент выхода системы из состояния отказа; (R) — для случая, когда в качестве начального состояния рассматривает-

Показатель	Точное значение	Приближенное значение
$P(t_0)$	$\sum_{i=1}^n p_i(0) \prod_{j=i}^n \Lambda_j \sum_{s=1}^{n+1} \frac{\prod_{m=1}^i (x_m^{(i)} - x_s^{(n+1)})}{x_s^{(n+1)} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^{n+1} (x_r^{(n+1)} - x_s^{(n+1)})} e^{-x_s^{(n+1)} t_0}$	$\frac{T}{T(0)} e^{-\frac{t_0}{T(0)}}$
T	$\sum_{j=0}^n \frac{\pi_j(0) \sum_{r=0}^j \Theta_r}{\Lambda_j \Theta_j}$	$\frac{\pi_n(0)}{\Lambda_n \Theta_n}$
$T(0)$	$\sum_{j=0}^n \frac{\sum_{r=0}^j \Theta_r}{\Lambda_j \Theta_j}$	$(\Lambda_n \Theta_n)^{-1}$
$T^{(n)}$	$\left(\sum_{r=1}^n \Theta_r \right) / \Lambda_n \Theta_n$	$(\Lambda_n \Theta_n)^{-1}$
$T^{(R)}$	$\frac{1}{\sum_{s=0}^{n+1} \Theta_s} \sum_{j=0}^n \frac{\left(\sum_{r=0}^j \Theta_r \right)^2}{\Lambda_j \Theta_j}$	$(\Lambda_n \Theta_n)^{-1}$
p_j	$\Theta_j / \sum_{i=0}^{n+1} \Theta_i$	—
K	$\left[1 + \left(\Theta_{n+1} / \sum_{i=0}^n \Theta_i \right) \right]^{-1}$	—
τ	$1/M_{n+1}$	—

сы стационарный режим работы; без верхнего индекса приводятся показатели для произвольных начальных условий. В табл. 5.6 обозначено:

$$\Theta_i = \frac{\Lambda_0 \Lambda_1 \dots \Lambda_{i-1}}{M_1 M_2 \dots M_i}; \quad \Theta_0 = 1;$$

$$x_s^{(m)} = -\chi_s^{(m)}, \quad 1 \leq s \leq m, \quad 0 \leq m \leq n+1,$$

где $\chi_s^{(m)}$ — s -й корень многочлена $\Delta_m(\chi)$, определяемого рекуррентными соотношениями:

$$\Delta_m(\chi) = -(\Lambda_{m-1} + M_{m-1} + \chi) \Delta_{m-1}(\chi) - \Lambda_{m-2} M_{m-1} \Delta_{m-2}(\chi); \quad \Delta_1(\chi) = -(\Lambda_0 + \chi),$$

$$\Delta_0(\chi) = 1; \quad \pi_j(0) = \sum_{s=0}^j p_s(0).$$

При выводе приближенных оценок использовалось следующее основное предположение:

$$\mu = \min_{1 \leq j \leq n+1} \mu_j \gg n \max_{0 \leq j \leq n} \Lambda_j = n\Lambda.$$

Примечание. Если имеется не одно $(n+1)$ -е состояние отказа, но и состояния с номерами $n+2, n+3, \dots, N-1, N$, что соответствует случаю, когда отказавшая система не выключается, то легко понять, что коэффициент готовности системы и среднее время ее восстановления равны

$$K = \sum_{s=0}^n \Theta_s / \sum_{s=0}^N \Theta_s;$$

$$\tau = \frac{1}{\Lambda_n \Theta_n} \sum_{s=n+1}^N \Theta_s.$$

5.2.4. Нагруженный и ненагруженный резервы. Рассматривается система, состоящая из k рабочих и n резервных элементов, которые находятся либо в нагруженном, либо в ненагруженном режиме. Рассматривается два режима восстановления: ограниченное и неограниченное. Все элементы (и основные, и резервные) предполагаются идентичными.

Показатели надежности для этих случаев приведены в табл. 5.7—5.10. В таблицах верхние индексы означают то же, что и в табл. 5.6. (Дублированная система рассматривается отдельно.)

В таблицах 5.7—5.10 использованы следующие обозначения: $N = k + n$; $\gamma = \lambda/\mu$; C_m^r — число сочетаний из m по r ; $\tilde{T}$ — приближенное значение $T^{(0)}$ или $T^{(n)}$.

Т а б л и ц а 5.7

Нагруженный резерв. Неограниченное восстановление

Показатель	Точное значение	Приближенное значение
$T^{(0)}$	$\frac{1}{N\lambda} \sum_{s=0}^n \frac{\sum_{i=0}^s C_n^i \gamma^i}{C_{N-1}^s \gamma^s}$	$\frac{1}{k\lambda C_N^k \gamma^n}$
$T^{(n)}$	$\frac{1}{k\lambda C_N^k \gamma^n} \sum_{i=0}^n C_N^i \gamma^i$	$\frac{1}{k\lambda C_N^k \gamma^n}$
τ	$\frac{1}{(n+1)\mu}$	—
$P^{(0)}(t_0)$	Не приводится	$e^{-t/T}$
K	$\left(1 + \frac{C_N^{n+1} \gamma^{n+1}}{\sum_{i=0}^n C_N^i \gamma^i} \right)^{-1}$	$1 - C_N^{n+1} \gamma^{n+1}$
$R(t_0)$	Не приводится	$KP^{(0)}(t_0)$

Нагруженный резерв. Ограниченное восстановление

Показатель	Точное значение	Приближенное значение
$T^{(0)}$	$\frac{1}{\lambda} \sum_{s=0}^n \sum_{i=0}^s \frac{1}{(i+1)! C_{N-s+i}^{i+1} \gamma^i}$	$\frac{1}{\lambda} \frac{1}{\gamma^n (n+1)! C_N^{n+1}}$
$T^{(n)}$	$\frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^n \frac{1}{(i+1)! C_{k+i}^{i+1} \gamma^i}$	
τ	$\frac{1}{\mu}$	—
$P^{(0)}(t_0)$	Не приводится	$\exp(-t_0/\tilde{T})$
K	$\left[1 + \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i! C_{N-n+i+1}^i \gamma^i} \right)^{-1} \right]^{-1}$	$1 - (n+1)! C_N^{n+1} \gamma^{n+1}$
$R(t_0)$	Не приводится	$KP^{(0)}(t_0)$

Таблица 5.9

Ненагруженный резерв. Неограниченное восстановление

Показатель	Точное значение	Приближенное значение
$T^{(0)}$	$\frac{1}{k\lambda} \sum_{i=0}^n C_{n+1}^{i+1} \frac{i!}{(k\gamma)^i}$	$\frac{1}{k\lambda} \frac{n!}{(k\gamma)^n}$
$T^{(n)}$	$\frac{1}{k\lambda} \sum_{i=0}^n C_n^i \frac{i!}{(k\gamma)^i}$	
τ	$\frac{1}{(1+n)\mu}$	—
$P^{(0)}(t_0)$	—	$e^{-t_0/\tilde{T}}$
K	$\left[1 + \left(\sum_{i=1}^{n+1} C_{n+1}^i \frac{i!}{(k\gamma)^i} \right)^{-1} \right]^{-1}$	$1 - \frac{(k\gamma)^{n+1}}{(1+n)!}$
$R(t_0)$	—	$KP^{(0)}(t_0)$

Ненагруженный резерв. Ограниченное восстановление

Показатель	Точное значение	Приближенное значение
$T^{(0)}$	$\frac{1}{k\lambda} \frac{1 - (k\gamma)^{n+1} [1 + (n+1)(1 - k\gamma)]}{(k\gamma)^n (1 - k\gamma)}$	$\frac{1}{k\lambda} \frac{1}{(k\gamma)^n}$
$T(n)$	$\frac{1}{k\lambda} \frac{1 - (k\gamma)^{n+1}}{(k\gamma)^n (1 - k\gamma)}$	
τ	$\frac{1}{\mu}$	—
$P^{(0)}(t_0)$	Не приводится	$\exp(-t_0/\tilde{T})$
K	$\left[1 + \left(\frac{(k\gamma)^{n+1} (1 - k\gamma)}{1 - (k\gamma)^{n+1}}\right)^{-1}\right]^{-1}$	$1 - (k\gamma)^{n+1}$
$R(t_0)$	Не приводится	$KP^{(0)}(t_0)$

5.3. ВОССТАНАВЛИВАЕМЫЕ РЕЗЕРВИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ РАЗЛИЧНОЙ КРАТНОСТИ С НЕИДЕАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ КОНТРОЛЯ И ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ

5.3.1. Предварительные замечания. В современных сложных изделиях все чаще встречается такое резервирование, когда все факторы, оказывающие наибольшее влияние на надежность резервированной системы, присутствуют одновременно (пренебречь ничем нельзя). Это прежде всего кратность резервирования, параметры переключения на резерв, нагруженность резерва, параметры контроля основных и резервных устройств. Причем эти факторы влияют на надежность системы значительно сильнее, чем λ и μ . В данном разделе приводятся формулы, одновременно учитывающие максимальное (на сегодняшний день) число существенных факторов, еще пригодные для инженерных расчетов без применения ЭВМ.

Во всех случаях при отказе одного основного элемента и наличии исправного резервного с вероятностью κ происходит успешный переход на первый резервный элемент. Вероятность κ имеет следующий смысл. В пп. 5.3.2 и 5.3.3 предполагается, что с вероятностью κ отказ основного элемента обнаруживается, переключатель оказывается исправным и срабатывает достаточно оперативно, причем все переходные процессы заканчиваются за допустимое время. С вероятностью $1 - \kappa$ при переходе имеет место отказ системы (из-за задержки в обнаружении отказа, срабатывании переключателя и т. п.), случайное время существования которого (с момента окончания допустимого времени до окончания переходных процессов) в среднем равно θ (закон распределения продолжительности такого отказа системы не имеет значения при $\theta \ll 1/k\lambda$). В п. 5.3.3 предполагается, что с вероятностью κ отказ основного элемента обнаруживается за допустимое время (параметры переключателя не влияют на значение κ). С вероятностью $1 - \kappa$ происходит отказ системы средней продолжительности τ .

Отказ резервного элемента с вероятностью η обнаруживается мгновенно; с вероятностью $1 - \eta$ обнаружение отказа задерживается на время, распределенное по экспоненциальному закону со средним τ_k . Величины η и τ_k характеризуют два вида контроля резерва: непрерывного неполного контроля с глубиной η и периодического полного со случайным периодом (среднее значение периода конт-

роля τ_k). Если периодический контроль с глубиной $\eta_k < 1$, то все формулы справедливы при увеличении τ_k в $1/\eta_k$ раз.

Распределения наработки между отказами и времени восстановления всех элементов экспоненциальные. Интенсивность отказов элемента в основном режиме λ , в резерве λ_1 ($\lambda_1 \leq \lambda$), интенсивность восстановления μ . Предполагается, что необнаруженный отказ в резервном элементе, наверняка обнаружится при возникновении там же другого отказа, который может быть обнаружен системой контроля. В отказавших элементах во время ремонта новых отказов не возникает; при отказе системы исправные основные элементы не отказывают.

В случае, когда $\theta \ll 1/\mu$, параметр контроля основных элементов κ влияет только на среднюю наработку до отказа T , а не на K ; при этом для практических расчетов можно положить $\tau = 0$.

5.3.2. Система из k основных и одного резервного элемента. Предполагается, что одновременно могут восстанавливаться до m элементов ($m = 1, 2$ определяется числом ремонтных бригад (установок)). Определим показатели надежности такой системы. Для сокращения объема вычислений рекомендуется подставлять в приведенные ниже формулы численные значения $A_1, \dots, A_5$, не раскрывая предварительно выражений для этих коэффициентов:

$$T^{(0)} = T^{(1)} + \kappa / [\mu (1 - \nu + A_1 + A_2)];$$

$$T^{(1)} = (1 + A_1 + A_2) / [k\lambda (1 - \kappa + A_1 + A_2)];$$

$$K = (1 + A_1 + A_2) / [1 + A_1 + A_2 + k(A_3 + A_4 + A_5)];$$

$$\tau = (A_3 + A_4 + A_5) / [\lambda (1 - \kappa + A_1 + A_2)],$$

$$\text{где } A_1 = \frac{k\lambda + \lambda_1}{\lambda}; \quad A_2 = \frac{(1-\eta)\lambda_1\tau_k}{1 + \tau_k(k\lambda + \eta\lambda_1)}; \quad A_3 = \frac{(1-\kappa)\lambda\theta}{1 - \lambda_1\tau};$$

$$A_4 = \frac{[1-\kappa]\lambda A_2 + (1-\eta)\lambda_1 A_3}{\tau_k + \tau + \eta\lambda_1\tau_k\theta}; \quad A_5 = \frac{\lambda A_1 + \lambda A_2 + \lambda_1 A_3}{m\mu}.$$

Характеристики $P(t)$ и R можно вычислять, исходя из того, что распределение наработки между отказами резервированной системы с восстановлением при идеальных параметрах контроля и переключения можно считать экспоненциальным. Однако следует иметь в виду, что в другом предельном случае — при неидеальном контроле резерва — распределение наработки может отличаться от экспоненциального.

В заключение выделим распространенный частный случай: дублированное устройство ($k = 1$) с нагруженным резервом ($\lambda_1 = \lambda$), периодический контроль резерва отсутствует ($\tau_k = \infty$):

$$T^{(1)} = 1 / [\lambda (1 - (1 + \eta)(\kappa/2 - \lambda/\mu))].$$

5.3.3. Система из k основных и n резервных элементов. Предполагается, что все элементы ремонтируются независимо, т. е. восстановление неограниченное. Все резервные элементы занумерованы, при отказе одного из основных элементов он «меняется местами» с тем резервным, который имеет наименьший номер среди всех резервных, не ремонтируемых в данный момент. Считается, что $\tau \ll 1/k\lambda$.

Для сокращения объема вычислений расчетные формулы приводятся в виде рекуррентной процедуры с числом шагов, возрастающим с увеличением числа резервных устройств. Процедура в равной степени пригодна и для ручного счета, и для счета на ЭВМ.

Вычисляются отдельные параметры двух потоков событий, нарушающих работоспособность системы: потока отказов из-за сбоев — неудачного перехода на резерв в случае отказа одного из основных элементов и наличия исправного резерва — и потока устойчивых отказов из-за совпадения отказов более чем n элементов. Соответственно T_0 и T_0 обозначают средние наработки на сбой и на

устойчивый отказ, а τ_c и τ_o — средние продолжительности сбоя и устойчивого отказа. Показатели надежности системы определяются по формулам:

$$T^{(n)} = (1/T_c + 1/T_o)^{-1}; \quad \tau = T^{(n)} (\tau_c/T_c + \tau_o/T_o).$$

Вычислительная процедура содержит начальный (пп. 1—4) и заключительный (пп. 10—11) этапы, а также цикл счета по рекуррентным формулам (пп. 5—9), повторяемый n раз по числу резервных элементов.

1. Вычисляются: $\alpha = 1/\tau_k + \eta\lambda_1$;

$$y_1 = 1/2((\mu + \lambda_1 + \alpha) + \sqrt{(\mu + \lambda_1 + \alpha)^2 - 4\alpha\mu - 4\alpha\lambda_1 - 4(1-\eta)\lambda_1\mu});$$

$$y_2 = 1/2((\mu + \lambda_1 + \alpha) - \sqrt{(\mu + \lambda_1 + \alpha)^2 - 4\alpha\mu - 4\alpha\lambda_1 - 4(1-\eta)\lambda_1\mu});$$

$$\beta_1 = \frac{\mu\alpha}{y_1 y_2}; \quad \beta_2 = \frac{\mu(\alpha + y_1)}{y_1(y_1 - y_2)}; \quad \beta_3 = \frac{\mu(\alpha + y_2)}{y_2(y_2 - y_1)};$$

$$\delta_1 = \frac{(1-\kappa)(1-\eta)\mu\lambda_1}{y_1 y_2}; \quad \delta_2 = \frac{(1-\kappa)(1-\eta)\mu\lambda_1}{y_1(y_1 - y_2)}; \quad \delta_3 = \frac{(1-\kappa)(1-\eta)\mu\lambda_1}{y_2(y_2 - y_1)}.$$

Указанные величины в отдельных, редко встречающихся на практике случаях могут быть комплексными. Это необходимо учитывать при составлении программы, если расчет производится на ЭВМ.

2. Заполняется треугольная таблица $i, j = 0, \dots, n, i + j \leq n$. Числа в таблице $F_{ij}^0 = k\lambda/(k\lambda - iy_2 - jy_1)$.

3. Заполняется массив $G_i^0, i = -1, 0, \dots, n+2; G_{-1}^0 = 0; G_0^0 = \kappa; G_1^0 = 1 - \kappa; G_2^0 = \dots = G_{n+2}^0 = 0$.

4. Делаются присвоения: $\lambda^0 = k\lambda; A^0 = B^0 = 0$ (A, B — вспомогательные счетчики), $l = 1$ (l — вспомогательный счетчик числа итераций).

5. Вычисляются:

$$\varphi^l = 1 - (\beta_1 F_{00}^{l-1} + \beta_2 F_{01}^{l-1} + \beta_3 F_{10}^{l-1});$$

$$\chi^l = \delta_1 F_{00}^{l-1} + \delta_2 F_{01}^{l-1} + \delta_3 F_{10}^{l-1};$$

$$\lambda^l = \varphi^l \lambda^{l-1}; \quad \sigma = \lambda^{l-1} - \lambda^l; \quad \gamma^l = (\varphi^l / \chi^l) \nu.$$

6. Присваивается: $A^l = A^{l-1} + \sigma(1 - G_0^{l-1}); B^l = B^{l-1} + \sigma \sum_{i=1}^n i G_i^{l-1}$.

7. Заполняется массив $G_i^l, i = -1, 0, \dots, n+2; G_{-1}^l = 0;$

$$G_i^l = G_i^{l-1}(1 - \gamma^l) + G_{i-1}^{l-1} \gamma^l, i = 0, \dots, n+2.$$

8. Заполняется треугольная таблица $F_{ij}^l (i, j = 0, \dots, n-l; i + j \leq n-l)$.

$$F_{ij}^l = [F_{ij}^{l-1}(1 - \beta_1) - \beta_2 F_{i,i+1}^{l-1} - \beta_3 F_{i+1,i}^{l-1}] / (1 - \beta_1 F_{ij}^{l-1} - \beta_2 F_{i,i+1}^{l-1} + \beta_3 F_{i+1,i}^{l-1}).$$

9. Присваивается $l = l + 1$. Конец цикла.

10. Вычисляются параметры потока сбоев:

$$T_c = 1/A^n; \quad \tau_c = B^n/A^n.$$

11. Вычисляются параметры потока устойчивых отказов:

$$T_o = 1/\lambda^n; \quad \tau_o = \left[1/(n+1)\mu + \tau \sum_{i=1}^{n+1} i G_i^l \right].$$

5.3.4. Система из k основных и n резервных элементов с ненадежным переключателем. Переключающее устройство представляет собой самостойчивый элемент со своими параметрами отказов, восстановления и контроля $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\eta}, \tilde{\tau}_k, \tilde{\eta}_k)$. При отказе одного из основных элементов переключение на резерв происходит успешно, только если переключающее устройство исправно, в

противоположно, в зависимости от состояния переключателя и происходит отказ системы средней продолжительности $\tau_{\Pi} = 1/\tilde{\mu}$.

В этом случае для расчета T_o , T_c , τ_o , τ_c нужно воспользоваться вычислительной схемой п. 5.3.3 с учетом перечисленных ниже изменений.

Напомним, что v — это вероятность обнаружения неисправности в основном элементе за допустимое время, а τ — средняя продолжительность обнаружения неисправности основного элемента при условии, что эта неисправность не была обнаружена за допустимое время.

В вычислительную схему п. 5.3.3 нужно внести следующие изменения: дополнительно вычислить

$$\tilde{\gamma} = \frac{\tilde{\lambda} [k\lambda + \tilde{\alpha} + (1-\tilde{\eta})\tilde{\mu}]}{k\lambda (\tilde{\lambda} + \tilde{\alpha} + \tilde{\mu} + k\lambda) + \tilde{\lambda}\alpha + \tilde{\alpha}\tilde{\mu} + (1-\tilde{\eta})\tilde{\mu}\tilde{\lambda}},$$

где $\tilde{\alpha} = \tilde{\eta}_K/\tilde{\tau}_K$, если после появления отказа в неконтролируемой части переключателя отказ в контролируемой части не возникает; $\tilde{\alpha} = \tilde{\eta}\tilde{\lambda} + \tilde{\eta}_K/\tilde{\tau}_K$, если после появления отказа в неконтролируемой части переключателя может возникнуть отказ в контролируемой его части;

вычислить среднюю наработкуку системы на отказ переключателя

$$T_{\Pi} = [(k\lambda - 1/T_o - 1/T_c) \tilde{\gamma}]^{-1}.$$

Средняя продолжительность такого отказа системы $\tau_{\Pi} = 1/\tilde{\mu}$.

Показатели надежности системы вычисляются по формулам:

$$T^{(n)} = (1/T_o + 1/T_c + 1/T_{\Pi})^{-1};$$

$$\tau = \left[\frac{1}{T_o} (\tau_o + \tilde{\gamma}\tau_{\Pi}) + \frac{1}{T_c} (\tau_c + \tilde{\gamma}\tau_{\Pi}) + \frac{\tau_{\Pi}}{T_{\Pi}} \right] T^{(n)}.$$

5.4. ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ

5.4.1. Предварительные замечания. Суть приближенного метода вычисления показателей надежности высоконадежных восстанавливаемых систем состоит в следующем. Рассматривается совокупность потоков происходящих в системе отказов отдельных элементов. Проводится анализ всех ситуаций, приводящих к отказу системы в целом. В результате вычисляются интенсивность потока событий данного типа и продолжительность пребывания системы в состоянии отказа по каждой из причин. Затем последовательно применяется процедура суперпозиции потоков тех ситуаций, каждая из которых приводит к отказу системы, или разрежения потоков для тех ситуаций, которые приводят к отказу системы при одновременной реализации. В итоге получается результирующий поток с двумя итоговыми характеристиками: средним временем безотказной работы и средним временем восстановления системы. При условии высокой надежности систем время безотказной работы, как правило, будет экспоненциально распределенным, поэтому этих двух показателей оказывается достаточно для оценки любых других показателей надежности.

Заметим, что экспоненциальность распределений времени работы и времени восстановления отдельных элементов (при условии высокой надежности системы в целом) не предполагается.

Предлагаемый метод удобнее объяснить на типичных ситуациях, а затем проиллюстрировать на конкретном примере системы, точный расчет которой возможен только в предположении марковского характера процесса переходов из состояния в состояние и приводит при этом к крайне громоздким вычислительным процедурам.

5.4.2. Описание типовых состояний отказа системы с восстановлением. Рассмотрим дублированную систему с восстановлением с неидеальными переключателем и системой контроля работоспособности основного и резервного элементов. Остановимся сначала на характеристиках контроля основного элемента.

Интенсивность отказов основного элемента равна λ_1 ; допущение экспоненциального распределения времени работы между отказами элементов для высоконадежной системы не является существенным, поэтому можно положить $\lambda_1 = T_1^{-1}$, где T_1 — среднее время безотказной работы.

Непрерывный контроль работоспособности основного элемента осуществляется лишь для его части, составляющей долю α_2 ($0 \leq \alpha_1 \leq 1$). При отказе, возникающем в контролируемой части основного элемента, начинается осуществление переключения на резерв, если нет информации о том, что резервный элемент находится в состоянии отказа.

При возникновении отказа в неконтролируемой части основного элемента система переходит в состояние скрытого отказа, который может быть обнаружен только при проведении специальных периодических проверок, осуществляемых в среднем через время Δ_1 (постоянное или случайное). Будем считать, что проводимые проверки не обладают абсолютной достоверностью, т. е. с вероятностью ε_1^0 отказ при очередной проверке может быть не обнаружен, а с вероятностью ε_1^1 может возникнуть ложный сигнал о наличии отказа. Вероятность ошибок предполагается независимой от проверки к проверке.

Иногда отказ неконтролируемой части основного элемента обнаруживается только по результатам неправильного функционирования системы через случайное время η . При обнаружении отказа в той части основного элемента, которая не подвергается непрерывному контролю работоспособности, также начинается переключение на резерв, если имеется информация о его исправности.

Резервный элемент функционирует точно так же, но его характеристики $\lambda_2, \alpha_2, \Delta_2, \varepsilon_2^0, \varepsilon_2^1$. Поскольку контролируемые части основного и резервного элементов в общем случае могут не совпадать, будем предполагать, что при подключении резервного элемента со скрытым отказом на место основного этот отказ мгновенно обнаруживается с вероятностью κ .

Будем считать, что устранение отказа и основного, и резервного элементов длится в среднем время τ , а выявление ложного отказа — в среднем время τ^* . Сам ремонт может быть ограниченным или неограниченным, т. е. имеется возможность устранения либо ровно одного отказа, либо всех отказов одновременно.

Остановимся на характеристиках переключающего устройства. (Устройство контроля работоспособности элементов может быть учтено аналогичным образом.) Переключатель может отказать в процессе работы системы, причем его отказ может иметь различные последствия в зависимости от конкретной схемы включения: 1) отказ переключателя сразу же приводит к нарушению функционирования системы; 2) отказ переключателя выявляется мгновенно, и отказ системы возникает лишь при необходимости переключения во время его восстановления; 3) отказ переключателя может произойти в любое время, но проявляется в процессе переключения на резерв; 4) переключатель срабатывает за конечное время, причем если время переключения π превышает некоторое допустимое время π_0 , то считается, что система находится в состоянии отказа в течение времени $\pi - \pi_0$; 5) переключатель может отказать только непосредственно в момент срабатывания с вероятностью ρ . Во всех случаях предполагается, что восстановление работоспособности переключателя занимает в среднем время τ_{π} .

Как следует из приведенного описания, рассматриваемая схема является весьма сложной, часть элементов характеризуется не двумя, как обычно, а тремя состояниями: работоспособность, скрытый отказ и обнаруженный отказ. Однако анализ отказовых ситуаций с помощью дерева отказов в данном случае оказывается достаточно простым.

Решение задачи будем искать в виде двух результирующих параметров системы: средней наработки системы T и среднего времени простоя системы τ , поскольку они достаточны для выражения остальных важных показателей надежности, например коэффициента готовности и коэффициента оперативной готовности.

В дальнейшем для компактности записи будем обозначать случайную величину буквой со знаком тильда, а ее математическое ожидание — той же буквой без тильды. Остаточные величины (время «перескока») будем отмечать звездочкой.

5.4.3. Вычисление интенсивности отказов системы. Некоторые ситуации отказа системы возникают только тогда, когда одновременно наблюдается два или более таких событий, каждое из которых в отдельности не приводит к отказу системы, т. е. только совпадение их во времени приводит к отказу системы. В случае, когда элементы системы и сама система характеризуются относительно высокой надежностью, т. е. когда отказы отдельных элементов системы во времени можно представить в виде последовательности относительно коротких «импульсов отказов», можно применить теорему разрежения потока событий, рассматривая совпадение или несовпадение упомянутых «импульсов отказов». Рассмотрим последовательно типичные ситуации в терминах событий, описанных в п. 5.4.2.

а. Если некоторое событие само по себе однозначно приводит к отказу системы, а интенсивность потока этих событий равна λ , то поток отказов системы именно по этой причине будет

$$\Lambda_a = \lambda.$$

б. Отказ системы возникает при одновременном нахождении в состоянии отказа двух независимых элементов, каждый из которых характеризуется средним временем безотказной работы T_i и средним временем простоя τ_i , $i = 1, 2$. Составляющая общего потока отказов для этого случая

$$\Lambda_b \approx (\tau_1 + \tau_2) (T_1 T_2)^{-1}.$$

в. Отказ системы возникает, если отказ резервного элемента может возникнуть только во время восстановления уже отказавшего основного (например, при ненагруженном резерве второй элемент может отказать только во время простоя первого, так как до этого он вообще не включался). Для этого случая

$$\Lambda_b \approx \tau_1 (T_1 T_2)^{-1}.$$

Заметим, что при ненагруженном резерве имеет смысл всегда в качестве основного использовать элемент с меньшим τ_i . При поочередной работе элементов

$$\Lambda_b = 0,5 (\tau_1 + \tau_2) (T_1 T_2)^{-1}.$$

г. Отказ системы из-за отказа основного элемента возникает в то время, когда резервный находится в состоянии необнаруженного отказа, причем отказ неконтролируемой части $1 - \alpha$ у любого элемента выявляется только по результатам нарушения успешного функционирования системы. В этом случае

$$\Lambda_r = \begin{cases} (1 - \alpha) (2T)^{-1}, & \text{если } \alpha \text{ близко к } 1, \\ (1 - \alpha) T^{-1}, & \text{если } \alpha \text{ близко к } 0. \end{cases}$$

д. То же, что и предыдущий случай, но отказ полностью неконтролируемой части $1 - \alpha$ у любого элемента выявляется либо при отказе системы, либо при отказе контролируемой части того же элемента. Для этого случая

$$\Lambda_d = (1 - \alpha) (\tau + T) T^{-2}.$$

е. То же, что и предыдущий случай, но отказ периодически контролируемой части $1 - \alpha$ резервного элемента еще не выявлен к моменту отказа основного элемента или отказ основного происходит во время восстановления неконтролируемой части. При этом

$$\Lambda_e = (1 - \alpha) (0,5\Delta + \tau) T^{-2}.$$

ж. Происходящее событие приводит к отказу системы лишь с некоторой вероятностью ρ . В этом случае

$$\Lambda_{ж} = \rho T^{-1}.$$

Примеры подобных событий:

переключатель не срабатывает с вероятностью ρ ;

длительность перехода резервного элемента η в рабочий режим при отказе основного элемента превышает допустимое время η_0 , т. е. $\rho = P\{\tilde{\eta} > \eta_0\}$;

ненагруженное дублирование (см. также случай «в»): вероятность отказа резервного элемента за время восстановления основного

$$\rho = \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda_2 t}) dG(t) \approx \lambda_2 \tau_1;$$

ложный отказ из-за недостоверности контроля (параметр потока таких отказов $\Lambda_{ж} = \varepsilon^1 \Delta^{-1}$). Для других ситуаций значения интенсивностей отказов могут быть получены на основании аналогичных рассуждений.

Если отказ системы по каждой i -й причине возникает относительно редко, а продолжительность τ_i каждого из отказов оказывается кратковременной по сравнению с периодом T_i их возникновения, то результирующий поток «импульсов отказов» системы можно характеризовать интенсивностью Λ_{Σ} , вычисляемой по формуле

$$\Lambda_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n (T_i)^{-1}.$$

5.4.4. Вычисление средних длительностей простоя системы. Рассмотрим сначала случаи, когда отказ системы образуется из-за совпадения двух событий. Этот же прием в принципе может быть использован и в случае совпадения большего числа событий. Средняя длительность простоя системы зависит в этом случае от режима работы элементов, от характера восстановления и, наконец, от распределения случайных величин $\tilde{\tau}_1$ и $\tilde{\tau}_2$.

Предварительно введем обозначения: F_1 и F_2 — распределения случайных величин $\tilde{\tau}_1$ и $\tilde{\tau}_2$ соответственно; E — класс экспоненциальных, а D — класс вырожденных распределений (распределений неслучайных величин).

а. Неограниченное восстановление

$$\tau^{(a)} = (\tau_1 + \tau_2)^{-1} [\tau_1 M \min(\tilde{\tau}_1^*, \tilde{\tau}_2) + \tau_2 M \min(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2^*)],$$

где

$$M \min(x^*, y) = \begin{cases} xy(x+y)^{-1}, & \text{если } (F_x, F_y) \in E; \\ x(1 - \exp(-yx^{-1})), & \text{если } F_x \in E, F_y \in D; \\ 0,5xy(0,5x+y)^{-1}, & \text{если } F_x \in D, F_y \in E; \\ 0,5x, & \text{если } x \leq y \text{ и } (F_x, F_y) \in D; \\ \Delta(2\tau - \Delta)(2\tau)^{-1}, & \text{если } x > y \text{ и } (F_x, F_y) \in D. \end{cases}$$

б. Ограниченное восстановление с абсолютным приоритетом первого элемента

$$\tau^{(б)} = \tau_1 (\tau_1^* + \tau_2) (\tau_1 + \tau_2)^{-1}.$$

в. Ограниченное восстановление с дисциплиной обслуживания «первый пришел—первым обслужен»:

$$\tau^{(в)} = \begin{cases} \frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{\tau_1 + \tau_2}, & \text{если } (F_{\tau_1}, F_{\tau_2}) \in E, \\ \frac{\tau_1 \tau_1^* + \tau_2 \tau_2^*}{\tau_1 + \tau_2}, & \text{если } (F_{\tau_1}, F_{\tau_2}) \in D, \\ \frac{\tau_1 \tau_1^* + \tau_2^2}{\tau_1 + \tau_2}, & \text{если } F_{\tau_1} \in D, F_{\tau_2} \in E. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим случаи, когда отказ системы возникает только тогда, когда отказ второго элемента происходит во время простоя первого.

г. Ограниченное восстановление

$$\tau^{(г)} = \tau_1^*.$$

д. Неограниченное восстановление

$$\tau^{(д)} = M \min(\tilde{\tau}_1^*, \tilde{\tau}_2).$$

Если отказ возникает в неконтролируемой части элемента, а проверки проводятся через время Δ , то можно рассмотреть следующие случаи.

е. Достоверный периодический контроль

$$\tau^{(е)} = \begin{cases} 0,5\Delta, & \text{если } F_{\Delta} \in D, \\ \Delta, & \text{если } F_{\Delta} \in E. \end{cases}$$

ж. Недостоверный периодический контроль

$$\tau^{(ж)} = \begin{cases} 0,5\Delta\varepsilon(1-\varepsilon)^{-1}, & \text{если } F \in D, \\ \varepsilon\Delta(1-\varepsilon)^{-1}, & \text{если } F \in E. \end{cases}$$

з. Если отказ элемента обнаруживается через случайное время $\tilde{\zeta}$, причем в течение этого времени и во время восстановления элемента τ система неработоспособна, то средняя длительность простоя

$$\tau^{(з)} = \tilde{\zeta} + \tau.$$

и. Если отказ некоторого элемента сразу приводит к отказу системы, а случайная длительность простоя этого элемента $\tilde{\tau}$, то $\tau^{(и)} = \tau$.

Если рассматривается суммарный поток «импульсов отказов» системы, то вычисление результирующего среднего времени простоя системы может быть проведено по формуле

$$\tau_{\Sigma} = \left[\sum_{i=1}^n T_i^{-1} \right]^{-1} \sum_{i=1}^n \tau_i (T_i)^{-1}.$$

Пример 5.2. Рассмотрим дублированную систему, у которой контроль основного элемента недостоверен. Переключатель в этой системе может отказать, даже если он находится в режиме дежурного ожидания переключения основного элемента на резерв.

Для описанной системы возможными совокупностями событий, приводящих к отказу системы, являются:

отказал основной элемент (событие $\overline{O}$), и к этому времени уже находится в состоянии отказа переключатель (событие $\overline{П}$);

отказал основной элемент, и к этому времени находится в состоянии отказа резервный (событие $\overline{Р}$) при исправном переключателе;

основной элемент отключен из-за ложного срабатывания системы контроля (событие O^*), и к этому времени переключатель находится в состоянии отказа;

Интенсивность отказов и среднее время простоя в примере 5.2

Вид ситуации отказа системы	Интенсивность появления отказа данного вида	Среднее время простоя при отказе данного вида
$\bar{O}\bar{P}$	$\lambda_1 = \lambda \frac{\lambda_{\Pi}}{\lambda_{\Pi} + \mu_{\Pi}}$	$\tau_1 = \frac{\mu_{\Pi}}{(\mu_{\Pi} + \mu)^2} \left(1 + \frac{\mu_p}{\lambda_p + \mu_p} \right)$
$\bar{O}P$	$\lambda_2 = \lambda \frac{\lambda_p}{\lambda_p + \mu_p}$	$\tau_2 = \frac{1}{\mu + \mu_p}$
$O^*\bar{P}$	$\lambda_3 = \alpha v \frac{\lambda_{\Pi}}{\lambda_{\Pi} + \mu_{\Pi}}$	$\tau_3 = \frac{1}{v(1 - \alpha)^{-1} + \mu_{\Pi}}$
O^*P	$\lambda_4 = \alpha v \frac{\lambda_p}{\lambda_p + \mu_p}$	$\tau_4 = \frac{1}{v(1 - \alpha)^{-1} + \mu_p}$

основной элемент отключен из-за ложного срабатывания системы контроля, и к этому времени резервный элемент находится в состоянии отказа при исправном переключателе.

Аналогично можно построить минимальные наборы ситуаций, приводящие к отказу системы в более сложных случаях. При этом целесообразно воспользоваться методами построения «деревьев отказов».

Для конкретности положим, что все времена работы и восстановления основного и резервного элементов и переключателя экспоненциально распределены с параметрами λ , μ , λ_p , μ_p , λ_{Π} , μ_{Π} соответственно. Контроль основного элемента осуществляется через экспоненциальное случайное время с параметром v . Вероятность ошибки при контроле равна α . Для соответствующих событий интенсивности появлений и длительности простоев приведены в табл. 5.11. Особого пояснения требует лишь, пожалуй, вычисление времени простоя. Поясним это на примере ситуации $(\bar{O}, \bar{P})$. Здесь длительность простоя зависит от того, в каком состоянии в момент восстановления переключателя находится резервный элемент: если он работоспособен, то система переходит на него, если же он находится в состоянии отказа, то система перейдет в работоспособное состояние только после того, как будет восстановлен либо основной, либо резервный элемент.

Показатели надежности для рассматриваемой дублированной системы находятся следующим образом:

$$\Lambda_{\Sigma} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4; \quad \tau_{\Sigma} = \Lambda_{\Sigma}^{-1} (\lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2 + \lambda_3 \tau_3 + \lambda_4 \tau_4);$$

$$P(t) \simeq \exp(-\Lambda_{\Sigma} t); \quad K = (1 + \Lambda_{\Sigma} \tau_{\Sigma})^{-1}.$$

Глава 6

ДУБЛИРОВАНИЕ С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ

6.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Дублирование является одним из наиболее часто встречающихся на практике видов резервирования, поэтому результаты для него выделены в отдельную главу. Кроме того, для дублированных систем с восстановлением удастся получить достаточно большое количество результатов в удобной для практического использования форме.

При получении расчетных формул для сложных случаев (учет контрольных и переключения) использовался эвристический метод, дающий приемлемые результаты только для высоконадежных систем.

6.2. ИДЕНТИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Расчетные формулы показателей надежности для дублированной системы из идентичных элементов приведены в табл. 6.1—6.4. Предполагаются идеальный контроль работоспособности, мгновенное и абсолютно надежное переключение на резерв. Приближенные формулы справедливы при выполнении условия $\gamma \ll 1$, где $\gamma = \lambda/\mu$.

Т а б л и ц а 6.1

Нагруженное дублирование при идентичных элементах
и неограниченном восстановлении

Показатель	Точное значение	Приближенное значение
$T(0)$	$\frac{1}{\lambda} \frac{1+3\gamma}{2\gamma}$	$\frac{1}{\lambda} \frac{1}{2\gamma}$
$T(1)$	$\frac{1}{\lambda} \frac{1+2\gamma}{2\gamma}$	$\frac{1}{\lambda} \frac{1}{2\gamma}$
τ	$\frac{1}{2\mu}$	—
$P^{(0)}(t_0)$	$\frac{1}{x_1 - x_2} (x_1 e^{-x_2 t_0} - x_2 e^{-x_1 t_0})$	$e^{-\frac{2\gamma}{1+3\gamma} \lambda t_0}$
$K(t)$	$1 - \frac{2\lambda^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \left[1 - \frac{1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} (\varepsilon_1 e^{-\varepsilon_2 t} - \varepsilon_2 e^{-\varepsilon_1 t}) \right]$	$1 - \gamma^2 \left[1 - \left(2 - e^{-\frac{\lambda t}{\gamma}} \right) e^{-\frac{\lambda t}{\gamma}} \right]$
K	$\frac{1}{1 + \gamma^*}$	$1 - \gamma^2$
$R(t_0)$	$\frac{x_2 (\lambda - x_2) e^{-x_1 t_0} - x_1 (\lambda - x_1) e^{-x_2 t_0}}{\mu (x_1 - x_2) (1 + \gamma)^2}$	$\frac{1}{1 + \gamma^*} e^{-\frac{2\gamma}{1+3\gamma} \lambda t_0}$

Примечание. Обозначения: $x_{1,2} = \frac{\lambda}{2\gamma} (1 + 3\gamma \pm \sqrt{1 + 6\gamma + \gamma^2})$; $\varepsilon_{1,2} = \frac{\lambda}{2\lambda} (1 + \gamma)(3 \pm 1)$;

$$\gamma^* = \frac{\gamma^2}{1 + 2\gamma}.$$

6.3. ЗАВИСИМЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Для повышения надежности наиболее сложных или особо ответственных устройств нередко приходится применять функциональное резервирование, заключающееся в том, что основное (рабочее) устройство резервируется устройством, не аналогичным ему по своей структуре и зачастую работающим даже совсем на дру-

Нагруженное дублирование при идентичных элементах и ограниченном восстановлении

Показатель	Точное значение	Приближенное значение
$T^{(0)}$	$\frac{1}{\lambda} \frac{1+3\gamma}{2\gamma}$	$\frac{1}{\lambda} \frac{1}{2\gamma}$
$T^{(1)}$	$\frac{1}{\lambda} \frac{1+2\gamma}{2\gamma}$	$\frac{1}{\lambda} \frac{1}{2\gamma}$
τ	$\frac{1}{\mu}$	—
$P^{(0)}(t_0)$	$\frac{1}{x_1 - x_2} (x_1 e^{-x_2 t_0} - x_2 e^{-x_1 t_0})$	$e^{-\frac{2\gamma}{1+3\gamma} \lambda t_0}$
$K(t)$	$1 - \frac{2\lambda^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \left[1 - \frac{1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} (\varepsilon_1 e^{-\varepsilon_2 t} - \varepsilon_2 e^{-\varepsilon_1 t}) \right]$	$1 - 2\gamma^2 \left[1 - \left(1 + \left(\frac{\lambda}{\gamma} t \right) e^{-\frac{\lambda}{\gamma} t} \right) \right]$
K	$\frac{1}{1+\gamma^*}$	$1 - 2\gamma^2$
$R(t_0)$	$\frac{x_2 (\lambda - x_2) e^{-x_1 t_0} - x_1 (\lambda - x_1) e^{-x_2 t_0}}{\mu (x_1 - x_2) (1 + 2\gamma + 2\gamma^2)}$	$\frac{1}{1+\gamma^*} e^{-\frac{2\gamma}{1+3\gamma} \lambda t_0}$

Примечание. Обозначения: $x_{1,2} = \frac{\lambda}{2\gamma} [(1+3\gamma) \pm \sqrt{1+6\gamma+\gamma^2}]$; $\varepsilon_{1,2} = \frac{\lambda}{2\gamma} [(2+3\gamma) \pm \sqrt{4\gamma+\gamma^2}]$; $\gamma^* = \frac{2\gamma^2}{1+2\gamma}$.

Т а б л и ц а 6.3

Ненагруженное дублирование при идентичных элементах и неограниченном восстановлении

Показатель	Точное значение	Приближенное значение
$T^{(0)}$	$\frac{1}{\lambda} \left(2 + \frac{1}{\gamma} \right)$	$\frac{1}{\lambda \gamma}$
$T^{(1)}$	$\frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right)$	$\frac{1}{\lambda \gamma}$
τ	$\frac{1}{2\mu}$	—
$P^{(0)}(t_0)$	$\frac{1}{x_1 - x_2} (x_1 e^{-x_2 t_0} - x_2 e^{-x_1 t_0})$	$e^{-\frac{1}{2+1/\gamma} \lambda t_0}$

Показатель	Точное значение	Приближенное значение
$K(t)$	$1 - \frac{\lambda^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \left[1 - \frac{1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} (\varepsilon_1 e^{-\varepsilon_2 t} - \varepsilon_2 e^{-\varepsilon_1 t}) \right]$	$1 - \frac{\gamma^2}{2} \left[1 - \left(2 - \frac{\lambda}{\gamma} t \right) e^{-\frac{\lambda}{\gamma} t} \right]$
K	$\frac{1}{1 + \gamma^*}$	$1 - \frac{\gamma^2}{2}$
$R(t_0)$	$\frac{2 [x_2 (\lambda - x_2) e^{-x_1 t_0} - x_1 (\lambda - x_1) e^{-x_2 t_0}]}{\mu (x_1 - x_2) (2 + 2\gamma + \gamma^2)}$	$\frac{1}{1 + \gamma^*} e^{-\frac{1}{2 + 1/\gamma} \lambda t_0}$

Примечание. Обозначения: $x_{1,2} = \frac{\lambda}{2\gamma} [(1+2\gamma) \pm \sqrt{1+4\gamma}]$; $\varepsilon_{1,2} = \frac{\lambda}{2\gamma} [(3+2\gamma) \pm \sqrt{1+4\gamma}]$; $\gamma^* = \frac{\gamma^2}{2(1+\gamma)}$.

Таблица 6.4

**Ненагруженное дублирование при идентичных элементах
и ограниченном восстановлении**

Показатель	Точное значение	Приближенное значение
$T(0)$	$\frac{1}{\lambda} \left(2 + \frac{1}{\gamma} \right)$	$\frac{1}{\lambda \gamma}$
$T(1)$	$\frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right)$	$\frac{1}{\lambda \gamma}$
τ	$\frac{1}{\mu}$	—
$P(0)(t_0)$	$\frac{1}{x_1 - x_2} (x_1 e^{-x_2 t_0} - x_2 e^{-x_1 t_0})$	$e^{-\frac{1}{2 + 1/\gamma} \lambda t_0}$
$K(t)$	$1 - \frac{\lambda^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \left[1 - \frac{1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} (\varepsilon_1 e^{-\varepsilon_2 t} - \varepsilon_2 e^{-\varepsilon_1 t}) \right]$	$1 - \gamma^2 \left[1 - \left(1 + \frac{\lambda}{\gamma} t \right) \times e^{-\frac{\lambda}{\gamma} t} \right]$
K	$\frac{1}{1 + \gamma^*}$	$1 - \gamma^2$
$R(t_0)$	$\frac{x_2 (\lambda - x_2) e^{-x_1 t_0} - x_1 (\lambda - x_1) e^{-x_2 t_0}}{\mu (x_1 - x_2) (1 + \gamma + \gamma^2)}$	$\frac{1}{1 + \gamma^*} e^{-\frac{1}{2 + 1/\gamma} \lambda t_0}$

Примечание. Обозначения: $x_{1,2} = \frac{\lambda}{2\gamma} [(1+2\gamma) \pm \sqrt{1+4\gamma}]$; $\varepsilon_{1,2} = \frac{\lambda}{\gamma} [(1+\gamma) \pm \sqrt{1+\gamma}]$; $\gamma^* = \frac{\gamma^2}{1+\gamma}$.

гих принципах. Например, электронное устройство может резервироваться механической или оптической системой и т. п.

Такое устройство, резервирующее рабочее устройство только по функциональному назначению, может характеризоваться сильно отличающейся интенсивностью отказов и восстановления, и часто оба устройства зависят друг от друга по нагрузке (входным параметрам), которая в случае отказа одного из них перераспределяется на устройство, оставшиеся исправными.

Для дублированной системы (рис. 6.1) обозначим: $\lambda_1^{(2)}$ ($\lambda_2^{(1)}$) — интенсивность отказов первого (второго) элемента при условии, что второй (первый) уже отказал; $\mu_1^{(2)}$ ($\mu_2^{(1)}$) — интенсивность восстановления первого (второго) элемента при

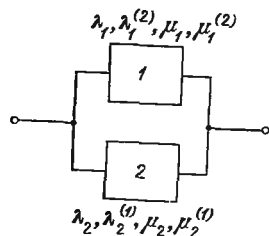


Рис. 6.1. Структурная схема дублированной системы из зависимых элементов с разными показателями надежности

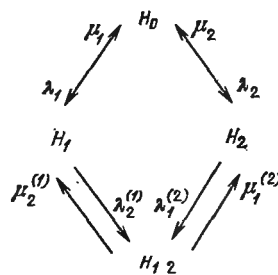


Рис. 6.2. Граф переходов из одного состояния в другое дублированной системы из зависимых элементов с разными показателями надежности

условию, что второй (первый) элемент также уже восстанавливается; λ_1 (λ_2) — интенсивность отказов первого (второго) элемента при условии, что второй (первый) работоспособен; μ_1 (μ_2) — интенсивность восстановления первого (второго) элемента при условии, что второй (первый) работоспособен.

Граф переходов дублированной системы из одного состояния в другое представлен на рис. 6.2, где обозначено: H_0 — состояние системы, в котором отказавших элементов нет; H_1 (H_2) — состояние системы, в котором отказавшим является первый (второй) элемент; H_{12} — состояние отказа системы, в котором отказавшими являются оба элемента.

В табл. 6.5 приводятся точные и приближенные формулы для основных показателей надежности дублированной системы.

Приближенные формулы, приведенные в табл. 6.5, справедливы при выполнении условия

$$\bar{\gamma} = \bar{\lambda}/\mu_- \ll 1/2,$$

где $\bar{\lambda} = \max (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(1)})$; $\mu_- = \min (\mu_1, \mu_2, \mu_1^{(2)}, \mu_2^{(1)})$.

6.4. УЧЕТ КОНТРОЛЯ И ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ

6.4.1. Учет конечного времени переключения. Рассмотрим дублированную систему с абсолютно надежным переключателем, осуществляющим переключение при отказе основного элемента за конечное время $t_{\text{п}}$. Для всех показателей надежности системы приведены приближенные формулы, справедливые для условий: средняя наработка до отказа элементов много больше среднего времени простоя и времени переключения; $T \gg \tau$ и $T \gg t_{\text{п}}$. Ограничений для соотношений τ и $t_{\text{п}}$ не делается.

Заметим, что по существу любой отказ основного элемента приводит к отказу системы и что наличие работоспособного резерва позволяет лишь сократить время восстановления работоспособности системы.

**Дублированная система при зависимых элементах
с разными показателями надежности и неограниченном восстановлении**

Показатель	Точное значение	Приближенное значение
$T^{(0)}$	$\frac{1 + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2}{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2}$	$\frac{\mu_1 \mu_2}{\lambda_2 \lambda_1^{(2)} \mu_1 + \lambda_1 \lambda_2^{(1)} \mu_2}$
$T^{(1)}$	$\frac{\mu_1^{(2)} \psi_1 + \mu_2^{(1)} \psi_2}{(\mu_1^{(2)} + \mu_2^{(1)}) (\alpha_1 \lambda_1 + \lambda_2 \lambda_2)}$	$\frac{\mu_1 \mu_2}{\lambda_2 \lambda_1^{(2)} \mu_1 + \lambda_1 \lambda_2^{(1)} \mu_2}$
$P(t_0)$	Не приводится	$e^{-2\bar{\nu} \bar{\lambda} t_0 / (1 + 3\bar{\nu})}$
τ	$(\mu_1^{(2)} + \mu_2^{(1)})^{-1}$	—
K	$\left(1 + \frac{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2}{\mu_1^{(2)} \psi_1 + \mu_2^{(1)} \psi_2}\right)^{-1}$	$\left[1 + \frac{\lambda_2 \lambda_1^{(2)} \mu_1 + \lambda_1 \lambda_2^{(1)} \mu_2}{\mu_1 \mu_2 (\mu_1^{(2)} + \mu_2^{(1)})}\right]^{-1}$
$R(t_0)$	Не приводится	$\left(1 + \frac{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2}{\mu_1^{(2)} \psi_1 + \mu_2^{(1)} \psi_2}\right)^{-1} e^{-\frac{2\bar{\nu} \bar{\lambda} t_0}{1 + 3\bar{\nu}}}$

Примечание. Обозначения: $\alpha_1 = \frac{\lambda_2^{(1)}}{\lambda_2^{(1)} + \mu_1}$; $\alpha_2 = \frac{\lambda_1^{(2)}}{\lambda_1^{(2)} + \mu_2}$; $\beta_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2^{(1)}}$; $\beta_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1^{(2)}}$;
 $\psi_1 = (1 - \alpha_2) (1 + \alpha_1 \beta_1) + \alpha_2 \beta_2 \left(1 + \alpha_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)$; $\psi_2 = (1 - \alpha_1) (1 + \alpha_2 \beta_2) + \alpha_1 \beta_1 \left(1 + \alpha_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)$.

Т а б л и ц а 6.6

**Нагруженное дублирование с конечным временем переключения
при неограниченном восстановлении**

Показатель	Экспоненциальное распределение	Произвольное распределение $P(t)$	
		Нижняя оценка	Верхняя оценка
T_c	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{T}{2}$
τ_c	$t_n + \gamma \tau$	$t_n + 0,5 \gamma \tau$	$t_n + \gamma \tau$
$P_c(t_0)$	$e^{-\gamma_0}$	$1 - 2\gamma_0$	$e^{-\gamma}$
K	$1 - (\gamma_n + \gamma^2)$	$1 - 2(\gamma + 0,5 \gamma^2)$	$1 - (\gamma_n + \gamma^2)$
$R(t_0)$	$[1 - (\gamma_n + \gamma^2)] e^{-\gamma_0}$	$[1 - (2\gamma_n + \gamma^2)] (1 - \gamma_0)^2$	$[1 - (\gamma_n + \gamma^2)] e^{-\gamma_0}$

**Нагруженное дублирование с конечным временем переключения
при ограниченном восстановлении**

Показатель	Экспоненциальное распределение	Произвольное распределение $P(t)$	
		Нижняя оценка	Верхняя оценка
T_c	$\frac{1}{\lambda}$	$0,5T$	T
τ_c	$t_{\Pi} + 2\gamma\tau$	$t_{\Pi} + 0,5\gamma\tau$	$t_{\Pi} + 2\gamma\tau$
$P_c(t_0)$	$e^{-\gamma_0}$	$1 - 2\gamma_0$	$e^{-\gamma_0}$
K	$1 - (\gamma_{\Pi} + 2\gamma^2)$	$1 - (2\gamma_{\Pi} + \gamma^2)$	$1 - (\gamma_{\Pi} + 2\gamma^2)$
$R(t_0)$	$[1 - (\gamma_{\Pi} + 2\gamma^2)] e^{-\gamma_0}$	$[1 - (2\gamma_{\Pi} + \gamma^2)] (1 - \gamma_0)^2$	$[1 - (\gamma_{\Pi} + 2\gamma^2)] e^{-\gamma_0}$

Формулы для показателей надежности дублированной системы при различных режимах работы и восстановления приведены в табл. 6.6—6.9. Произвольное распределение $P(t)$ предполагается «стареющим». Проведенные в таблицах верхние и нижние оценки справедливы для распределений с возрастающей функцией интенсивности. В таблицах использованы обозначения: $\gamma = \tau/T$; $\gamma_0 = t_0/T$; $\gamma_{\Pi} = t_{\Pi}/T$. Нижний индекс «с» означает соответствующий показатель системы.

6.4.2. Учет надежности переключателя. Рассматривается дублированная система, состоящая из двух идентичных элементов. При отказе основного элемента переключение на резерв происходит с помощью переключателя, который,

Таблица 6.8

**Ненагруженное дублирование с конечным временем переключения
при неограниченном восстановлении**

Показатель	Экспоненциальное распределение	Произвольное распределение $P(t)$	
		Нижняя оценка	Верхняя оценка
T_c	$\frac{1}{\lambda}$	T	T
τ_c	$t_{\Pi} + 0,5\gamma\tau$	$t_{\Pi} + 0,5\gamma\tau$	$t_{\Pi} + 0,5\gamma\tau$
$P_c(t_0)$	$e^{-\gamma_0}$	$P(t_0)$	$P(t_0)$
K	$1 - (\gamma_{\Pi} + 0,5\gamma^2)$	$1 - (\gamma_{\Pi} + 0,5\gamma^2)$	$1 - (\gamma_{\Pi} + 0,5\gamma^2)$
$R(t_0)$	$[1 - (\gamma_{\Pi} + 0,5\gamma^2)] e^{-\gamma_0}$	$[1 - (\gamma_{\Pi} + 0,5\gamma^2)] (1 - \gamma_0)$	$[1 - (\gamma_{\Pi} + 0,5\gamma^2)] e^{-\gamma_0}$

**Нагруженное дублирование с конечным временем переключения
при ограниченном восстановлении**

Показатель	Экспоненциальное распределение	Произвольное распределение $P(t)$	
		Нижняя оценка	Верхняя оценка
T_c	$\frac{1}{\lambda}$	T	T
τ_c	$t_n + \gamma\tau$	$t_n + 0,5\gamma\tau$	$t_n + \gamma\tau$
$P_c(t_0)$	$e^{-\gamma_0}$	$P(t_0)$	$P(t_0)$
K	$1 - (\gamma_n + \gamma^2)$	$1 - (\gamma_n + 0,5\gamma^2)$	$1 - (\gamma_n + \gamma^2)$
$R(t_0)$	$[1 - (\gamma_n + \gamma^2)] e^{-\gamma_0}$	$[1 - (\gamma_n + 0,5\gamma^2)] (1 - \gamma_0)$	$[1 - (\gamma_n + \gamma^2)] e^{-\gamma_0}$

в свою очередь, может отказать либо с течением времени (вероятность безотказной работы переключателя $P_n(t)$), либо только в процессе переключения с вероятностью q .

Когда переключатель отказывает с течением времени, можно рассмотреть две существенно различные схемы:

отказ обнаруживается либо немедленно после его возникновения,

либо только непосредственно в момент переключения, т. е. при отказе основного элемента.

В последнем случае отказ переключателя неизбежно приводит к отказу системы в целом, так как даже при наличии исправного резервного элемента его нельзя подключить для выполнения основных функций.

Все формулы расчета показателей надежности, приведенные в табл. 6.10—6.12, справедливы для следующих условий:

средняя наработка до отказа каждого из двух элементов системы T или переключателя T_n много больше среднего времени восстановления этих устройств: $T \gg \tau$ и $T_n \gg \tau_n$;

все произвольные распределения $P(t)$ и $P_n(t)$ предполагаются «стареющими».

В табл. 6.10 буквой A обозначен случай, когда распределения наработки до отказа элементов и переключателя произвольны, а буквой B — когда оба распределения экспоненциальны. В этих таблицах использованы следующие обозначения: $\gamma = \tau/T$; $\gamma_n = \tau_n/T_n$; $\tilde{\gamma}_n = \tau_n/T$; $\gamma_0 = t_0/T$; $\gamma^* = \tau^*/T$; $Q(\tau) = 1 - P(\tau)$.

6.4.3. Учет полноты контроля. Во многих практических случаях при нагруженном дублировании не удается осуществлять одинаковый контроль основного и резервного элементов. Например, иногда возможен контроль только основного элемента за счет использования функциональных тестов в процессе выполнения рабочих операций, а иногда возможен аппаратный контроль лишь элемента, находящегося в резерве и не выполняющего рабочих функций. Оказывается, что весьма существенно, какой элемент контролируется полностью, а какой частично (так, очень важно осуществлять как можно более полный непрерывный контроль основного элемента), а также режимы резерва и восстановления. В табл. 6.13 приведены средние значения времени простоя дублированной системы τ^* для разных случаев в предположении, что $\gamma \ll 1$.

Дублированная система с ненадежным переключателем, отказывающим с течением времени (обнаружение отказа мгновенное)

Показатель		Нагруженный резерв		Ненагруженный резерв	
		A	B	A	B
T_c		$\frac{T}{2\gamma + \gamma_n}$	$\frac{1}{\lambda(2\gamma + \gamma_n)}$	$\frac{T}{Q(\tau) + \gamma_n}$	$\frac{1}{\lambda(\gamma + \gamma_n)}$
τ_c	нижняя оценка	$\frac{\tau^* \gamma + 0,5\tau_n \gamma_n}{2\gamma + \gamma_n}$	$\frac{\tau^* \gamma + 0,5\tau_n \gamma_n}{2\gamma + \gamma_n}$	$\frac{\tau^* Q(\tau) + 0,5\tau_n \gamma_n}{Q(\tau) + \gamma_n}$	$\frac{\tau^* \gamma + 0,5\tau_n \gamma_n}{\gamma + \gamma_n}$
	верхняя оценка	$\frac{\tau^* \gamma + \tau_n \gamma_n}{2\gamma + \gamma_n}$	$\frac{\tau^* \gamma + \tau_n \gamma_n}{2\gamma + \gamma_n}$	$\frac{\tau^* Q(\tau) + \tau_n \gamma_n}{Q(\tau) + \gamma_n}$	$\frac{\tau^* \gamma + \tau_n \gamma_n}{\gamma + \gamma_n}$
$P_c(t_0)$	нижняя оценка	$1 - \gamma_0(2\gamma + \gamma_n)$	$e^{-\gamma_0(2\gamma + \gamma_n)}$	$e^{-\gamma_0[Q(\tau) + \gamma_n]}$	$e^{-\gamma_0(\gamma + \gamma_n)}$
	верхняя оценка	$e^{-\gamma_0(2\gamma + \gamma_n)}$			
K	нижняя оценка	$1 - (\gamma\gamma^* + \tilde{\gamma}_n \gamma_n)$	$1 - (\gamma\gamma^* + \tilde{\gamma}_n \gamma_n)$	$1 - [\gamma^* Q(\tau) + \tilde{\gamma}_n \gamma_n]$	$1 - (\gamma^* \gamma + \tilde{\gamma}_n \gamma_n)$
	верхняя оценка	$1 - (\gamma\gamma^* + 0,5\tilde{\gamma}_n \gamma_n)$	$1 - (\gamma\gamma^* + 0,5\tilde{\gamma}_n \gamma_n)$	$1 - [\gamma^* Q(\tau) + 0,5\tilde{\gamma}_n \gamma_n]$	$1 - (\gamma^* \gamma + 0,5\tilde{\gamma}_n \gamma_n)$
$R(t_0)$	нижняя оценка	$[1 - \gamma_0(2\gamma + \gamma_n)] \times [1 - (\gamma\gamma^* + \tilde{\gamma}_n \gamma_n)]$	$[1 - (\gamma\gamma^* + \tilde{\gamma}_n \gamma_n)] \times e^{-\gamma_0(2\gamma + \gamma_n)}$	$\{1 - [\gamma^* Q(\tau) + \tilde{\gamma}_n \gamma_n]\} \times e^{-\gamma_0[Q(\tau) + \gamma_n]}$	$[1 - (\gamma^* \gamma + \tilde{\gamma}_n \gamma_n)] e^{-\gamma_0(\gamma + \gamma_n)}$
	верхняя оценка	$[1 - (\gamma\gamma^* + 0,5\tilde{\gamma}_n \gamma_n)] \times e^{-\gamma_0(2\gamma + \gamma_n)}$	$[1 - (\gamma\gamma^* + 0,5\tilde{\gamma}_n \gamma_n)] \times e^{-\gamma_0(2\gamma + \gamma_n)}$	$\{1 - [\gamma^* Q(\tau) + 0,5\tilde{\gamma}_n \gamma_n]\} \times e^{-\gamma_0[Q(\tau) + \gamma_n]}$	$[1 - (\gamma^* \gamma + 0,5\tilde{\gamma}_n \gamma_n)] \times e^{-\gamma_0(\gamma + \gamma_n)}$

Дублированная система с ненадежным переключателем, отказывающим с течением времени (обнаружение отказа в момент переключения)

Показатель		Нагруженный резерв		Ненагруженный резерв	
		A	B	A	B
T_c	нижняя оценка	$T_H = \left(\frac{-2\gamma \frac{T_H}{T}}{1 - e^{-2\gamma \frac{T_H}{T}}} \right) T_H$	$\frac{1}{\lambda_H + 2\gamma\lambda}$	$\left(\frac{-\gamma \frac{T_H}{T}}{1 - e^{-\gamma \frac{T_H}{T}}} \right) T_H^*$	$\frac{1}{\lambda_H + \gamma\lambda}$
	верхняя оценка	$T_B = \frac{TT_H}{T + 2\gamma T_H}$		$\frac{TT_H}{T + \gamma T_H}$	
τ_c	нижняя оценка	$\tau_H = \min \left\{ \left(\frac{-2\gamma \frac{T_H}{T}}{1 - e^{-2\gamma \frac{T_H}{T}}} \right) \tau^* + \right.$ $\left. + \tau_H e^{-2\gamma \frac{T_H}{T}}, \frac{TT_H}{T + 2\gamma T_H} (\gamma_H + 2\gamma\gamma^*) \right\}$	$\frac{2\gamma\gamma^* + \gamma_H}{2\gamma\lambda + \lambda_H}$	$\min \left\{ \left(\frac{-\gamma \frac{T_H}{T}}{1 - e^{-\gamma \frac{T_H}{T}}} \right) \tau^* + \tau_H e^{-\gamma \frac{T_H}{T}}, \right.$ $\left. \frac{TT_H}{T + \gamma T_H} (\gamma_H + \gamma\gamma^*) \right\}$	$\frac{\gamma\gamma^* + \gamma_H}{\gamma\lambda + \lambda_H}$
	верхняя оценка	$\tau_B = \max \left\{ \left(\frac{-2\gamma \frac{T_H}{T}}{1 - e^{-2\gamma \frac{T_H}{T}}} \right) \tau^* + \right.$ $\left. + \tau_H e^{-2\gamma \frac{T_H}{T}}, \frac{TT_H}{T + 2\gamma T_H} (\gamma_H + 2\gamma\gamma^*) \right\}$		$\max \left\{ \left(\frac{-\gamma \frac{T_H}{T}}{1 - e^{-\gamma \frac{T_H}{T}}} \right) \tau^* + \tau_H e^{-\gamma \frac{T_H}{T}}, \right.$ $\left. \frac{TT_H}{T + \gamma T_H} (\gamma_H + \gamma\gamma^*) \right\}$	

Показатель		Нагруженный резерв		Ненагруженный резерв	
		$P(t), P_{\Pi}(t)$	$e^{-\lambda t} e^{-\lambda_{\Pi} t}$	$P(t), P_{\Pi}(t)$	$e^{-\lambda t}, e^{-\lambda_{\Pi} t}$
$P_c(t_0)$	нижняя оценка	$P_{\Pi} = \begin{cases} e^{-\frac{t_0}{T_B}} & \text{при } t_0 < T_{\Pi}, \\ 0 & \text{при } t_0 \geq T_{\Pi} \end{cases}$	$e^{-t_0(\lambda_{\Pi} + 2\gamma\lambda)}$	$P'_{\Pi}(t_0) = \begin{cases} e^{-\frac{t_0}{T_B}} & \text{при } t_0 < T_{\Pi}, \\ 0 & \text{при } t_0 \geq T_{\Pi} \end{cases}$	$e^{-t_0(\lambda_{\Pi} + \gamma\lambda)}$
	верхняя оценка	$P_B = \begin{cases} e^{-2\gamma\gamma_0} & \text{при } t_0 < T_{\Pi}, \\ e^{-\frac{t_0}{T_B}} & \text{при } t_0 \geq T_{\Pi} \end{cases}$		$P'_B(t_0) = \begin{cases} e^{-\gamma\gamma_0} & \text{при } t_0 < T_{\Pi}, \\ e^{-\frac{t_0}{T_B}} & \text{при } t_0 \geq T_{\Pi} \end{cases}$	
K	нижняя оценка	$K_{\Pi} = 1 - \max \left\{ \frac{\tau^*}{T_{\Pi}} + \right. \\ \left. + \gamma_{\Pi} \left(e^{2\gamma \frac{T_{\Pi}}{T}} - 1 \right)^{-1}, \gamma_{\Pi} + 2\gamma\gamma^* \right\}$	$1 - (\gamma_{\Pi} + 2\gamma\gamma^*)$	$K'_{\Pi} = 1 - \max \left\{ \frac{\tau^*}{T_{\Pi}} + \right. \\ \left. + \gamma_{\Pi} \left(e^{\gamma \frac{T_{\Pi}}{T}} - 1 \right)^{-1}, \gamma_{\Pi} + \gamma\gamma^* \right\}$	$1 - (\gamma_{\Pi} + \gamma\gamma^*)$
	верхняя оценка	$K_B = 1 - \min \left\{ \frac{\tau^*}{T_{\Pi}} + \right. \\ \left. + \gamma_{\Pi} \left(e^{2\gamma \frac{T_{\Pi}}{T}} - 1 \right)^{-1}, \gamma_{\Pi} + 2\gamma\gamma^* \right\}$		$K'_B = 1 - \min \left\{ \frac{\tau^*}{T_{\Pi}} + \right. \\ \left. + \gamma_{\Pi} \left(e^{\gamma \frac{T_{\Pi}}{T}} - 1 \right)^{-1}, \gamma_{\Pi} + \gamma\gamma^* \right\}$	
$R(t_0)$	нижняя оценка	$K_{\Pi} P_{\Pi}(t_0)$	$[1 - (\gamma_{\Pi} + 2\gamma\gamma^*)] \times \\ \times e^{-t_0(\lambda_{\Pi} + 2\gamma\lambda)}$	$K_{\Pi}^* P_{\Pi}(t_0)$	$[1 - (\gamma_{\Pi} + \gamma\gamma^*)] \times \\ \times e^{-t_0(\lambda_{\Pi} + \gamma\lambda)}$
	верхняя оценка	$K_B P_B(t_0)$		$K_B^* P'_B(t_0)$	

Дублированная система с ненадежным переключателем, отказывающим при переключении с вероятностью q

Показатель		Нагруженный резерв		Ненагруженный резерв	
		A	B	A	B
T_c	нижняя оценка	$\frac{T}{2(\gamma+q)}$	$\frac{T}{2\gamma+q}$	$\frac{T}{Q(\tau)+q}$	$\frac{T}{\gamma+q}$
	верхняя оценка	$\frac{T}{2\gamma+q}$			
τ_c	нижняя оценка	$\min \left\{ \frac{\gamma\tau^*+q\tau_{\Pi}}{\gamma+q}, \frac{2\gamma\tau^*+q\tau_{\Pi}}{2\gamma+q} \right\}$	$\frac{2\gamma\tau^*+q\tau_{\Pi}}{2\gamma+q}$	$\frac{\tau^*Q(\tau)+\tau_{\Pi}q}{Q(\tau)+q}$	$\frac{\gamma\tau^*+\tau_{\Pi}q}{\gamma+q}$
	верхняя оценка	$\max \left\{ \frac{\gamma\tau^*+q\tau_{\Pi}}{\gamma+q}, \frac{2\gamma\tau^*+q\tau_{\Pi}}{2\gamma+q} \right\}$			
$P_c(t_0)$	нижняя оценка	$e^{-2\gamma_0(\gamma+q)}$	$e^{-\gamma_0(2\gamma+q)}$	$P_H(t_0) = \min \{P(t_0), e^{-\gamma_0[Q(\tau)+q]}\}$	$e^{-\gamma_0(\gamma+q)}$
	верхняя оценка	$e^{-\gamma_0(2\gamma+q)}$		$P_B(t_0) = \max \{P(t_0), e^{-\gamma_0[Q(\tau)+q]}\}$	
K	нижняя оценка	$1-(2\gamma\gamma^*+q\tilde{\gamma}_{\Pi})$	$1-(2\gamma\gamma^*+q\tilde{\gamma}_{\Pi})$	$1-\left(\frac{\tau^*Q(\tau)}{T}+q\tilde{\gamma}_{\Pi}\right)$	$1-(\gamma\gamma^*+q\tilde{\gamma}_{\Pi})$
	верхняя оценка	$1-(2\gamma\gamma^*+q\tilde{\gamma}_{\Pi})$			
$R(t_0)$	нижняя оценка	$[1-2(\gamma\gamma^*+q\tilde{\gamma}_{\Pi})]e^{-2\gamma_0(\gamma+q)}$	$[1-(2\gamma\gamma^*+q\tilde{\gamma}_{\Pi})] \times e^{-\gamma_0(2\gamma+q)}$	$\left[1-\left(\frac{\tau^*Q(\tau)}{T}+q\tilde{\gamma}_{\Pi}\right)\right]e^{-\gamma_0[Q(\tau)+q]}$	$[1-(\gamma\gamma^*+q\tilde{\gamma}_{\Pi})] \times e^{-\gamma_0(\gamma+q)}$
	верхняя оценка	$[1-(2\gamma\gamma^*+q\tilde{\gamma}_{\Pi})]e^{-\gamma_0(2\gamma+q)}$			

Приближенные значения τ^*

Резерв	Распределение времени восстановления	Восстановление	
		ограниченное	неограниченное
Нагруженный	Произвольное	τ	$0,5\tau$ (нижняя оценка); τ (верхняя оценка)
	Экспоненциальное	τ	$0,5\tau$
Ненагруженный	Произвольное	$0,5\tau$	$0,5\tau$ (нижняя оценка); τ (верхняя оценка);
	Экспоненциальное	τ	$0,5\tau$

Всюду предполагается, что переход с отказавшего основного элемента на резервный происходит только с помощью переключателя, т. е. осуществляется резервирование замещением, а не постоянное резервирование, причем переключатель предполагается абсолютно надежным. Отказ в неконтролируемой части основного элемента всегда приводит к отказу системы, так как она остается в состоянии необнаруженного отказа до момента очередной периодической проверки.

Все формулы являются приближенными и справедливы лишь в предположении, что $\gamma \ll 1$, $\gamma_0 \ll 1$, $\gamma^* \ll 1$, $\gamma_v \ll 1$. Средняя наработка до отказа T_c и вероятность безотказной работы $P_c(t)$ приведены для стационарного режима. Нижние и верхние оценки приводятся для случаев, когда соответствующие распределения предполагаются «старейшими».

В табл. 6.14—6.20 использованы следующие обозначения: A — произвольные распределения наработки до отказа основного и резервного элементов, контроль осуществляется через постоянное время t_v ; B — то же, что и случай A , но контроль осуществляется через случайное время, имеющее экспоненциальное распределение с параметром v ; C — элементы имеют экспоненциальное распределение наработки до отказа, контроль осуществляется через постоянное время t_v ; D — то же, что и случай C , но контроль осуществляется через случайное время, имеющее экспоненциальное распределение с параметром v . Через α в таблицах обозначена неконтролируемая часть соответствующих элементов ($\alpha = 1$ означает, что соответствующий элемент полностью не контролируется).

Кроме того, обозначено: в табл. 6.18 $D = 2\gamma + \alpha\gamma_v$, $L^* = 2\gamma + 0,5\alpha\gamma_v$; в табл. 6.19 $N = \alpha + \gamma(2 - \alpha)(1 - \alpha)$; в табл. 6.20 $M = \alpha + (1 - \alpha) \times (2\gamma_v + \gamma)$ и $M^* = \alpha + (1 - \alpha)(\gamma_v + \gamma)$.

6.5. НЕНАГРУЖЕННЫЙ РЕЗЕРВ С ПРОФИЛАКТИКОЙ

6.5.1. Предварительные замечания. Иногда нет возможности брать в качестве резерва элемент, идентичный основному. В этом случае резервный элемент, характеризующийся обычно худшими характеристиками надежности, подключается только на время ремонта основного. Такой способ получил название резервирования с «подхватом».

Характерным примером такой схемы резервирования могут служить многочисленные модификации систем электроснабжения, в которых на время выхода из строя основного элемента, например линии электропередачи, включаются резервные элементы (дизель-генераторы или аккумуляторные батареи). После отключения резервного элемента требуется некоторое время для восстановления его первоначального состояния (например, пополнения запаса топлива или подзарядки батарей и т. п.).

Дублированная система с полностью неконтролируемыми элементами
при одновременных периодических проверках

Показатель		A	B	C	D
T_c	нижняя оценка	$0,5T$	$0,5T$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$
	верхняя оценка	T	T		
τ_c	нижняя оценка	$0,5t_v(1+2\gamma^*)$	$t_v(1+\gamma^*)$	$0,5t_v(1+2\gamma^*)$	$t_v(1+\gamma^*)$
	верхняя оценка	$t_v(1+\gamma^*)$		$t_v(1+\gamma^*)$	
$P_c(t_0)$	нижняя оценка	$1-\gamma_0$	$1-\gamma_0$	$e^{-\gamma_0}$	$e^{-\gamma_0}$
	верхняя оценка	$e^{-\gamma_0}$	$e^{-\gamma_0}$		
K	нижняя оценка	$1-\gamma_v(1+\gamma^*)$	$1-\gamma_v(1+\gamma^*)$	$1-\gamma_v(1+\gamma^*)$	$1-\gamma_v(1+\gamma^*)$
	верхняя оценка	$1-0,5\gamma_v(1+2\gamma^*)$		$1-0,5$	
$R(t_0)$	нижняя оценка	$(1-\gamma_0)^2[1-\gamma_v(1+\gamma^*)]$	$(1-\gamma_0)[1-\gamma_v(1+\gamma^*)]$	$[1-\gamma_v(1+\gamma^*)]e^{-\gamma_0}$	$[1-\gamma_v(1+\gamma^*)]e^{-\gamma_0}$
	верхняя оценка	$[1-0,5\gamma_v(1+2\gamma^*)]e^{-\gamma_0}$	$[1-\gamma_v(1+\gamma^*)]e^{-\gamma_0}$	$[1-0,5\gamma_v(1+2\gamma^*)]e^{-\gamma_0}$	

Дублированная система с полностью неконтролируемыми элементами при независимых периодических проверках

Показатель		A	B	C	D
T_c	нижняя оценка	$0,5T$	$0,5T$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$
	верхняя оценка	T	T		
τ_c	нижняя оценка	$0,5t_v(1+0,5\gamma_v+\gamma^*)$	$t_v(1+\gamma_v+\gamma^*)$	$0,5t_v(1+0,5\gamma_v+\gamma^*)$	$t_v(1+\gamma_v+\gamma^*)$
	верхняя оценка	$t_v(1+\gamma_v+\gamma^*)$		$t_v(1+\gamma_v+\gamma^*)$	
$P_c(t_0)$	нижняя оценка	$1-\gamma_0$	$1-\gamma_0$	$e^{-\gamma_0}$	$e^{-\gamma_0}$
	верхняя оценка	$e^{-\gamma_0}$	$e^{-\gamma_0}$		
K	нижняя оценка	$1-2\gamma_v(1+\gamma_v+\gamma^*)$	$1-2\gamma_v(1+\gamma_v+\gamma^*)$	$1-\gamma_v(1+\gamma_v+\gamma^*)$	$1-\gamma_v(1+\gamma_v+\gamma^*)$
	верхняя оценка	$1-0,5\gamma_v(1+0,5\gamma_v+\gamma^*)$	$1-\gamma_v(1+\gamma_v+\gamma^*)$	$1-0,5\gamma_v(1+0,5\gamma_v+\gamma^*)$	
$R(t_0)$	нижняя оценка	$(1-\gamma_0)^2[1-2\gamma_v(1+\gamma_v+\gamma^*)]$	$(1-\gamma_0)[1-2\gamma_v(1+\gamma_v+\gamma^*)]$	$[1-\gamma_v(1+\gamma_v+\gamma^*)]e^{-\gamma_0}$	$[1-\gamma_v(1+\gamma_v+\gamma^*)]e^{-\gamma_0}$
	верхняя оценка	$[1-0,5\gamma_v(1+0,5\gamma_v+\gamma^*)]e^{-\gamma_0}$	$[1-\gamma_v(1+\gamma_v+\gamma^*)]e^{-\gamma_0}$	$[1-0,5\gamma_v \times (1+0,5\gamma_v+\gamma^*)]e^{-\gamma_0}$	

Дублированная система с полностью неконтролируемым резервным элементом
при периодических проверках

Показатель		A	B	C	D
T_c	нижняя оценка	$\frac{T}{\gamma_v + \gamma}$	$\frac{T}{\gamma_v + \gamma}$	$\frac{1}{\lambda(\gamma_v + \gamma)}$	$\frac{1}{\lambda(\gamma_v + \gamma)}$
	верхняя оценка	$\frac{T}{0,5\gamma_v + \gamma}$		$\frac{T}{0,5\gamma_v + \gamma}$	
T_Σ		τ^*	τ^*	τ^*	τ^*
$P_c(t_0)$	нижняя оценка	$\max\{P(t_0), e^{-\gamma_0(\gamma_v + \gamma)}\}$	$\max\{P(t_0), e^{-\gamma_0(\gamma_v + \gamma)}\}$	$e^{-\gamma_0(\gamma_v + \gamma)}$	$e^{-\gamma_0(\gamma_v + \gamma)}$
	верхняя оценка	$\max\{P(t_0), e^{-\gamma_0(0,5\gamma_v + \gamma)}\}$		$e^{-\gamma_0(0,5\gamma_v + \gamma)}$	
K	нижняя оценка	$1 - \gamma^*(\gamma_v + \gamma)$	$1 - \gamma^*(\gamma_v + \gamma)$	$1 - \gamma^*(\gamma_v + \gamma)$	$1 - \gamma^*(\gamma_v + \gamma)$
	верхняя оценка	$1 - \gamma^*(0,5\gamma_v + \gamma)$		$1 - \gamma^*(0,5\gamma_v + \gamma)$	
$R(t_0)$	нижняя оценка	$[1 - \gamma^*(\gamma_v + \gamma)] [1 - \gamma_0(\gamma_v + \gamma)]$	$[1 - \gamma^*(\gamma_v + \gamma)] [1 - \gamma_0(\gamma_v + \gamma)]$	$[1 - \gamma^*(\gamma_v + \gamma)] e^{-\gamma_0(\gamma_v + \gamma)}$	$[1 - \gamma^*(\gamma_v + \gamma)] e^{-\gamma_0(\gamma_v + \gamma)}$
	верхняя оценка	$[1 - \gamma^*(0,5\gamma_v + \gamma)] e^{-\gamma_0(0,5\gamma_v + \gamma)}$	$[1 - \gamma^*(\gamma_v + \gamma)] e^{-\gamma_0(\gamma_v + \gamma)}$	$[1 - \gamma^*(0,5\gamma_v + \gamma)] e^{-\gamma_0(0,5\gamma_v + \gamma)}$	

Дублированная система с полностью неконтролируемым основным элементом
при периодических проверках

Показатель		A	B	C	D
T_c	нижняя оценка	$0,5T$	$0,5T$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$
	верхняя оценка	T	T		
τ_c	нижняя оценка	$0,5t_v + \gamma\tau^*$	$t_v + \gamma\tau^*$	$0,5t_v + \gamma\tau^*$	$t_v + \gamma\tau^*$
	верхняя оценка	$t_v + \gamma\tau^*$		$t_v + \gamma\tau^*$	
$P_c(t_0)$	нижняя оценка	$1 - \gamma_0$	$1 - \gamma_0$	$e^{-\gamma_0}$	$e^{-\gamma_0}$
	верхняя оценка	$e^{-\gamma_0}$	$e^{-\gamma_0}$		
K	нижняя оценка	$1 - 2\gamma_v - 2\gamma\gamma^*$	$1 - 2\gamma_v - 2\gamma\gamma^*$	$1 - \gamma_v - \gamma\gamma^*$	$1 - \gamma_v - \gamma\gamma^*$
	верхняя оценка	$1 - 0,5\gamma_v - \gamma\gamma^*$	$1 - \gamma_v - \gamma\gamma^*$	$1 - 0,5\gamma_v - \gamma\gamma^*$	
$R(t_0)$	нижняя оценка	$(1 - \gamma_0)^2 (1 - 2\gamma_v - 2\gamma\gamma^*)$	$(1 - \gamma_0) (1 - 2\gamma_v - 2\gamma\gamma^*)$	$(1 - \gamma_v - \gamma\gamma^*) e^{-\gamma_0}$	$(1 - \gamma_v - \gamma\gamma^*) e^{-\gamma_0}$
	верхняя оценка	$(1 - 0,5\gamma_v - \gamma\gamma^*) e^{-\gamma_0}$	$(1 - \gamma_v - \gamma\gamma^*) e^{-\gamma_0}$	$(1 - 0,5\gamma_v - \gamma\gamma^*) e^{-\gamma_0}$	

Дублированная система с частично контролируемым резервным элементом
при периодических проверках

Показатель		A	B	C	D
T_c	нижняя оценка	$\frac{T}{L}$	$\frac{T}{L}$	$\frac{1}{\lambda L}$	$\frac{1}{\lambda L}$
	верхняя оценка	$\frac{T}{L^*}$		$\frac{1}{\gamma L^*}$	
τ_c	нижняя оценка	$\frac{2\gamma\tau^* + 0,5\alpha t_v \gamma_v}{L^*}$	$\frac{2\gamma\tau^* + \alpha t_v \gamma_v}{L}$	$\tau^* + 0,5\alpha t_v \gamma_v$	$\tau^* + \alpha \gamma_v t_v$
	верхняя оценка	$\frac{2\gamma\tau^* + \alpha t_v \gamma_v}{L}$		$\tau^* + \alpha t_v \gamma_v$	
$P_c(t_0)$	нижняя оценка	$\max\{P(t_0), e^{-\gamma_0 L}\}$	$\max\{P(t_0), e^{-\gamma_0 L}\}$	$e^{-\gamma_0 L}$	$e^{-\gamma_0 L}$
	верхняя оценка	$\max\{P(t_0), e^{-\gamma_0 L^*}\}$		$e^{-\gamma_0 L^*}$	
K	нижняя оценка	$1 - (2\gamma\gamma^* + \alpha\gamma_v^*)$	$1 - (2\gamma\gamma^* + \alpha\gamma_v^*)$	$1 - (2\gamma\gamma^* + \alpha\gamma_v^2)$	$1 - (2\gamma\gamma^* + \alpha\gamma_v^2)$
	верхняя оценка	$1 - (2\gamma\gamma^* + 0,5\alpha\gamma_v^2)$		$1 - (2\gamma\gamma^* + 0,5\alpha\gamma_v^2)$	
$R(t_0)$	нижняя оценка	$[1 - (2\gamma\gamma^* + \alpha\gamma_v^2)] (1 - \gamma_0 L)$	$[1 - (2\gamma\gamma^* + \alpha\gamma_v^2)] (1 - \gamma_0 L)$	$[1 - (2\gamma\gamma^* + \alpha\gamma_v^2)] (1 - \gamma_0 L)$	$[1 - (2\gamma\gamma^* + \alpha\gamma_v^2)] e^{-\gamma_0 L^*}$
	верхняя оценка	$[1 - (2\gamma\gamma^* + 0,5\alpha\gamma_v^2)] e^{-\gamma_0 L^*}$	$[1 - (2\gamma\gamma^* + \alpha\gamma_v^2)] e^{-\gamma_0 L^*}$	$[1 - (2\gamma\gamma^* + \alpha\gamma_v^2)] e^{-\gamma_0 L^*}$	

Дублированная система с частично контролируемым основным элементом
при периодических проверках

Показатель		A	B	C	D
T_c	точная оценка	$\frac{T}{N}$	$\frac{T}{N}$	$\frac{1}{\lambda N}$	$\frac{1}{\lambda N}$
τ_c	нижняя оценка	$\frac{1}{N} [0,5\alpha t_v + \tau^* \gamma (2 + \alpha) (1 - \alpha)]$	$\frac{1}{N} [\alpha t_v + \tau^* \gamma (2 - \alpha) (1 - \alpha)]$	$\frac{1}{N} [0,5\alpha t_v + \tau^* \gamma (2 - \alpha) (1 - \alpha)]$	$\frac{1}{N} [\alpha t_v + \tau^* \gamma (2 - \alpha) (1 - \alpha)]$
	верхняя оценка	$\frac{1}{N} [\alpha t_v + \tau^* \gamma (2 - \alpha) (1 - \alpha)]$		$\frac{1}{N} [\alpha t_v + \tau^* \gamma (2 - \alpha) (1 - \alpha)]$	
$P_c(t_0)$	точная оценка	$\max \{P(t_0), e^{-\gamma_0 N}\}$	$\max \{P(t_0), e^{-\gamma_0 N}\}$	$e^{-\gamma_0 A}$	$e^{-\gamma_0 N}$
K	нижняя оценка	$1 - [\alpha \gamma_v + \gamma \gamma^* (2 - \alpha) (1 - \alpha)]$	$1 - [\alpha \gamma_v + \gamma \gamma^* (2 - \alpha) (1 - \alpha)]$	$1 - [\alpha \gamma_0 + \gamma \gamma^* (2 - \alpha) (1 - \alpha)]$	$1 - [\alpha \gamma_v + \gamma \gamma^* (2 - \alpha) (1 - \alpha)]$
	верхняя оценка	$1 - [0,5\alpha \gamma_v + \gamma \gamma^* (2 - \alpha) (1 - \alpha)]$		$1 - [0,5\alpha \gamma_v + \gamma \gamma^* (2 - \alpha) (1 - \alpha)]$	
$R(t_0)$	нижняя оценка	$\{1 - [\alpha \gamma_v + \gamma \gamma^* (2 - \alpha) (1 - \alpha)]\} (1 - \gamma_0 N)$	$\{1 - [\alpha \gamma_v + \gamma \gamma^* (2 - \alpha) (1 - \alpha)]\} (1 - \gamma_0 N)$	$\{1 - [\alpha \gamma_0 + \gamma \gamma^* (2 - \alpha) (1 - \alpha)]\} e^{-\gamma_0 N}$	$\{1 - [\alpha \gamma_v + \gamma \gamma^* (2 - \alpha) (1 - \alpha)]\} e^{-\gamma_0 N}$
	верхняя оценка	$\{1 - [0,5\alpha \gamma_v + \gamma \gamma^* (2 - \alpha) (1 - \alpha)]\} e^{-\gamma_0 N}$	$\{1 - [\alpha \gamma_v + \gamma \gamma^* (2 - \alpha) (1 - \alpha)]\} e^{-\gamma_0 N}$	$\{1 - [0,5\alpha \gamma_0 + \gamma \gamma^* \times (2 - \alpha) (1 - \alpha)]\} e^{-\gamma_0 N}$	

**Дублированная система с частично контролируемыми идентичными элементами
при одновременных периодических проверках**

Показатель		A	B	C	D
T_c	нижняя оценка	$\frac{T}{M}$	$\frac{T}{M}$	$\frac{1}{\lambda M}$	$\frac{1}{\lambda M}$
	верхняя оценка	$\frac{T}{M^*}$		$\frac{1}{\lambda M^*}$	
τ_c	нижняя оценка	$\frac{1}{M^*} \left\{ \frac{t_v}{2} [\alpha + (1-\alpha) \times \right.$ $\left. \times \gamma_v] (1-\alpha) \tau^* (\gamma_v + \gamma) \right\}$	$\frac{1}{M} \{ t_v [\alpha + 2(1-\alpha) \gamma_v] +$ $+ (1-\alpha) \tau^* (2\gamma_v + \gamma) \}$	$\frac{1}{M^*} \left\{ \frac{t_v}{2} [\alpha + (1-\alpha) \gamma_v] + \right.$ $\left. + (1-\alpha) \tau^* (\gamma_v + \gamma) \right\}$	$\frac{1}{M} \{ t_v [\alpha + 2(1-\alpha) \gamma_v] +$ $+ (1-\alpha) \tau^* (2\gamma_v + \gamma) \}$
	верхняя оценка	$\frac{1}{M} \left\{ t_v [\alpha + 2(1-\alpha) \times \right.$ $\left. \times \gamma_v] + (1-\alpha) \tau^* \times \right.$ $\left. \times (2\gamma_v + \gamma) \right\}$		$\frac{1}{M} \left\{ t_v [\alpha + 2(1-\alpha) \gamma_v] + \right.$ $\left. + (1-\alpha) \tau^* (2\gamma_v + \gamma) \right\}$	
$P_c(t)$	нижняя оценка	$\max \{ P(t_0), e^{-\gamma_0 M} \}$	$\max \{ P(t_0), e^{-\gamma_0 M} \}$	$e^{-\gamma_0 [\alpha + (1-\alpha) (2\gamma_v + \gamma)]}$	$e^{-\gamma_0 [\alpha + (1-\alpha) (2\gamma_v + \gamma)]}$
	верхняя оценка	$\max \{ P(t_0), e^{-\gamma_0 M^*} \}$		$e^{-\gamma_0 [\alpha + (1-\alpha) (\gamma_v + \gamma)]}$	

Показатель		A	B	C	D
K	нижняя оценка	$1 - \{\gamma_v [\alpha + 2(1 - \alpha) \gamma_v] + (1 - \alpha) \gamma^* (2\gamma_v + \gamma)\}$	$1 - \{\gamma_v [\alpha + 2(1 - \alpha) \gamma_v] + (1 - \alpha) \gamma^* (2\gamma_v + \gamma)\}$	$1 - \{\gamma_v [\alpha + 2(1 - \alpha) \gamma_v] + (1 - \alpha) \gamma^* (2\gamma_v + \gamma)\}$	$1 - \{\gamma_v [\alpha + 2(1 - \alpha) \gamma_v] + (1 - \alpha) \gamma^* \times (2\gamma_v + \gamma)\}$
	верхняя оценка	$1 - \{0,5\gamma_v [\alpha + (1 - \alpha) \gamma_v] + (1 - \alpha) \gamma^* (\gamma_v + \gamma)\}$		$1 - \{0,5\gamma_v [\alpha + (1 - \alpha) \gamma_v] + (1 - \alpha) \gamma^* (\gamma_v + \gamma)\}$	
R(t ₀)	нижняя оценка	$(1 - \{\gamma_v [\alpha + 2(1 - \alpha) \gamma_v] + (1 - \alpha) \gamma^* (2\gamma_v + \gamma)\}) (1 - \gamma_0 M)$	$(1 - \{\gamma_v [\alpha + 2(1 - \alpha) \gamma_v] + (1 - \alpha) \gamma^* \times (2\gamma_v + \gamma)\}) (1 - \gamma_0 M)$	$(1 - \{\gamma_v [\alpha + 2(1 - \alpha) \gamma_v] + (1 - \alpha) \gamma^* (2\gamma_v + \gamma)\}) \times e^{-\gamma_0 [\alpha + (1 - \alpha) (2\gamma_v + \gamma)]}$	$(1 - \{\gamma_v [\alpha + 2(1 - \alpha) \gamma_v] + (1 - \alpha) \gamma^* \times (2\gamma_v + \gamma)\}) \times e^{-\gamma_0 [\alpha + (1 - \alpha) (2\gamma_v + \gamma)]}$
	верхняя оценка	$(1 - \{0,5\gamma_v [\alpha + (1 - \alpha) \gamma_v] + (1 - \alpha) \gamma^* \times (\gamma_v + \gamma)\}) e^{-\gamma_0 M^*}$	$(1 - \{\gamma_v [\alpha + 2(1 - \alpha) \gamma_v] + (1 - \alpha) \gamma^* \times (2\gamma_v + \gamma)\}) e^{-\gamma_0 M}$	$(1 - \{0,5\gamma_v [\alpha + (1 - \alpha) \gamma_v] + (1 - \alpha) \gamma^* (\gamma_v + \gamma)\}) \times e^{-\gamma_0 [\alpha + (1 - \alpha) (\gamma_v + \gamma)]}$	

Для получения уравнений такой модели исходим из следующих предположений:

функции распределения наработки до отказа основного и резервного элементов равны соответственно $F_1(x)$ и $F_2(x)$;

резервный элемент находится в ненагруженном режиме;

после отключения резервного элемента из рабочего состояния обязательно проводятся работы по восстановлению его первичных рабочих характеристик. Распределение длительности восстановления его рабочего состояния $V_2(x)$;

ремонт отказавшего основного элемента и его профилактическое обслуживание обеспечивают его полное восстановление. Случайные длительности ремонта и восстановления имеют распределения $\sigma_1(x)$ и $V_1(x)$;

время работы основного элемента до начала профилактического обслуживания имеет распределение $U_1(x)$;

распределения длительности восстановления и профилактики не зависят от длительности работы элемента до отказа или до начала профилактики;

ремонт и профилактика начинаются немедленно после отключения элемента из рабочего режима;

элемент подхвата включается в работу только после полного восстановления его характеристик надежности;

отказ системы наступает в моменты, когда оба элемента оказываются в нерабочем состоянии.

Обозначим распределения длительности безотказной работы пары следующим образом:

$\Phi(x)$ — оба элемента новые, и работу начинает основной элемент;

$\Phi_1(x)$ — в момент $x = 0$ отказал основной элемент, и резервный принял на себя нагрузку;

$\Phi_2(x)$ — в момент $x = 0$ основной элемент направлен на профилактику, и резервный принял на себя нагрузку;

$\Phi_3(x)$ — в момент $x = 0$ включился в работу восстановленный основной элемент, а резервный отключен для восстановления ресурса.

Через $\varphi_i(s)$ обозначим преобразование Лапласа для распределения $\Phi_i(x)$.

Везде далее используются обозначения: $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$; $\bar{U}(x) = 1 - U(x)$ и т. д.

6.5.2. Режимы профилактики. Ниже приводятся выражения для преобразований Лапласа вероятности безотказной работы дублированной системы при различных режимах профилактических работ. Приведем сначала описание этих режимов.

1. Режим жесткой профилактики. Работающий элемент отключается для профилактических работ через определенный (вообще говоря, случайный) промежуток времени независимо от состояния второго элемента, который в момент начала профилактических работ может находиться или в исправном состоянии, или в ремонте по случаю отказа, или в профилактическом ремонте.

2. Режим скользящей профилактики. Отключение основного элемента на профилактику производится лишь при условии, что резервный элемент находится в состоянии работоспособности. Таким образом, возможны случаи, когда наступил срок профилактического обслуживания элемента, но профилактические работы не начинаются, поскольку второй элемент в это время находится в ремонте или в процессе профилактического обслуживания. В этих условиях элемент, назначенный на профилактику, продолжает работать или до исправления второго элемента (в этом случае он тотчас подключается в работу, а первый элемент отправляется на профилактику), или до отказа работающего элемента, а тем самым и до отказа дублированной системы.

3. Режим экономной профилактики. Если момент профилактического обслуживания наступает тогда, когда второй элемент находится в ремонте или на профилактике, то о профилактике для первого элемента забывают вовсе и он работа-

ет до отказа (даже второй элемент возвращается после восстановления до отказа первого элемента).

При выполнении определенных и вполне естественных предположений о малости времени восстановления и малости длительности профилактики по сравнению с наработкой элемента распределение наработки до отказа системы сходится к соответствующему экспоненциальному распределению, для определения параметров которого приводятся расчетные формулы в табл. 6.21 и 6.22. Значения преобразований Лапласа приведены в таблицах:

$$b(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x); \quad b_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF_1(x); \quad b_2(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \bar{F}_1(x) dU_1(x);$$

$$b'_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \bar{U}_1(x) dF_1(x); \quad C_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \bar{F}_2(x) dG_1(x);$$

$$C_2(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \bar{F}_2(x) dV_1(x); \quad C(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \bar{F}(x) dG(x);$$

$$v(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \bar{V}(x) dF(x); \quad d(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \bar{G}(x) dF(x);$$

$$d'(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \bar{U}_1(x) V_2(x) dF_1(x); \quad d'_2(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \bar{G}(x) dF_2(x);$$

$$a(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \bar{V}_1(x) dF(x); \quad a'(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \bar{V}_1(x) dF_2(x);$$

$$h(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \bar{F}(x) \bar{V}_2(x) dU(x); \quad h_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \bar{F}(x) dV_2(x);$$

$$h_2(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \bar{U}(x) \bar{F}(x) dV_2(x); \quad h'(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \bar{F}_1(x) \bar{V}_2(x) dU_1(x);$$

$$h'_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \bar{F}_1(x) dV_2(x); \quad h'_2(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \bar{U}(x) \bar{F}_1(x) dV_2(x);$$

$$h_3(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \bar{V}_2(x) dF(x); \quad h'_3(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \bar{V}_2(x) dF_1(x).$$

6.5.3. Сравнение разных типов профилактик. Когда профилактические работы производят спустя определенное время после начала работы, т. е. $U_1(x)$ выбирают следующим образом:

$$U_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq t, \\ 1 & \text{при } x > t, \end{cases}$$

то при экономной профилактике без ремонта резервного элемента и при $V_1(x) = \sigma_1(x)$ введение профилактического обслуживания приводит к уменьшению средней наработки до отказа системы «с подхватом». Для случая $V_1(x) = \sigma_1(x)$ получается известный результат.

Преобразование Лапласа и приближенное распределение наработки до отказа дублированной системы из идентичных элементов при различных режимах профилактики

Режим системы	Преобразование Лапласа	Приближенное распределение	Условие приближения
Без профилактики	$\frac{b(s) [C(s) v(s) + d(s)]}{1 - C(s) b(s) + C(s) v(s)}$	$1 - e^{-t/K}, \text{ где } K = \int_0^{\infty} x dF(x)$	$\int_0^{\infty} \bar{V}(x) dF(x),$ $\int_0^{\infty} \bar{G}(x) dF(x) \text{ малы}$
Жесткая профилактика	$b_1(s) [d(s) + C_1(s)] + b_2(s) [C_2(s) + a(s)] + \{[b_1(s) C_1(s) + b_2(s) C_2(s)] [b_1(s) - d(s)] [d(s) + C_1(s)] + [b_2(s) - h(s)] [a(s) + b_2(s)] + [d(s) + h(s) - 1]\} \times \\ \times \{1 - C_1(s) [b_1(s) - d(s) - C_2(s)] [b_2(s) - h(s)]\}^{-1}$	$1 - e^{-t/M}, \text{ где } M = \int_0^{\infty} x \bar{U}(x) dF(x) + \\ + \int_0^{\infty} x \bar{F}(x) dU(x)$	$\int_0^{\infty} \bar{G}(x) dF(x),$ $\int_0^{\infty} \bar{V}_1(x) dF(x),$
Скользкая профилактика	$h_3 + (d + C_1)(b_1 - d) + (a + C_2)(b_2 - h + h_1 - h_2) + \\ + \{[C_1(b_1 - d) + C_2(b_2 - h + h_1 - h_2)] [(h_3 - 1) + (d + C_1)(b_1 - d) + (a + C_2)(b_2 - h + h_1 - h_2)]\} \times \\ \times [1 - C_1(b_1 - d) - C_2(b_2 - h + h_1 - h_2)]^{-1}$		$\int_0^{\infty} \bar{V}_2(x) dF(x),$ $\int_0^{\infty} \bar{V}_2(x) dU(x) \text{ малы}$

Преобразование Лапласа и приближенное распределение наработки до отказа дублированной системы из разных элементов при различных режимах профилактики

Режим	Преобразование Лапласа	Приближенное распределение	Условие приближения
Без профилактики	$\frac{b_1(s) [C_1(s) v(s) + d'_2(s)]}{1 - C_1(s) b_1(s) + C_1(s) v(s)}$	$1 - e^{-t/K_1}, \text{ где } K_1 = \int_0^{\infty} x dF_1(x)$	$\int_0^{\infty} \bar{V}(x) dF_1(x) \text{ и } \int_0^{\infty} \bar{G}(x) dF_2(x) \text{ малы}$
Жесткая профилактика	$b'_1(d'_2 + C_1) + b_2(C_2 + d') + [(b'_1 C_1 + b_2 C_2)(b'_1 - d')(a'_2 + C_1) + (b_2 - h)(a' + C_2) + (a' + h' - 1)] \times [1 - C_1(b'_1 - d') - C_2(b_2 - h)]^{-1}$	$1 - e^{-t/M_1}, \text{ где } M_1 = \int_0^{\infty} x \bar{U}_1(x) dF_1(x) + \int_0^{\infty} x \bar{F}_1(x) dU_1(x)$	$\int_0^{\infty} \bar{G}(x) dF_2(x), \int_0^{\infty} \bar{V}_2(x) dF_1(x),$
Скользкая профилактика	$h'_3 + (d'_2 + C_1)(b'_1 - d') + (a' + C_2)(b_2 - h' + h'_1 - h'_2) + \{[C_1(b'_1 - d') + C_2(b_2 - h' + h'_1 - h'_2)] \times [(h'_3 - 1) + (d'_2 + C_1)(b'_1 - d') + (a' + C_2)(b_2 - h' + h'_1 - h'_2)]\} \times [1 - C_1(b'_1 - d') - C_2(b_2 - h' + h'_1 - h'_2)]^{-1}$		$\int_0^{\infty} \bar{V}_1(x) dF_2(x) \text{ и } \int_0^{\infty} \bar{V}_2(x) dU(x) \text{ малы}$

При любой функции $U_1(x)$ имеет место:
 при любых $V_1(x)$, $V_2(x)$ и $\sigma_1(x)$ $T_{\text{ж}} \leq T_{\text{ск}}$;
 при $V_1(x) = V_2(x) = \sigma_1(x)$ $T_{\text{ж}} \leq T_{\text{ск}} \leq T^*$; $T_{\text{ж}} \leq T_{\text{э}} \leq T^*$;
 при $V_2(x) \geq V_1(x) \geq \sigma_1(x)$ $T_{\text{ж}} \leq T_{\text{э}}$,

где $T_{\text{э}}$, $T_{\text{ж}}$, $T_{\text{ск}}$, T^* — средняя наработка до отказа дублированной системы с восстановлением и экономной, жесткой, скользящей профилактикой.

Глава 7

СИСТЕМЫ С МОНОТОННОЙ СТРУКТУРОЙ

7.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Очень многие реальные системы имеют сложную структуру, которая может и не сводиться к обычным параллельно-последовательным или последовательно-параллельным соединениям (рис. 7.1). Наиболее простой пример подобных структур (мостиковая схема) показан на рис. 7.2. В общем случае такие системы могут представлять собой сети очень сложной конфигурации. На практике к подобным

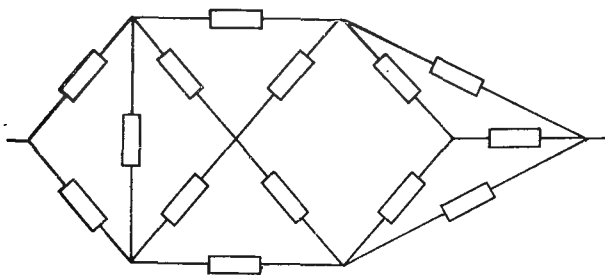


Рис. 7.1. Система со сложной неприводимой структурой

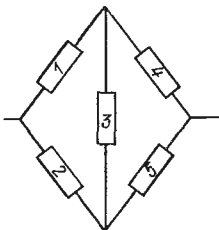


Рис. 7.2. Мостиковая схема

системам можно отнести различные территориально распределенные системы связи, информационные системы, системы управления географически разнесенными объектами системы электроэнергетики, различные трубопроводы, транспортные сети и т. п.

Такие системы называются системами с монотонной структурой (последовательно-параллельные и параллельно-последовательные структуры являются частными случаями таких систем). Для них характерно одно свойство: отказ любого из элементов может привести к ухудшению надежности или к отказу системы.

Методы оценки различных показателей надежности сложных систем с монотонной структурой общего вида весьма специфичны и требуют особого рассмотрения.

7.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОНОТОННОЙ СТРУКТУРЫ

Большинство практических систем характеризуется рядом свойств, заключающихся в том, что их характеристики надежности монотонно ухудшаются (не улучшаются) при ухудшении характеристик надежности составляющих их элементов. (Частными случаями систем с монотонной структурой являются системы с последовательным и параллельным соединениями элементов.) Приведем строгое определение систем с монотонной структурой.

Введем x_i — булеву переменную (индикатор), которая принимает два значения:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й элемент системы работоспособен,} \\ 0, & \text{если } i\text{-й элемент системы неработоспособен.} \end{cases}$$

Вероятность работоспособного состояния i -го элемента находится как математическое ожидание $p_i = Mx_i$.

Обозначим через $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$ n -мерный вектор, характеризующий состояние системы, определяемое при фиксированной структуре состоянием ее элементов (n — число элементов в системе). В дальнейшем будет удобно также использовать обозначение

$$\mathbf{X}_i = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad (7.1)$$

т. е. $(n-1)$ -мерный вектор, у которого отсутствует i -я компонента. И вообще $\mathbf{X}_\alpha$ есть вектор $\mathbf{X}$, у которого отсутствуют компоненты x_i , для которых $i \in \alpha$ (размерность этого вектора равна $n - |\alpha|$). Введя соответствующий критерий отказа для системы, можно задать соответствующую булеву функцию, называемую в данном случае структурной функцией системы вида

$$\Phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \text{если состояние } \mathbf{X} \text{ соответствует работоспособности системы,} \\ 0, & \text{если состояние } \mathbf{X} \text{ соответствует неработоспособности системы.} \end{cases}$$

Вероятность работоспособного состояния системы определяется как математическое ожидание структурной функции:

$$h = M\Phi(\mathbf{X}).$$

Эту величину можно найти и с помощью функции надежности системы, которая выражает показатель надежности системы через показатели надежности ее элементов:

$$h(\mathbf{p}) = h(p_1, \dots, p_n),$$

где $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$.

Структура системы называется монотонной, если выполняются следующие условия:

а) $\Phi(\mathbf{1}) = 1$, где $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$;

б) $\Phi(\mathbf{0}) = 0$, где $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$;

в) $\Phi(\mathbf{X}) \geq \Phi(\mathbf{Y})$, если $\mathbf{X} > \mathbf{Y}$, где условие понимается как совокупность n условий $x_i \geq y_i$ для $i = 1, \dots, n$, причем неравенство хотя бы один раз выполняется строго.

7.3. МЕТОД ПРЯМОГО ПЕРЕБОРА

Произвольная система, состоящая из n элементов, каждый из которых может находиться в состоянии работоспособности и в состоянии отказа, может находиться в 2^n различных состояниях:

H_0 — все n элементов работоспособны;

H_i — отказал i -й элемент, остальные работоспособны;

H_{ij} — отказали i -й и j -й элементы, остальные работоспособны;

$H_{1,2,\dots,n}$ — отказали все элементы.

Если каким-либо образом определен критерий отказа системы, то все множество ее состояний можно разделить на два подмножества: подмножество состояний работоспособности $\mathcal{F}$ и подмножество состояний отказа $\mathcal{G}$. Тогда, если для каждого состояния H_α вычислить вероятность его появления P_α , то вероятность состояния работоспособности системы в целом можно записать как

$$\mathcal{P}\{H_\alpha \in \mathcal{F}\} = \sum_{H_\alpha \in \mathcal{F}} P_\alpha.$$

Если система состоит из взаимно независимых элементов, то вероятности соответствующих состояний вычисляются по формулам:

$$P_0 = \prod_{i=1}^n p_i; \quad P_i = q_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n p_k = \frac{q_i}{p_i} P_0 = \gamma_i P_0; \quad P_{i,j} = q_i q_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^n p_k = \gamma_i \gamma_j P_0;$$

$$P_{1,2,\dots,n} = P_0 \prod_{i=1}^i \gamma_i = \prod_{i=1}^i q_i,$$

где p_i и q_i — вероятности состояния работоспособности и неработоспособности i -го элемента системы; $\gamma_i = q_i/p_i$.

Если p_i — вероятность работы до отказа для i -го элемента, т. е. $p_i(t) = \mathcal{P} \{ \xi_i \geq t \}$, где ξ_i — случайная наработка до отказа i -го элемента, то формула для P позволяет вычислять вероятность безотказной работы системы до отказа, т. е. $P(t) = \mathcal{P} \{ \xi \geq t \}$, где ξ — случайная наработка до отказа системы. В этом случае можно вычислять и среднюю наработку системы до отказа по общей формуле

$$T = \int_0^\infty P(t) dt.$$

Если p_i — коэффициент готовности (нестационарный коэффициент готовности, коэффициент оперативной готовности или нестационарный коэффициент оперативной готовности) i -го элемента, то вероятность P является коэффициентом готовности (нестационарным коэффициентом готовности, коэффициентом оперативной готовности или нестационарным коэффициентом оперативной готовности) системы в целом.

Пример 7.1. Мостиковая схема (см. рис. 7.2) состоит из идентичных элементов, каждый из которых характеризуется вероятностью безотказной работы $p(t) = e^{-\lambda t}$ с параметром $\lambda = 0,01 \text{ ч}^{-1}$. Требуется найти вероятность безотказной работы схемы за $t = 10 \text{ ч}$ и среднее время работы до отказа.

Решение. Составляем таблицу возможных состояний (табл. 7.1) и по рис. 7.2 непосредственно определяем, к какому из подмножеств $\mathcal{F}$ или $\mathcal{G}$ относится то или иное состояние. В таблице $x_i = 1$ означает, что i -й элемент исправен, а $x_i = 0$ — что он неисправен.

Таблица 7.1
Возможные состояния схемы к примеру 7.1

Индекс состояния α	Состояние элементов					Вид подмножества $\mathcal{F}, \mathcal{G}$	Вероятность состояния P_α	Индекс состояния α	Состояние элементов					Вид подмножества $\mathcal{F}, \mathcal{G}$	Вероятность состояния P_α
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	1	1	1	1	1	$\mathcal{F}$	p^5	25	1	0	1	1	0	$\mathcal{F}$	$q^2 p^3$
1	0	1	1	1	1	$\mathcal{F}$	$q p^4$	34	1	1	0	0	1	$\mathcal{F}$	$q^2 p^3$
2	1	0	1	1	1	$\mathcal{F}$	$q p^4$	35	1	1	0	1	0	$\mathcal{F}$	$q^2 p^3$
3	1	1	0	1	1	$\mathcal{F}$	$q p^4$	45	1	1	1	0	0	$\mathcal{G}$	$q^2 p^3$
4	1	1	1	0	1	$\mathcal{F}$	$q p^4$	134	0	1	0	0	1	$\mathcal{F}$	$q^3 p^2$
5	1	1	1	1	0	$\mathcal{F}$	$q p^4$	135	0	1	0	1	0	$\mathcal{G}$	$q^3 p^2$
12	0	0	1	1	1	$\mathcal{G}$	$q^2 p^3$	145	0	1	1	0	0	$\mathcal{G}$	$q^3 p^2$
13	0	1	0	1	1	$\mathcal{F}$	$q^2 p^3$	234	1	0	0	0	1	$\mathcal{F}$	$q^3 p^2$
14	0	1	1	0	1	$\mathcal{F}$	$q^2 p^3$	235	1	0	0	1	0	$\mathcal{F}$	$q^3 p^2$
15	0	1	1	1	0	$\mathcal{F}$	$q^2 p^3$	245	1	0	1	0	0	$\mathcal{G}$	$q^3 p^2$
23	1	0	0	1	1	$\mathcal{F}$	$q^2 p^3$	345	1	1	0	0	0	$\mathcal{G}$	$q^3 p^2$
24	1	0	1	0	1	$\mathcal{F}$	$q^2 p^3$	1345	0	1	0	0	0	$\mathcal{G}$	$q^3 p^2$

Таким образом,

$$P(t) = p^5(t) + 5q(t)p^4(t) + 8q^2(t)p^3(t) + 2q^3(t)p^2(t). \quad (7.2)$$

Иногда при расчете $P(t)$ для малых значений t удобнее сделать замену $p = 1 - q$ и записать

$$P = 1 - 2q^2 - 2q^3 + 5q^4 - 2q^5. \quad (7.3)$$

При $q(t=10) = 1 - e^{-0,1} \approx 0,1$ имеем $P(t=10) = 1 - 2 \cdot 0,01 - 2 \times 0,001 + \dots \approx 0,978$.

В то же время для вычисления средней наработки до отказа удобнее представить $P(t)$ как функцию от p , так как в этом случае легко находится требуемый интеграл. Тогда

$$P(t) = 2p^5(t) - 5p^4(t) + 2p^3(t) + 2p^2(t). \quad (7.4)$$

Интегрируя $P(t)$ с учетом того, что $p^k(t) = e^{-k\lambda t}$, получаем

$$T = 2T/5 - 5T/4 + 2T/3 + T = 49T/60 \approx 82 \text{ ч.}$$

7.4. МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСОБОГО ЭЛЕМЕНТА

В редких случаях удастся воспользоваться известной из математической логики теоремой о разложении функции логики по любому аргументу. Применительно к задачам надежности эта теорема может быть сформулирована следующим образом:

$$h(p) = p_i \text{МФ}(X_i, x_i = 1) + q_i \text{МФ}(X_i, x_i = 0),$$

где $\text{МФ}(X_i, x_i = 1)$ — вероятность состояния работоспособности системы при условии, что i -й элемент абсолютно надежен; $\text{МФ}(X_i, x_i = 0)$ — та же вероятность при условии, что i -й элемент заведомо отказал; X_i определено условием (7.1).

Можно использовать подобное разложение функции $h(p)$ относительно нескольких элементов, однако в этом случае процедура будет сводиться к своеобразному перебору. Например, для разложения по двум элементам

$$h(p) = p_i p_j \text{МФ}(X_{ij}, x_i = 1, x_j = 1) + p_i q_j \text{МФ}(X_{ij}, x_i = 1, x_j = 0) + \\ + q_i p_j \text{МФ}(X_{ij}, x_i = 0, x_j = 1) + q_i q_j \text{МФ}(X_{ij}, x_i = 0, x_j = 0),$$

где X_{ij} определено в соответствии с (7.1). Заметим, что каких-либо четких рекомендаций по выбору элемента, относительно которого производится разложение функции $P(t)$, сделать в общем случае не удастся.

Пример 7.2. Рассмотрим ту же мостиковую схему, что и в предыдущем примере. Найдем выражение для вероятности безотказной работы. В качестве элемента, относительно которого производится разложение, возьмем x_3 .

При $x_3 = 1$ мостиковая схема превращается в параллельно-последовательное соединение (рис. 7.3), где перемычка вместо элемента x_3 означает, что это соединение присутствует всегда, т. е. элемент x_3 абсолютно надежен. При этом

$$P(x_3 = 1) = (1 - q_1 q_2) (1 - q_3 q_4).$$

При $x_3 = 0$ мостиковая схема превращается в последовательно-параллельное соединение (рис. 7.4), где отсутствие элемента x_3 эквивалентно тому, что этот элемент постоянно находится в состоянии отказа. При этом

$$P(x_3 = 0) = 1 - (1 - p_1 p_4) (1 - p_2 p_5).$$

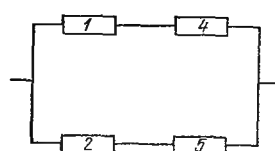
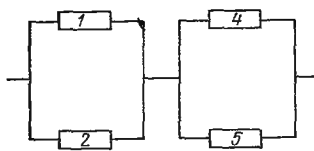


Рис. 7.3. Представление мостиковой схемы в виде параллельно-последовательного соединения при достоверно исправном диагональном элементе ($x_3=1$)

Рис. 7.4. Представление мостиковой схемы в виде последовательно-параллельного соединения при достоверно отказавшем диагональном элементе ($x_3=0$)

Окончательно находим

$$P = p_3 (1 - q_1 q_2) (1 - q_3 q_4) + q_3 [1 - (1 - p_1 p_4) (1 - p_2 p_5)],$$

что при идентичных элементах дает

$$P = p (1 - q^2)^2 + q [1 - (1 - p^2)^2].$$

Нетрудно убедиться, что эта запись эквивалентна (7.2)—(7.4) с точностью до группирования членов.

7.5. АНАЛИТИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД

7.5.1. Предварительные замечания. При исследовании сложных систем с монотонной структурой, в частности информационных сетей, в которых количество элементов велико, ни один из приведенных выше методов не оказывается достаточно эффективным. В этом случае естественно использовать для получения численных значений различных показателей надежности метод статистического моделирования. Однако если элементы системы достаточно надежны, а система обладает определенной избыточностью, то прямое использование метода статистического моделирования также мало эффективно, так как многие реализации неинформативны (очень часто проявляются реализации, когда не отказала ни одна линия связи или возник ровно один отказ, что обычно не сказывается на работоспособности сети в целом). В этом случае для изотропных сетей, т. е. таких, у которых все элементы практически равнонадежны, можно использовать смешанные аналитико-статистические методы оценки.

7.5.2. Метод моделирования отказов системы в фиксированных состояниях. В этом случае аналитически вычисляются вероятности того, что в системе окажется ровно k отказавших элементов, а условные вероятности отказа системы в этом состоянии находятся с заданной точностью методом статистического моделирования. Алгоритм оценки состоит в следующем:

1) аналитически вычисляются вероятности различных типов состояний системы: $H_{(0)}$ — работоспособность всех элементов системы; $H_{(1)}$ — отказ ровно одного элемента; $H_{(k)}$ — отказ ровно k элементов.

Вероятность события $H_{(k)}$

$$P_{(k)} = C_n^k q^k p^{n-k},$$

где p — вероятность состояния работоспособности элемента системы ($q = 1 - p$);

2) методом статистических испытаний находятся оценки условных вероятностей $\widehat{\Phi}_{(k)}$ того, что система, находящаяся в состоянии $H_{(k)}$, работоспособна по выбранному критерию;

3) вычисляется полная вероятность работоспособности системы:

$$P = P_{(0)} + \sum_{k=1}^n \widehat{\Phi}_{(k)} P_{(k)}. \quad (7.5)$$

П р и м е ч а н и я 1. Если система построена таким образом, что отказ j любых элементов не приводит к отказу системы в целом, т. е. минимальное сечение данной системы имеет мощность $j+1$, то

$$P = \sum_{k=0}^j P_{(k)} + \sum_{k=j+1}^n \widehat{\Phi}_{(k)} P_{(k)}.$$

При этом чем больше j , тем более эффективен смешанный аналитико-статистический метод оценки.

2. Биномиальное распределение является унимодальным, т. е. имеет вполне определенный выраженный максимум вероятности $P_{(k)}$ по k . Если вероятность q достаточно мала, то с некоторого номера k вероятность $P_{(k)}$ начинает довольно быстро убывать. Это позволяет в каждом конкретном случае (в зависимости от заданной точности расчета) определять, для каких значений k можно не находить оценки $\widehat{\Phi}_{(k)}$ статистическим моделированием.

В то же время для малых значений k в системах с большой избыточностью $\widehat{\Phi}_{(k)}$ близка к единице, т. е. в конкретном случае для систем, у которых минимальные сечения наименьшей мощности (по числу элементов, в них входящих) встречаются достаточно редко, фактически суммирование в первом слагаемом можно производить не до j , а до некоторого большего номера, определяемого в каждом конкретном случае.

Обычно в качестве критерия работоспособности системы типа информационной сети выбирается наличие связи (включая транзитные) между всеми элементами, т. е. связность сети. В этом случае $\widehat{\Phi}_{(k)}$ есть условная вероятность связности сети при отказе ровно k ребер, которая находится следующим образом.

С помощью метода статистических испытаний осуществляется конкретная реализация ровно k отказов тех или иных ребер. (Например, выбираются k различных случайных целых чисел, равномерно распределенных в интервале $[1, n]$.) Далее эта конкретная реализация сети проверяется на связность. Если данная реализация удовлетворяет критерию, т. е. сеть связана, то в счетчик числа успешных исходов к имеющемуся там числу прибавляется единица. Условная вероятность $\Phi_{(k)}$ вычисляется как

$$\widehat{\Phi}_{(k)} = v_k(N_k)/N_k,$$

где N_k — полное число реализаций при k отказавших ребрах; $v_k(N_k)$ — число успешных исходов из общего числа N_k реализаций.

7.5.3. Метод моделирования накопления отказов элементов до отказа системы. В этом случае методом статистических испытаний оценивается живучесть сети: случайным образом переводятся в состояние отказа элементы системы до тех пор, пока система по выбранному критерию (например, по критерию связности) не переходит в состояние отказа. Число элементов, при котором впервые в данной реализации произошел отказ системы k_s , запоминается. После проведения необходимой серии испытаний объема N на основании полученных значений k_s строится кривая вероятности отказа системы в зависимости от числа отказавших элементов по формуле

$$\widehat{\Phi}_{(k)} = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \delta(k_s),$$

$$\text{где } \delta(k_s) = \begin{cases} 1, & \text{если } k_s \leq k, \\ 0, & \text{если } k_s > k. \end{cases}$$

(Здесь в явном виде учитывается монотонный характер рассматриваемой структуры системы: если система находится в состоянии отказа при отказе некоторой совокупности элементов, то добавление новых отказов элементов не может изменить ее состояние.)

Дальнейший расчет производится по формуле (7.5).

7.5.4. Метод убыстрения испытаний. При высокой исходной надежности p_i элементов или большой структурной избыточности, характерной для сложных технических систем, подавляющее большинство реализаций при проверке на работоспособность имеет малую информативность. Поэтому необходимо найти такое преобразование характеристик системы, которое позволило бы искусственно уменьшить исходную надежность ее элементов, чтобы можно было быстрее набрать необходимую статистику отказов, а затем найти обратное преобразование, позволяющее пересчитывать результаты для получения истинных показателей надежности.

1. Прямое преобразование. Рассмотрим некоторое сечение u , в которое входит ровно z элементов. Частота выпадания такого разреза при статистических испытаниях стремится по ходу испытаний к его вероятности, равной $P_u = \prod_{i \in u} p_i \prod_{j \in u} (1 - p_j)$. Если обозначить через N общее число элементов системы, то

$$P_u = \left(\prod_{i=1}^N p_i \right) \prod_{j \in u} (1 - p_j) / p_j.$$

Вместо элемента с надежностью p_j введем элемент с меньшей надежностью p'_j , такой, чтобы удовлетворялось условие

$$(1 - p'_j) / p'_j = \gamma (1 - p_j) / p_j, \quad (7.6)$$

т. е.

$$p'_j = p_j [p_j + \gamma (1 - p_j)]^{-1}. \quad (7.7)$$

Если произвести преобразование (7.6) для всех элементов сети, то вероятность выпадания сечения u в процессе испытаний изменится и составит

$$P'_u = \prod_{i=1}^N p_i [p_i + \gamma (1 - p_i)]^{-1} \prod_{j \in u} \gamma (1 - p_j) / p_j.$$

Введем коэффициент δ убыстрения моделирования, который характеризует увеличение частоты выпадания сечения:

$$\delta = P'_u / P_u = \sum_{i=1}^N [p_i + \gamma (1 - p_i)]^{-1} \prod_{j \in u} \gamma.$$

Если в сечении u входит ровно z элементов, то будем называть его сечением веса (мощности) z . Для такого сечения

$$\delta = \gamma^z \prod_{i=1}^N [p_i + \gamma (1 - p_i)]^{-1},$$

где второй сомножитель $\prod_{i=1}^N [p_i + \gamma (1 - p_i)]^{-1} = K$ — константа для исходной системы. Коэффициент убыстрения моделирования можно представить в виде

$$\delta = \gamma^z K.$$

Отсюда следует, что предлагаемое преобразование показателей надежности не приводит к нарушению относительной частоты появления сечений фиксированного веса z , так как коэффициент убыстрения для всех этих сечений одинаков. Однако относительная частота появления сечений веса $z + \omega$ по сравнению с сечениями веса z увеличивается в γ^ω раз. Поэтому в ходе статистических испытаний преобразованной системы можно набрать достаточную статистику по сечениям большего веса, вероятность появления которых в исходной системе бывает обычно очень малой.

2. Обратное преобразование. Обратный пересчет вероятности появления сечения u производится по формуле

$$P_u = P'_u / \delta = P'_u \gamma^{-z} K^{-1}. \quad (7.8)$$

Отметим, что для выполнения обратного преобразования (7.8) необходимо фиксировать кроме факта отказа системы и вес z соответствующего сечения.

Из (7.8) следует, что каждый случай появления сечения u с весом z в преобразованной системе соответствует $\gamma^{-z} K^{-1}$ случаям появления такого же сечения в исходной системе. При этом если в преобразованной системе за время испытаний произошло m отказов, то для исходной системы соответствующее число отказов

$$m_{\text{эКВ}} = K^{-1} \sum_{i=1}^m \gamma^{-z_i},$$

где z_i — число элементов, вышедших из строя при i -м отказе системы. При возникновении очередного m -го отказа в преобразованной системе оценка надежности P_m исходной системы уточняется в соответствии с выражением

$$P_m = 1 - m_{\text{эКВ}} / M = 1 - (MK)^{-1} \sum_{i=1}^m \gamma^{-z_i},$$

где M — общее число просмотренных реализаций состояний преобразованной системы.

3. Оптимальный параметр преобразования. Возникает вопрос, каким следует выбрать параметр преобразования γ для максимального убыстрения процесса статистических испытаний конкретной системы. Из (7.7) следует, что при $\gamma = 1$ изменения исходной надежности не происходит и убыстрение отсутствует. Если выбрать γ слишком большим, то в преобразованной системе будут в основном возникать сечения очень большого веса, нехарактерные для исходной системы, причем их вклад в результирующую надежность при больших z будет невелик. Поэтому параметр γ следует выбрать таким, чтобы максимизировать вероятность возникновения наиболее вероятных сечений.

Рассмотрим этот вопрос более подробно. Для простоты положим, что показатели надежности всех элементов системы одинаковы и равны p . Обозначим через $P(z)$ вероятность возникновения отказа веса z . Очевидно, что вероятность потери работоспособности системы

$$Q = \sum_{z=1}^N P(z). \quad (7.9)$$

Обычно для реальных систем величина $P(z)$ достаточно плавно меняется с увеличением веса сечения, поэтому в качестве наиболее вероятного сечения можно выбрать

$$Mz = \left[\sum_{z=1}^N z P(z) \right] / \sum_{z=1}^N P(z).$$

Для высоконадежных систем в выражении (7.9) можно пренебречь всеми членами, кроме первого ненулевого, соответствующего минимальному разрезу веса z_0 , который и будет наиболее вероятным.

Оптимальное значение

$$\gamma_0 = z_0 p [(N - z_0) (1 - p)]^{-1}$$

и соответствует пересчитанному значению надежности элемента системы $p' = 1 - z_0 / N$.

Другими словами, для максимального убыстрения процедуры статистических испытаний необходимо пересчитать надежность элементов системы таким обра-

зом, чтобы средний вес отказов в преобразованной системе соответствовал весу наиболее вероятного сечения.

4. Коэффициент убыстрения. Убыстрение темпа набора статистики отказов составляет

$$\delta_m = \{z_0 / [(1-p)N]\}^{z_0} [(N-z_0)/(pN)]^{N-z_0}.$$

Так, для системы с параметрами $p = 0,99$, $N = 20$, $z_0 = 3$ время испытаний можно сократить приблизительно в 150 раз при достоверности получаемых результатов не хуже, чем в случае прямого набора статистики отказов системы.

7.6. МЕТОД МИНИМАЛЬНЫХ ПУТЕЙ И РАЗРЕЗОВ

7.6.1. Предварительные замечания. Введем следующие необходимые понятия:

минимальный путь в системе произвольной структуры — множество работоспособных элементов, которое обеспечивает работоспособное состояние системы, причем никакое собственное его подмножество этим свойством не обладает;

минимальный разрез в системе произвольной структуры — множество элементов, отказ которых приводит к отказу системы, причем никакое собственное его подмножество этим свойством не обладает.

Обратим внимание на то, что здесь речь идет о минимальности по включению, а не по мощности, поэтому в любой системе таких путей и сечений может быть достаточно много. В теории графов минимальный путь и минимальный разрез называют простой цепью (путем) и простым разрезом соответственно.

Каждому элементу $y_i \in Y$ системы соответствует вероятность безотказной работы p_i . Обозначим j -й минимальный путь системы через A_j , $j = 1, \dots, s$, а k -е минимальное сечение — через B_k , $k = 1, \dots, r$.

С каждым минимальным путем A_j можно связать структурную функцию

$$\alpha_j(X) = \bigcap_{i \in A_j} x_i,$$

которая принимает значение 1, если все элементы в минимальном пути работоспособны, и 0 в противном случае. Очевидно, что $\alpha_j(X)$ есть структурная функция системы, у которой все элементы, принадлежащие j -му минимальному пути ($j = 1, \dots, s$), соединены последовательно. (Единственный минимальный путь имеет только лишь чисто последовательная система.) Аналогичным образом каждому минимальному сечению B_k можно поставить в соответствие структурную функцию

$$\beta_k(X) = \overline{\bigcap_{i \in B_k} x_i} = 1 - \bigcap_{i \in B_k} (1 - x_i),$$

которая принимает значение 0, если все элементы минимального сечения неисправны, и 1 в противном случае, т. е. если работоспособен хотя бы один элемент этого сечения. (Здесь, а также в (7.10) и (7.11) для простоты истинное событие обозначено 1, а знак «—» означает логическое исключение.) Таким образом, $\beta_k(X)$ есть структурная функция системы, в которой все элементы, принадлежащие k -му минимальному сечению ($k = 1, \dots, r$), соединены параллельно. Таких различных минимальных сечений в системе может быть несколько (допустим, s). (Единственное минимальное сечение имеет только лишь чисто параллельная система.)

7.6.2. Оценка с использованием минимальных путей и сечений. Структурная функция системы может быть записана через минимальные пути или минимальные сечения следующим образом:

$$\varphi(X) = \bigcap_{1 \leq j \leq s} \alpha_j(X) = 1 - \bigcap_{1 \leq k \leq r} [1 - \beta_k(X)], \quad (7.10)$$

$$\varphi(X) = \bigcap_{1 \leq k \leq s} \beta_k(X). \quad (7.11)$$

Пример 7.3. Для мостиковой схемы (см. рис. 7.2) структурные функции минимальных путей и сечений:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= x_1 x_2, \quad \beta_1 = 1 - (1 - x_1)(1 - x_4); \\ \alpha_2 &= x_4 x_5, \quad \beta_2 = 1 - (1 - x_2)(1 - x_5); \\ \alpha_3 &= x_1 x_3 x_5, \quad \beta_3 = 1 - (1 - x_1)(1 - x_3)(1 - x_5); \\ \alpha_4 &= x_4 x_3 x_2, \quad \beta_4 = 1 - (1 - x_4)(1 - x_3)(1 - x_2). \end{aligned}$$

Оценки для вероятности работоспособного состояния системы с использованием структурных функций, выраженных через минимальные пути и минимальные сечения:

$$\prod_{1 \leq k \leq s} \left[1 - \prod_{i \in B_k} q_i \right] \leq P\{\varphi(X)\} \leq 1 - \prod_{1 \leq j \leq r} \left(1 - \prod_{i \in A_j} p_i \right). \quad (7.12)$$

Пример 7.4. Для мостиковой схемы (см. рис. 7.2) можно записать оценки (7.12):

$$\begin{aligned} (1 - q_1 q_4)(1 - q_2 q_5)(1 - q_1 q_3 q_5)(1 - q_2 q_3 q_4) &\leq P \leq 1 - (1 - p_1 p_2) \times \\ &\times (1 - p_4 p_5)(1 - p_1 p_3 p_5)(1 - p_2 p_3 p_4). \end{aligned}$$

Для верхних и нижних оценок систем с неприводимой структурой можно сформулировать дополнительно следующие утверждения:

нижняя оценка для вероятности безотказной работы может быть получена путем представления структуры в виде параллельного соединения реберно-непересекающихся минимальных путей;

верхняя оценка для вероятности безотказной работы может быть получена путем представления структуры в виде последовательного соединения реберно-непересекающихся минимальных сечений:

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq v \leq V} \left\{ 1 - \prod_{A_j \in A^v} \left(1 - \prod_{i \in A_j} p_i \right) \right\} &\leq P\{\varphi(X)\} \leq \\ &\leq \min_{1 \leq w \leq W} \prod_{B_k \in B^w} \left(1 - \prod_{i \in B_k} q_i \right), \end{aligned} \quad (7.13)$$

где A^v — множество индексов элементов, составляющих v -й набор реберно-непересекающихся путей; V — число таких наборов; B^w — множество индексов элементов, составляющих w -й набор реберно-непересекающихся сечений; W — число таких наборов.

Примечание. В формуле (7.13) можно для верхней (или нижней) оценки брать минимум (или максимум) не по всем возможным R (или S) наборам, а лишь по любой части, получая соответственно более широкие границы.

Пример 7.5. Для мостиковой схемы (см. рис. 7.2) оценки (7.13) примут вид

$$\begin{aligned} \max \{ [1 - (1 - p_1 p_2)(1 - p_4 p_5)], p_1 p_3 p_5, p_2 p_3 p_4 \} &\leq P \leq \\ &\leq \min \{ (1 - q_1 q_4)(1 - q_2 q_5), 1 - q_1 q_3 q_5, 1 - q_2 q_3 q_4 \}. \end{aligned}$$

Результирующие оценки для неприводимой структуры:

$$\begin{aligned} \max \left\{ \prod_{1 \leq k \leq r} \left(1 - \prod_{i \in B_k} q_i \right); \max_{1 \leq v \leq V} \left[1 - \prod_{A_j \in A^v} \left(1 - \prod_{i \in A_j} p_i \right) \right] \right\} &\leq \\ &\leq P\{\varphi(X)\} \leq \min \left\{ 1 - \prod_{1 \leq j \leq r} \left(1 - \prod_{i \in A_j} p_i \right); \min_{1 \leq w \leq W} \prod_{B_k \in B^w} \left(1 - \prod_{i \in B_k} q_i \right) \right\}. \end{aligned}$$

Примечание. Легко видеть, что оценки (7.13) с учетом сделанного ранее примечания проще оценок (7.12), так как не требуют получения всех минимальных путей и сечений [в неравенствах (7.13) можно ограничиться и одним набором]. Что же касается точности оценок, то в общем случае нельзя отдать предпочтение тем или иным оценкам, так как это зависит от структуры системы. Например, если структура системы такова, что большинство минимальных путей не имеет общих ребер, т. е. система близка по структуре к параллельному соединению минимальных путей, то предпочтительными окажутся верхняя оценка (7.12) и нижняя оценка (7.13). Если же большинство минимальных путей имеет общие ребра, то лучшими будут верхняя оценка (7.13) и нижняя оценка (7.12).

Если вероятность безотказной работы i -го элемента является экспоненциальной функцией $p_i(t) = e^{-\lambda_i t}$, то, проинтегрировав правую часть (7.12) и левую часть (7.13), можно получить оценки для средней наработки системы до отказа:

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq v \leq V} \left\{ \sum_{A_j \in A^v} T_j - \sum_{(A_j, A_k) \in A^v} \frac{1}{\Lambda_j + \Lambda_k} + \dots + (-1)^{n_v+1} \frac{1}{\sum_{A_j \in A^v} \Lambda_j} \right\} &\leq \\ &\leq T \leq \sum_{1 \leq j \leq r} T_j - \sum_{1 \leq j < k \leq r} \frac{1}{\Lambda_j + \Lambda_k} + \dots + (-1)^{r+1} \frac{1}{\sum_{1 \leq j \leq r} \Lambda_j}, \end{aligned}$$

где $\Lambda_j = \sum_{i \in A_j} \lambda_i$; $T_j = 1/\Lambda_j$ — средняя наработка до отказа j -го пути; n_v — число путей в v -м наборе реберно-непересекающихся минимальных путей.

Пример 7.6. Рассмотрим мостиковую схему (см. рис. 7.2). Все элементы этой схемы характеризуются вероятностью безотказной работы $p(t) = e^{-\lambda t}$ с параметром $\lambda = 0,01 \text{ ч}^{-1}$. Требуется дать оценку вероятности безотказной работы схемы за $t_0 = 10 \text{ ч}$ и верхнюю оценку среднего времени работы до отказа.

Решение. Для этой схемы минимальными путями будут: $\{x_1, x_4\}$, $\{x_1, x_3, x_5\}$, $\{x_2, x_5\}$, $\{x_2, x_3, x_4\}$, а минимальными сечениями: $\{x_1, x_2\}$, $\{x_1, x_3, x_5\}$, $\{x_4, x_5\}$, $\{x_2, x_3, x_4\}$.

Обозначим $p(t=10) = e^{-0,1} = p$ и $q = 1 - p$ и запишем верхнюю и нижнюю оценки в развернутом виде для данного случая:

$$(1 - q^2)^2 (1 - q^3)^2 \leq P \leq 1 - (1 - p^2)^2 (1 - p^3)^2.$$

Подставив численное значение $q = 0,1$, получим

$$0,978 \leq P \leq 0,9976.$$

(Истинное значение, найденное в примере 7.1, равно 0,978.)

Для верхней оценки средней наработки до отказа вычислим предварительно интенсивности отказов для каждого минимального пути: $\Lambda_1 = 0,02 \text{ ч}^{-1}$; $\Lambda_2 = 0,03 \text{ ч}^{-1}$; $\Lambda_3 = 0,02 \text{ ч}^{-1}$; $\Lambda_4 = 0,03 \text{ ч}^{-1}$.

В итоге находим

$$\begin{aligned} T &\leq 50 + 50 + 33,3 + 33,3 - 20 - 25 - 20 - 20 - 16,7 - 20 + 14,1 + \\ &\quad + 12,5 + 14,1 + 12,5 - 10 = 97,2 \text{ ч}. \end{aligned}$$

(Истинное значение, найденное в примере 7.1, равно 82 ч.)

7.6.3. Метод поглощения степеней. Пусть оператор $\mathcal{L}\{f\}$ означает, что в полиноме f все показатели степени при переменных p_i следует положить равными единице. Тогда

$$\mathcal{L} \left\{ 1 - \prod_{i=1}^a \left(1 - \prod_{i \in A_j} p_i \right) \right\} \leq_{(a \leq r, b \leq s)} P \leq \mathcal{L} \left\{ \prod_{k=1}^b \left[1 - \prod_{i \in B_k} (1 - p_i) \right] \right\}. \quad (7.14)$$

Достоинство оценки (7.14) заключается в том, что по мере увеличения переменных a и b могут уточняться вплоть до точного значения, если $a = r$ и $b = s$. В процессе получения этих оценок не следует забывать, что даже при равных p_i , $i = 1, \dots, n$, в аналитических выражениях (7.14) следует каждому элементу y_i

присваивать собственную вероятность вплоть до получения окончательного выражения (7.14).

Пример 7.7. Рассмотрим систему с мостиковой структурой (см. рис. 7.2). Пусть все элементы этой системы характеризуются вероятностью $p(t) = e^{-\lambda t}$ с параметром $\lambda = 0,01 \text{ ч}^{-1}$. Требуется оценить вероятность P безотказной работы этой системы за время $t_0 = 10 \text{ ч}$ и дать оценку среднего времени работы системы до отказа.

Решение. Минимальными путями этой системы будут: y_1y_4 , y_2y_5 , $y_1y_3y_5$, $y_2y_3y_4$, а минимальными сечениями: y_1y_2 , y_4y_5 , $y_1y_3y_5$, $y_2y_3y_4$.

Наборами реберно-непересекающихся путей в этой системе будут: $\{y_1y_4$, $y_2y_5\}$, $\{y_1y_3y_5\}$, $\{y_2y_3y_4\}$, а наборами реберно-непересекающихся сечений: $\{y_1y_2$, $y_4y_5\}$, $\{y_1y_3y_5\}$, $\{y_2y_3y_4\}$. Тогда в соответствии с (6.5) и (6.6) при учете только первых из перечисленных наборов минимальных путей и сечений:

$$(1 - q^2)^2 (1 - q^3)^2 \leq P \leq 1 - (1 - p^2)^2 (1 - p^3)^2; \quad 1 - (1 - p^2)^2 \leq P \leq (1 - q^2)^2.$$

Подставив численные значения $p \approx 0,9$ и $q \approx 0,1$, получим:

$$0,978 \leq P \leq 0,9976; \quad 0,964 \leq P \leq 0,98,$$

из чего следуют наилучшие оценки P :

$$0,978 \leq P \leq 0,98.$$

Для оценки средней наработки до отказа вычислим предварительно интенсивности отказов для каждого из минимальных путей:

$$\Lambda_1 = 0,02 \text{ ч}^{-1}; \quad \Lambda_2 = 0,02 \text{ ч}^{-1}; \quad \Lambda_3 = 0,03 \text{ ч}^{-1}; \quad \Lambda_4 = 0,03 \text{ ч}^{-1}.$$

Пользуясь (6.8), получаем

$$75 \text{ ч} \leq T \leq 97,2 \text{ ч}.$$

7.6.4. Алгоритм вычисления для метода поглощения степеней. При перемножении любой пары сомножителей R_k и R_m справедливо

$$(1 - R_k) * (1 - R_m) = 1 - R_k - R_m * (1 - R_k).$$

Символ $*$ означает, что при умножении используется оператор $\mathcal{L}$.

Последний член можно представить в виде

$$R_m * (1 - R_k) = R_m (1 - R_{km}),$$

где R_{km} — произведение вероятностей работоспособного состояния всех элементов k -го пути, из которого вычеркнуты сомножители с индексами элементов, общих с m -м путем.

В общем случае при умножении вероятности работоспособного состояния очередного m -го пути на промежуточный результат $F(R_1, R_2, \dots, R_{m-1})$, полученный при перемножении соответствующих вероятностей для предыдущих путей, справедливо соотношение

$$R_m * F(R_1, R_2, \dots, R_{m-1}) = R_m F(R_{1m}, R_{2m}, \dots, R_{m-1,m}).$$

Если в произведении R_{km} будут вычеркнуты все элементы, то следует принять $R_{km} = 1$.

Поясним получаемый алгоритм на простом примере.

Пример 7.8. На рис. 7.5 представлен граф, у которого веса ребер равны вероятностям их работоспособного состояния. Требуется найти вероятность его связности. Узлы для простоты будем считать идеально надежными. Предположим, что для связи между узлами A и B можно использовать все пути, состоящие из трех и менее последовательно включенных ребер (т. е. пути ab , cdf , cgb ,

ahf). Тогда с учетом введенных обозначений задача определения связности узлов A, B сводится к вычислению следующего выражения:

$$Q_{AB} = (1 - ab) * (1 - cdf) * (1 - cgb) * (1 - ahf).$$

Перемножение производится последовательно, т. е. первая скобка умножается на вторую, полученный результат на третью и т. д. Если промежуточный результат, полученный перед умножением на i -ю скобку $(1 - R_i)$ обозначить через Q_{i-1} , то результат Q_i очередного перемножения можно представить в виде

$$Q_i = Q_{i-1} * (1 - R_i) = Q_{i-1} - R_i * Q_{i-1} = Q_{i-1} - R_i Q_{i-1, i},$$

где $Q_{i-1, i}$ обозначает выражение для Q_{i-1} , из которого вычеркнуты все элементы, общие с i -м путем.

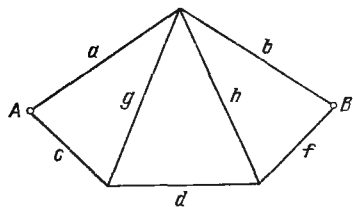


Рис. 7.5. Схема для примера 7.8

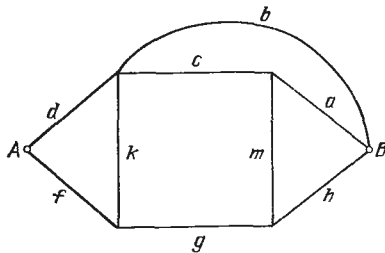


Рис. 7.6. Схема для примера 7.9

Другими словами, на каждом шаге из полученного ранее выражения Q_{i-1} следует вычесть произведение выражения для Q_{i-1} , в котором исключены общие с этим путем ребра, и вероятности работоспособного состояния i -го пути. В соответствии с этим алгоритмом для рассматриваемого случая получим:

$$Q_1 = 1 - ab = \overline{ab}; \quad Q_2 = ab - cdf \cdot \overline{ab} = \overline{ab} \cdot \overline{cdf}; \quad Q_3 = \overline{ab} \cdot \overline{cdf} - cgb \cdot \overline{a} \cdot \overline{df};$$

$$Q_{AB} = Q_4 = \overline{ab} \cdot \overline{cdf} - cgb \cdot \overline{a} \cdot \overline{df} - ahf \cdot \overline{cd}.$$

При преобразованиях используются следующие правила логики:

$$1 - a = \overline{a}; \quad a \cdot a = a; \quad a \cdot \overline{a} = 0.$$

Для уменьшения объема вычислений не следует без необходимости раскрывать скобки, а также если промежуточный результат Q_i допускает упрощение (приведение подобных членов, вынесение за скобку общего множителя и т. д.), то их следует всегда выполнять. Это позволяет заметно уменьшить трудоемкость расчетов.

Пример 7.9. Для сети связи, изображенной на рис. 7.6, между выделенными узлами имеется 11 возможных путей. Все результаты расчетов сведены в табл. 7.2, в третьей колонке которой записан результат умножения вероятности работоспособного состояния данного пути на Q_{i-1} , полученную при рассмотрении всех предыдущих путей, в последней колонке — формулы для Q_i , получившиеся после упрощения соответствующих выражений, которые представлены в третьей колонке. Окончательная формула для Q_{AB} содержится в последней колонке, если ее читать сверху вниз; при этом члены, стоящие в первой и второй строках, соединяются знаком умножения (независимые пути), а остальные члены на соседних строках — знаком «—».

В таблице полностью приведены все выкладки, необходимые для расчета надежности рассматриваемой сети.

Пример 7.10. Рассмотрим более подробно расчет надежности пути 9. Из табл. 7.2 произведение вероятностей работоспособного состояния составляющих его элементов, записанное во второй колонке, переносится в третью. Далее в

Расчеты для примера 7.9

Номер пути	R_i	$R_i * Q_{i-1}$	Q_i
1	ab	$\overline{ab}$	$\overline{ab} \cdot$
2	fgh	$\overline{fgh}$	$\overline{fgh} \text{---}$
3	acd	$acd \cdot \overline{b} \cdot \overline{fgh}$	$acd \cdot \overline{b} \cdot \overline{fgh} \text{---}$
4	$fk b$	$fk b \cdot \overline{a} \cdot \overline{gh}$	$fk b \cdot \overline{a} \cdot \overline{gh} \text{---}$
5	$akgh$	$akgh (\overline{b} \cdot \overline{f} \text{---} cd \cdot \overline{b} \cdot \overline{f})$	$akgh \overline{b} \cdot \overline{f} \cdot cd \text{---}$
6	$acmh$	$acmh (\overline{b} \cdot \overline{fg} \text{---} d \cdot \overline{b} \cdot \overline{fg} \text{---} kg \overline{b} \cdot \overline{f} \cdot \overline{d})$	$acmh \overline{b} d (\overline{fg} \text{---} kg \cdot \overline{f}) \text{---}$
7	$fkcd$	$fkcd (\overline{ab} \cdot \overline{gh} \text{---} \overline{ab} \cdot \overline{gh} \text{---} b \cdot \overline{a} \cdot \overline{gh})$	$fkcd \cdot \overline{gh} \cdot \overline{a} \cdot \overline{b} \text{---}$
8	$fgmd$	$fgmd (\overline{ab} \cdot \overline{h} \text{---} ac \cdot \overline{b} \cdot \overline{h} \text{---} kb \cdot \overline{a} \cdot \overline{h} \text{---} \text{---} kc \cdot \overline{h} \cdot \overline{a} \cdot \overline{b})$	$fgmd \overline{h} (\overline{ab} \text{---} ac \cdot \overline{b} \text{---} kb \cdot \overline{a} \text{---} \text{---} kc \cdot \overline{a} \cdot \overline{b}) \text{---}$
9	$akgmd$	$akgmd [\overline{b} \cdot \overline{f} \overline{h} \text{---} c \cdot \overline{b} \cdot \overline{f} \overline{h} \text{---} \text{---} \overline{h} \overline{b} \cdot \overline{f} \cdot \overline{c} \text{---} f \overline{h} (\overline{b} \text{---} c \overline{b})]$	$akgmd \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{f} \cdot \overline{h} \text{---}$
10	$fkcmh$	$fkcmh (\overline{ab} \cdot \overline{g} \text{---} ad \cdot \overline{b} \cdot \overline{g} \text{---} \text{---} b \cdot \overline{a} \overline{g} \text{---} \overline{ab} \cdot \overline{d} \cdot \overline{c} \text{---} d \cdot \overline{g} \cdot \overline{a} \cdot \overline{b})$	$fkcmh \cdot \overline{g} \cdot \overline{b} \cdot \overline{a} \cdot \overline{d} \text{---}$
11	$fgmcb$	$fgmcb [\overline{a} \cdot \overline{h} \text{---} k \cdot \overline{a} \cdot \overline{h} \text{---} \text{---} d \cdot \overline{h} (\overline{a} \text{---} k \overline{a})]$	$fgmcb \cdot \overline{a} \cdot \overline{h} \cdot \overline{k} \cdot \overline{d}$

квадратных скобках записано произведение надежности этого пути на значения Q_i , накопленные в четвертой колонке (начиная с первой строки). От члена $\overline{ab}$, стоящего в первой строке, остается только $\overline{b}$, так как элемент a входит в состав рассматриваемого пути и поглощается согласно оператору $\mathcal{L}$. От члена второй строки остается $\overline{fgh}$, так как элемент g поглощается по той же причине. Вклад третьей строки равен $c \cdot \overline{b} \cdot \overline{fgh}$, а четвертой — нулю из-за наличия элемента $\overline{a}$, входящего в состав рассматриваемого пути в виде a . Нулевой вклад дают также строки 6, 7.

Выражение, стоящее в квадратных скобках, упрощается следующим образом:

$$\overline{b} [\overline{fgh} \text{---} c \overline{fgh} \text{---} h \overline{f} \overline{c} \text{---} f \overline{h} \overline{c}] = \overline{b} (\overline{fgh} \cdot \overline{c} \text{---} h \overline{f} \overline{c} \text{---} f \overline{h} \overline{c}) = \overline{bc} (\overline{h} \text{---} f \overline{h}) = \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{h} \cdot \overline{f}.$$

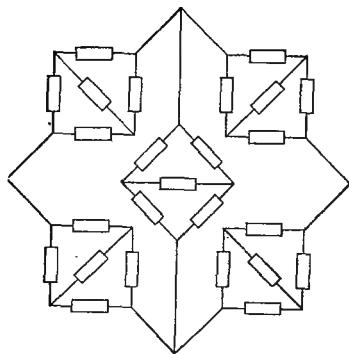
Так же производится расчет всех других путей.

П р и м е ч а н и е. Аналогичным образом можно воспользоваться перечнем минимальных сечений.

7.6.5. Оценки вероятности безотказной работы для изотропной системы. Назовем систему изотропной, если вероятности безотказной работы всех элементов одинаковы и равны p . Тогда для системы из n элементов

$$P = \sum_{i=0}^n A_i p^{n-i} (1-p)^i, \quad (7.15)$$

где A_i — число состояний работоспособности системы при i отказавших элементах. Вычисление P по формуле (7.15) из-за сложности определения всех коэффициентов A_i затруднительно. Раскрытие скобок в (7.15) приводит к знакоперемен-



ному ряду, что делает сложным его усечение с целью получения приближенных оценок P .

Более удобные оценки P основаны на преобразовании $\eta = (1 - p)/p$:

$$\frac{\sum_{i=0}^a A_i \eta^i}{(\eta + 1)^n} \leq P \leq 1 - \frac{\sum_{i=0}^b B_i \eta^i}{(\eta + 1)^n}, \quad (7.16)$$

где $B_i = C_n^i - A_i$ — число состояний отказа системы при i отказавших элементах; l — число элементов в кратчайшем минимальном пути системы; c — наименьшее число элементов в минимальном сечении системы; $a \leq n - l$; $b \leq n$. При $a = n - l$ левое, а при $b = n$ правое неравенство (7.16) становятся точными выражениями для P . Из-за сложности определения коэффициентов A_i и B_i для систем с произвольной структурой их целесообразно использовать для расчета надежности систем с симметричной структурой.

Рис. 7.7. Мостиковая схема, допускающая декомпозицию (представление в виде укрупненной схемы, каждый из элементов которой исследуется отдельно)

Пример 7.11. Определим по формуле (7.16) оценки вероятности P для системы с той же структурой и характеристиками надежности, что и в примере 7.7.

Решение. Ограничимся значением $i = 2$ как для левого, так и для правого неравенства (7.16). Для этой системы: $c = 2$; $A_0 = 1$; $A_1 = 5$; $A_2 = 8$; $B_2 = 2$; $\eta = \frac{0,1}{0,9} \approx 0,11$. В итоге для P получаем следующие неравенства:

$$(1 + 0,55 + 80,012)/1,685 \leq P \leq 1 - 2 \cdot 0,012/1,685 \text{ или } 0,977 \leq P \leq 0,985.$$

Обозначим через H_j событие, состоящее в работоспособности всех элементов минимального пути A_j , $j = 1, \dots, r$, системы, а через R_j — событие, состоящее в отказе всех элементов минимального сечения B_j , $j = 1, \dots, s$. Тогда:

$$P \leq \sum_{j=1}^r P(H_j) - \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq r} P(H_{j_1} H_{j_2}) + \dots + \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq r} P(H_{j_1}, \dots, H_{j_m}); \quad (7.17)$$

$$P \geq \sum_{j=1}^r P(H_j) - \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq r} P(H_{j_1} H_{j_2}) + \dots + \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{m+1} \leq r} P(H_{j_1}, \dots, H_{j_{m+1}}); \quad (7.18)$$

$$P \leq 1 - \sum_{j=1}^s P(R_j) + \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq s} P(R_{j_1} R_{j_2}) - \dots + \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{m+1} \leq s} P(R_{j_1}, \dots, R_{j_{m+1}}); \quad (7.19)$$

$$P \geq 1 - \sum_{j=1}^s P(R_j) + \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq s} P(R_{j_1} R_{j_2}) - \dots - \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq s} P(R_{j_1}, \dots, R_{j_m}); \quad (7.20)$$

где $P(H_j)$ и $P(R_j)$ — вероятности событий H_j и R_j , $m = 2k + 1$. Оценки (7.17) и (7.18) являются предпочтительными при малых вероятностях p_i безотказной работы элементов системы, а оценки (7.19) и (7.20) — при больших.

7.6.6. Оценки, основанные на декомпозиции структуры. Часто перед тем, как определять или оценивать характеристики надежности системы, бывает

целесообразно произвести декомпозицию ее структуры. Рассмотрим пример такого преобразования структуры системы. В системе, изображенной на рис. 7.7, вместо элементов системы рис. 7.2 помещены подсистемы с мостиковой структурой.

До расчета вероятности P безотказной работы системы целесообразно заменить эти подсистемы элементами с вероятностями безотказной работы, равными вероятностям безотказной работы подсистем или их оценкам. Если характеристики надежности подсистем мы заменяем их гарантированными оценками, то в результате расчета мы также получим гарантированные оценки P всей системы, но менее точные, чем оценки в примере 7.6, так как исходными данными для расчета будут не точные значения p_i , а их оценки.

Глава 8

РАСЧЕТ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМ

8.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Наличие определенной функциональной избыточности в структуре большинства сложных систем приводит к тому, что появление отказов отдельных элементов или значительные изменения тех или иных рабочих параметров могут привести не к полному выходу системы из строя, а лишь к некоторому ухудшению качества функционирования и снижению эффективности системы в целом. Для оценки качества функционирования таких систем целесообразно ввести количественный показатель эффективности функционирования, учитывающий влияние таких частичных отказов.

Под эффективностью функционирования будем понимать некоторую количественную характеристику качества и объема выполняемой системой работы. Например, эффективность функционирования системы массового обслуживания характеризуется средним числом обслуженных требований (в случае отказов системы и потерь из-за нехватки мест ожидания), средним временем ожидания до окончания обслуживания и т. п. Эффективностью функционирования информационных систем может характеризоваться объемом и достоверностью переданной информации. Системы энергетики часто характеризуют дополнительной характеристикой, ущербом потребителя от недоотпуска топлива или электроэнергии.

В дальнейшем под эффективностью будем понимать некоторую количественную меру выходного эффекта системы. Если особо не будет оговорено, то предполагается при этом, что чем эффективнее система, тем выше ее показатель эффективности. (Другие случаи, например когда эффективность характеризуется показателями точности и т. п., будут специально разъясняться по тексту).

Выбор соответствующего показателя эффективности функционирования в каждом конкретном случае определяется типом системы, ее назначением, видом выполняемой задачи, характером различных внешних условий и другими факторами.

Можно оценивать эффективность функционирования систем двух типов: длительного и кратковременного действия.

Система длительного действия выполняет некоторую требуемую от нее задачу в течение интервала времени длительностью t_0 , начиная с некоторого t . Эффективность функционирования такой системы зависит от конкретной реализации процесса изменения состояний системы в течение этого периода.

Система кратковременного действия выполняет задачи, продолжительность решения которых t_0 такова, что за это время система наверняка остается в одном и том же состоянии. Иными словами, фактически, говоря о системах кратковременного действия, подразумевают системы мгновенного действия, т. е. «полагают»,

что $t_0 = 0$. Ясно, что системы кратковременного действия являются частным случаем системы длительного действия.

В некоторый произвольный момент времени каждый элемент системы может находиться в определенном состоянии: работоспособности или отказа. Совокупность состояний элементов системы однозначно определяет состояние системы в целом.

С течением времени система переходит из состояния в состояние из-за изменения состояний входящих в ее состав элементов (отказы элементов, их восстановление, различные внешние воздействия и пр.). Каждое конкретное состояние системы кратковременного действия может быть охарактеризовано вполне определенным условным показателем эффективности функционирования. Этот показатель количественно характеризует результат выполнения функций системой, находящейся именно в данном состоянии.

Каждая конкретная реализация процесса переходов системы длительного действия из состояния в состояние может быть также охарактеризована вполне определенным условным показателем эффективности функционирования. Этот показатель количественно характеризует результат выполнения системой своих функций при условии, что система при этом во время работы имела именно данную реализацию процесса переходов из одного состояния в другое.

8.2. СИСТЕМЫ КРАТКОВРЕМЕННОГО ДЕЙСТВИЯ

Если обозначить через $h_s(t)$ вероятность того, что система кратковременно-го действия в момент времени t находится в s -м состоянии, а через Φ_s — коэффициент эффективности данного состояния (условный показатель эффективности функционирования системы в s -м состоянии), то показатель эффективности функционирования системы кратковременного действия может быть определен по формуле

$$E(t) = \sum_s h_s(t) \Phi_s, \quad (8.1)$$

где суммирование производится по всем состояниям системы.

В ряде случаев оказывается, что, несмотря на большое число состояний системы, все они могут быть разбиты на небольшое число классов, каждый из которых характеризуется определенным значением коэффициента эффективности состояния. (В частности, такая ситуация может возникнуть, если уровни коэффициентов эффективности выбирать с некоторым шагом.)

Тогда эффективность системы удобнее вычислять по модифицированной формуле

$$E = \sum_{k=1}^N \Phi_h \sum_{s \in S_h} h_s(t),$$

где Φ_h — некоторый уровень коэффициента эффективности; N — число таких уровней; S_h — множество тех состояний, для которых коэффициент эффективности равен Φ_h .

Для системы, состоящей из n взаимно независимых элементов, каждый из которых может находиться лишь в двух состояниях (работоспособности и отказа), вероятности $h_s(t)$ легко выражаются через показатели надежности элементов системы:

вероятность того, что все элементы работоспособны,

$$h_0(t) = \prod_{i=1}^n r_i(t); \quad (8.2)$$

вероятность того, что в состоянии отказа находится только i -й элемент системы,

$$h_i(t) = \frac{q_i(t)}{r_i(t)} \prod_{k=1}^n r_k(t) = \gamma_i(t) h_0(t); \quad (8.3)$$

вероятность того, что в состоянии отказа находятся только i -й и j -й элементы системы,

$$h_{ij}(t) = \gamma_i(t) \gamma_j(t) h_0(t) \quad (8.4)$$

и т. д.
Вообще

$$h_s(t) = \prod_{i \in G_1} r_i(t) \prod_{i \in G_2} [1 - r_i(t)],$$

где G_1 и G_2 — соответственно подмножества работоспособных и отказавших элементов в случае, когда система находится в состоянии s ; $r_i(t)$ — вероятность состояния работоспособности i -го элемента системы в момент времени t ;

$$q_i(t) = 1 - r_i(t); \quad \gamma_i(t) = q_i(t) / r_i(t).$$

Естественно, что для невосстанавливаемых систем $r_i(t)$ совпадает с вероятностью безотказной работы за время t , а для восстанавливаемых — с нестационарным коэффициентом готовности в момент времени t . Вероятности, имеющие смысл стационарных коэффициентов готовности, будем обозначать r .

Формулу (8.1) можно переписать в развернутом виде, используя (8.2)—(8.4):

$$E(t) = \Phi_0 h_0(t) \left[1 + \sum_{1 \leq i \leq n} \Phi_i^* \gamma_i(t) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \Phi_{ij}^* \gamma_i(t) \gamma_j(t) + \dots \right], \quad (8.5)$$

где Φ_0 — коэффициент эффективности состояния, характеризуемого работоспособностью всех элементов системы $\Phi_i^* = \Phi_i / \Phi_0$, $\Phi_{ij}^* = \Phi_{ij} / \Phi_0$ и т. д., где, в свою очередь, $\Phi_{ij} \dots k$ — коэффициент эффективности состояния, характеризующего отказами элементов $i, j, \dots, k$.

Естественно, что в выражении (8.5) подразумевается, что $\Phi_0 \geq \Phi_i$, $\Phi_i \geq \Phi_{ij}$ и т. д. для всех $i, j = 1, 2, \dots, n$, причем $\Phi_0 \neq 0$.

Если имеет место условие

$$\max_{1 \leq i \leq n} q_i(t) \ll 1/n, \quad (8.6)$$

то эффективность функционирования системы может быть оценена по приближенной формуле

$$\tilde{E}(t) \approx \Phi_0 \left[1 - \sum_{i=1}^n q_i(t) (1 - \Phi_i^*) \right], \quad (8.7)$$

где $1 - \Phi_i^*$ имеет смысл значимости i -го элемента.

Формула (8.7) дает заниженную оценку по сравнению с истинным значением. Погрешность (8.7) не превышает

$$\delta = C_n^2 \left[\max_{1 \leq i \leq n} q_i(t) \right]^2 \Phi_0.$$

Если $r_i(t)$ имеет смысл вероятности безотказной работы, причем для каждого элемента распределение времени до отказа экспоненциальное с параметром λ_i , то при выполнении условия (8.6) можно записать

$$\tilde{E}(t) \approx \Phi_0 \exp [- t \sum \lambda_i (1 - \Phi_i^*)].$$

Если r_i имеет смысл стационарного коэффициента готовности (в предположении неограниченного восстановления и независимости элементов), т. е. $r_i = T_i \times \times (T_i + \tau_i)^{-1}$, где T_i и τ_i — соответственно средняя наработка до отказа и среднее время простоя i -го элемента, то с учетом (8.5) можно записать

$$\tilde{E}(t) \approx \Phi_0 \prod_{i=1}^n \frac{T_i}{T_i + \tau_i (1 - \Phi_i^*)} \approx \Phi_0 \left[1 - \sum_{i=1}^n \frac{\tau_i (1 - \Phi_i^*)}{T_i} \right].$$

Пример 8.1. Радиолокационная система аэропорта, предназначенная для просмотра пространства в пределах 180° , обслуживается двумя одинаковыми станциями a и b . Станция a перекрывает пространство в пределах сектора $0-110^\circ$, а станция b — в пределах сектора $70-180^\circ$. Среднюю наработку до отказа каждой станции примем равной 95 ч, а среднее время простоя 5 ч. Тогда коэффициент готовности отдельной станции $K = 0,95$. Вероятность обнаружения самолета в зоне действия одной станции $p = 0,9$, а в зоне действия одновременно двух станций (в зоне перекрытия) $P = 1 - (1 - p)^2 = 0,99$.

Требуется найти эффективность, определяемую в данном случае как вероятность обнаружения на заданной дальности подлетающего самолета, появляющегося в произвольный момент времени с равной вероятностью на любом азимутальном направлении в пределах сектора $0-180^\circ$.

Решение. Рассмотрим состояние S_0 . Вероятность того, что система в некоторый момент времени будет в этом состоянии, $h_0 = K^2 = 0,9025$. При этом в пределах сектора $70-110^\circ$, т. е. в пределах 40° , действуют сразу две станции, а в пределах секторов $0-70^\circ$ и $110-180^\circ$, т. е. в пределах 140° , — по одной станции. Таким образом, коэффициент эффективности состояния S_0 , определяемый как средневзвешенное значение,

$$\Phi_0 = (40^\circ/180^\circ) 0,99 + (140^\circ/180^\circ) 0,9 = 0,92.$$

Перемножив значения h_0 и Φ_0 , получим $h_0\Phi_0 = 0,828$. Вероятность состояния S_a (отказала станция b)

$$h_a = K(1 - K) = 0,0495.$$

В этом состоянии в пределах сектора $0-110^\circ$ действует одна станция, а в пределах сектора $110-180^\circ$ — ни одной, т. е.

$$\Phi_a = (110^\circ/180^\circ) 0,9 = 0,55.$$

Следовательно,

$$h_a\Phi_a = 0,028.$$

Так как состояния S_a и S_b абсолютно идентичны, можно записать

$$h_b\Phi_b = 0,028.$$

В результате

$$E = h_0\Phi_0 + 2h_a\Phi_a = 0,828 + 0,056 = 0,883.$$

Для высоконадежных систем показатель эффективности удобно представить в виде разложения по степеням q_i . В этом случае формула (8.5) имеет вид

$$E = \Phi_0 \left\{ 1 - \sum_{i \leq i \leq n} q_i (1 - \Phi_i^*) + \sum_{i \leq i < j \leq n} q_i q_j [1 - (\Phi_i^* + \Phi_j^*) + \Phi_{ij}^*] - \dots \right\}.$$

Удобно записать следующее формальное выражение:

$$E = \Phi_0 \prod_{i=1}^n [1 - q_i (1 - \Phi_i^*)],$$

в котором перемножаются величины Φ_{α}^* , где α — некоторый набор индексов $i = 1, 2, \dots, n$, осуществляется по правилу

$$\Phi_{\alpha'}^* \cdot \Phi_{\alpha''}^* = \Phi_{\alpha' \cup \alpha''}^*.$$

Здесь $\alpha' \cup \alpha''$ означает объединение индексов, входящих в α' и α'' (с учетом операции поглощения).

8.3. СИСТЕМЫ ДЛИТЕЛЬНОГО ДЕЙСТВИЯ

Если обозначить через $dh_{\pi}(t, t + t_0)$ элемент вероятности того, что система длительного действия в интервале $[t, t + t_0]$ имела π -ю реализацию процесса перехода из одного состояния в другое, и через Φ_{π} условный показатель эффективности функционирования системы для этой реализации процесса, то показатель эффективности функционирования системы длительного действия может быть определен по формуле

$$E(t, t + t_0) = \int_{G_{\pi}} \Phi_{\pi} dh_{\pi}(t, t + t_0), \quad (8.8)$$

где интегрирование производится по пространству всех возможных реализаций процесса перехода системы из одного состояния в другое в интервале времени $[t, t + t_0]$.

Для системы, состоящей из n независимых невосстанавливаемых элементов, каждый из которых может находиться лишь в двух состояниях (работоспособности и отказа), формулу (8.8) можно записать в виде

$$E(t, t + t_0) = \Phi_0 H_0 \left\{ 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} \int_t^{t+t_0} \Phi_i(x_i) f_i(x_i) dx_i + \right. \\ \left. + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{r_i r_j} \int_t^{t+t_0} f_i(x_i) dx_i \int_t^{t+t_0} \Phi_{ij}(x_i, x_j) f_j(x_j) dx_j + \dots \right\},$$

где Φ_0 — условный показатель эффективности функционирования системы при условии, что ни один из элементов не отказал в интервале $[t, t + t_0]$; $\Phi_i(x_i)$ — условный показатель эффективности функционирования системы при условии, что отказал только i -й элемент, причем отказ его произошел в момент времени $x_i \times (t < x_i < t + t_0)$; $\Phi_{ij}(x_i, x_j)$ — условный показатель эффективности функционирования системы при условии, что отказали только i -й и j -й элементы, причем отказы их произошли в моменты времени x_i и x_j соответственно ($t < x_i < t + t_0$, $t < x_j < t + t_0$) и т. д.; H_0 — вероятность того, что ни один из элементов системы не откажет в течение интервала $[t, t + t_0]$:

$$H_0 = \prod_{i=1}^n r_i(t, t + t_0);$$

$f_i(x_i)$ — плотность вероятности отказа i -го элемента в момент времени x_i .

Если выполняется условие

$$\max_{1 \leq i \leq n} q_i(t, t + t_0) = \max_{1 \leq i \leq n} \int_t^{t+t_0} f_i(x_i) dx_i \ll 1/n,$$

то возможна приближенная оценка

$$\bar{E} \approx \Phi_0 \left\{ 1 - \sum_{i=1}^n \left[q_i(t, t + t_0) - \int_t^{t+t_0} \Phi_i^*(x_i) f_i(x_i) dx_i \right] \right\},$$

где $\Phi_i^*(x_i) = \Phi_i(x_i)/\Phi_0$.

Погрешность оценки не превышает величины

$$\delta = C_n^2 \max_{1 \leq i \leq n} [q_i(t, t+t_0)]^2 \Phi_0.$$

Пример 8.2. Рассматривается система накопления информации, состоящая из двух одинаковых приемников a и b . В случае работоспособности обоих приемников пропускная способность системы оценивается некоторой величиной A . Пусть при отказе одного из приемников пропускная способность системы падает, например, до $B = 0,3 A$. При отказе двух приемников сбор информации прекращается. Вероятность безотказной работы каждого приемника распределяется по экспоненциальному закону и характеризуется интенсивностью отказов λ , т. е. $r = e^{-\lambda t}$. Длительность выполнения задачи $t = 0,1/\lambda$. Отказы приемников предполагаются независимыми. Для различных реализаций процесса перехода системы из одного состояния в другое известны следующие коэффициенты эффективности:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= At; \quad \Phi_i(x_i) = Bt + (A - B)x_i, \quad i = a, b; \\ \Phi_{ij}(x_i, x_j) &= B \max(x_i, x_j) + (A - B) \min(x_i, x_j). \end{aligned}$$

Иначе говоря, показатель эффективности системы для каждой траектории определяется как объем накопленной информации (произведение пропускной способности на время функционирования).

Требуется определить показатель эффективности системы.

Решение. Оценка эффективности проводится по формуле (8.8). Для рассматриваемого случая

$$\begin{aligned} E &= r^2 At + 2r \int_0^t [Bt + (A - B)x] \lambda e^{-\lambda x} dx + \\ &+ 2 \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx \int_0^x [Bx + (A - B)y] \lambda e^{-\lambda y} dy. \end{aligned}$$

После вычисления интегралов и подстановки численных значений, например $r = 0,905$ и $t = 0,1\lambda^{-1}$, получаем

$$E = (0,819 + 0,109 + 0,004) At = 0,932.$$

8.4. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

8.4.1. Системы с аддитивным коэффициентом эффективности. Ряд систем характеризуется очень простым видом коэффициента эффективности: каждый элемент такой системы вносит свою определенную и независимую долю в общий выходной эффект. Такого типа условные показатели эффективности характерны для систем, представляющих собой совокупность, например, транспортных средств или систем сбора информации.

Если некоторый i -й элемент такой системы вносит в общий выходной эффект некоторую долю Φ_i , то для систем кратковременного действия такого типа в момент времени t

$$E = \sum_{i=1}^n \Phi_i r_i(t), \quad (8.9)$$

где $r_i(t)$ — вероятность состояния работоспособности i -го элемента в момент времени t .

Пример 8.3. Рассмотрим систему кратковременного действия (рис. 8.1). Выходной эффект системы представляет собой сумму выходных эффектов конечных элементов. Элементы 0-го и 1-го рангов не вносят своего вклада в общий эф-

Исходные данные для примера 8.3

Номер элемента (рис. 8.1)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K	0,99	0,98	0,97	0,7	0,9	0,8	0,8	0,7	0,9	0,95	0,95
φ	—	—	—	10	8	8	5	5	5	10	20

фект системы, а могут представлять собой, например, некоторые управляющие или распределительные органы. Система может представлять собой, например, энергосеть, у которой оконечные элементы служат для питания некоторых объектов. В этом случае выходной эффект системы в любой момент времени может быть равен суммарной мощности, отдаваемой потребителю. Значения коэффициентов готовности K_i и выходные эффекты φ_i всех элементов системы представлены в табл. 8.1

Требуется найти выходной эффект системы при условии, что элементы системы независимы.

Решение. Заметим, что i -й оконечный элемент выполняет работу, если работоспособен он сам, а также соответствующие элементы 1-го и 0-го рангов. Например, вероятность работоспособного состояния седьмого элемента равна $r_7 = K_0 K_1 K_7$. Учитывая это и используя формулу (8.9), получаем

$$E = K_0 \left(K_1 \sum_{i=3}^7 K_i \varphi_i + K_2 \sum_{i=8}^{10} K_i \varphi_i \right).$$

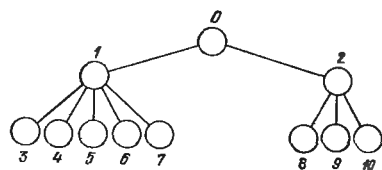


Рис. 8.1. Схема системы для примера 8.1

Подставив численные значения, находим

$$E = 0,99 (0,98 \cdot 28,1 + 0,97 \cdot 23) \approx 49,35.$$

Для систем длительного действия, у которых i -й элемент дает вклад $\varphi_i(t)$ в общий выходной эффект системы в случае отказа в момент $t \leq t_i \leq t + t_0$, можно записать

$$E(t, t + t_0) = \sum_{i=1}^n \left[r_i(t, t + t_0) \varphi_{0i} + \int_t^{t+t_0} f_i(x_i) \varphi_i(x_i) dx_i \right],$$

где φ_{0i} — вклад i -го элемента в общий выходной эффект системы при безотказной работе в интервале времени $[t, t + t_0]$.

Пример 8.4. Система длительного действия, предназначенная для накопления информации, состоит из трех элементов, пропускная способность каждого из которых: $\varphi_1 = 100$ бит/с; $\varphi_2 = 200$ бит/с и $\varphi_3 = 250$ бит/с (бит — двоичная единица информации), а интенсивности отказов этих элементов: $\lambda_1 = 0,01$ ч⁻¹; $\lambda_2 = 0,03$ ч⁻¹ и $\lambda_3 = 0,04$ ч⁻¹. Вероятность безотказной работы каждого элемента распределена по экспоненциальному закону. Требуется определить с учетом отказов среднюю пропускную способность системы в момент времени $t = 10$ ч и количество собранной информации при непрерывной работе системы с полной нагрузкой в течение $t_0 = 50$ ч.

Р е ш е н и е. Средняя пропускная способность системы для произвольного момента времени t

$$E(t) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i e^{-\lambda_i t}.$$

Подставив численные значения для $t = 10$ ч, получим $E(10) = 100 e^{-0,1} + 200 e^{-0,3} + 250 e^{-0,4} = 405,5$ бит/с.

В данной задаче $\varphi_{0i} = \varphi_i t_0$, а $\varphi_i(t_i) = \varphi_i t_i$. Тогда

$$E(0, t_0) = \sum_{i=1}^3 \left(e^{-\lambda_i t_0} \varphi_i t_0 + \int_0^{t_0} \lambda_i \varphi_i x e^{-\lambda_i x} dx \right) = \sum_{i=1}^3 \frac{\varphi_i}{\lambda_i} (1 - e^{-\lambda_i t_0}).$$

Заметим, что если функция $\varphi_i(t_i)$ линейна, то количество собранной информации к моменту времени t можно определить проще:

$$\begin{aligned} E(0, t) &= \int_0^t E(x) dx = \int_0^t \sum_{i=1}^3 \varphi_i e^{-\lambda_i x} dx = \\ &= \sum_{i=1}^3 \int_0^t \varphi_i e^{-\lambda_i x} dx = \sum_{i=1}^3 \frac{\varphi_i}{\lambda_i} (1 - e^{-\lambda_i t}). \end{aligned}$$

После приведения φ и λ к одинаковым единицам времени и подстановки численных значений получим

$$E(0,50) = \left(\frac{100}{0,01} \cdot 0,39 + \frac{200}{0,03} \cdot 0,78 + \frac{250}{0,04} \cdot 0,86 \right) \cdot 3600 \approx 5,2 \cdot 10^7 \text{ бит.}$$

8.4.2. Многофункциональные системы. Многофункциональной будем называть такую систему, которая может выполнять одну и ту же задачу различными способами, характеризующимися различными показателями эффективности, причем при любом состоянии системы всегда выбирается тот способ, который для данного состояния наиболее эффективен.

Рассмотрим систему, состоящую из n элементов. Пусть некоторая задача может выполняться m различными способами, причем при выполнении задачи j -м способом условный показатель эффективности системы равен Φ_j . Положим для определенности $\Phi_1 > \Phi_2 > \dots > \Phi_m$.

Разобьем систему на m подсистем $G_1, G_2, \dots, G_m$ таким образом, чтобы в каждую подсистему входили те элементы, которые обеспечивают выполнение задачи j -м способом (отдельные элементы могут в общем случае входить в состав нескольких подсистем, т. е. могут участвовать в выполнении одной и той же задачи различными способами).

Для двух частных случаев можно записать сравнительно простые выражения для оценки эффективности функционирования.

1. Каждый элемент может входить в состав только одной подсистемы. В этом случае вероятность того, что задача будет выполняться j -м способом, равна

$$H_j = P_j \prod_{k=1}^{j-1} Q_k,$$

где P_j — вероятность безотказной работы j -й подсистемы; Q_j — вероятность отказа j -й подсистемы.

Формула для оценки эффективности функционирования системы

$$E = \sum_{j=1}^m \Phi_j P_j \prod_{k=1}^{j-1} Q_k.$$

**Состав оборудования и показатели технической эффективности системы
для различных способов выполнения задачи**

Номер способа выполнения задачи	Этапы выполнения задачи			Показатель технической эффективно- сти
	поиск	обнаружение	сопровождение	
1	Локатор поиска	Индикатор	Локатор сопровожде- ния	1,00
2	Локатор сопровожде- ния	Индикатор	Локатор сопровожде- ния	0,60
3	Локатор поиска	Индикатор	Оптическое устройст- во и вычислитель	0,30
4	Оптическое устройст- во	Оптическое устройст- во	Оптическое устройст- во и вычислитель	0,15
5	Оптическое устройст- во	Оптическое устройст- во	Оптическое устройст- во	0,10

2. Подсистемы G_j «вкладываются» друг в друга, т. е. для выполнения задачи первым способом требуется, чтобы все элементы были работоспособны, вторым способом — не все элементы, а лишь часть, третьим способом — еще меньше элементов и т. д. Иначе говоря, $G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_m$.

Обозначим через G_{j-1}^* множество элементов системы, принадлежащих подсистеме G_{j-1} и в то же время не принадлежащих подсистеме G_j . По принципу работы рассматриваемой системы задача будет выполняться именно j -м способом при условии, если все элементы подсистемы G_j работоспособны, а в подсистеме G_{j-1}^* есть хотя бы один отказавший элемент (при этом уже неважно, будут ли отказавшие элементы среди элементов G_{j-2}^* , G_{j-3}^* и т. д.).

Для этого случая вероятность выполнения системой задачи j -м способом

$$H_j = P_j - P_{j-1}.$$

Формула для оценки эффективности функционирования системы

$$E = \sum_{j=1}^m \Phi_j (P_j - P_{j-1}),$$

или

$$E = \sum_{j=1}^m P_j (\Phi_{j+1} - \Phi_j),$$

где $P_0 = 1$; $\Phi_{m+1} = 0$.

Пример 8.5. Рассматривается система, от которой требуется последовательное выполнение трех этапов: поиск, обнаружение и сопровождение некоторого объекта. На каждом этапе выполнение функций может быть осуществлено несколькими способами. Возможные комбинации способов выполнения каждого отдельного этапа, обеспечивающие решение системой своей задачи, и соответствующие этим комбинациям показатели технической эффективности приведены в табл. 8.2. Кроме того, для выполнения задачи любым способом необходимо, чтобы пульт управления был исправным. Значения вероятностей безотказной работы отдельных элементов системы для некоторого момента времени (индексы элементов взяты в соответствии с рис. 8.2) равны: $r_1 = 0,80$; $r_2 = 0,99$; $r_3 = 0,80$; $r_4 = 0,95$; $r_5 = 0,90$; $r_6 = 0,95$.

Требуется вычислить полную вероятность выполнения системой задачи.

Решение. Выполнение задачи первым способом будет производиться с вероятностью

$$h_1 = r_1 r_3 r_4 r_5 r_6 \approx 0,52$$

(работает или не работает оптическое устройство, в этом случае не играет роли).

Выполнение задачи вторым способом будет производиться только в случае, если произошел отказ лоатора поиска с вероятностью

$$h_2 = q_1 r_3 r_4 r_5 r_6 \approx 0,13.$$

Выполнение задачи третьим способом будет производиться только в случае, если произошел отказ лоатора сопровождения с вероятностью

$$h_3 = q_3 r_1 r_4 r_5 r_6 \approx 0,13.$$

Выполнение задачи четвертым способом будет производиться в том случае, если произошли отказы либо: индикатора; индикатора и лоатора поиска; индикатора и лоатора сопровождения; индикатора, лоатора поиска и лоатора сопровождения; лоатора поиска и лоатора сопровождения.

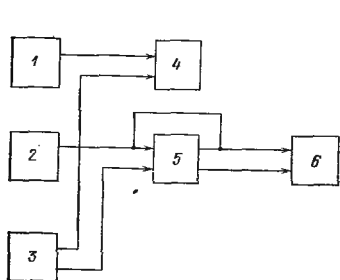


Рис. 8.2. Схема многофункциональной системы для примера 8.5:

1 — лоатор поиска; 2 — оптическое устройство; 3 — лоатор сопровождения; 4 — индикатор; 5 — вычислитель; 6 — пульт управления

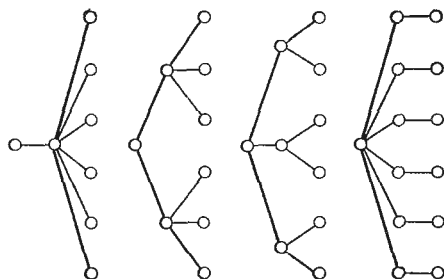


Рис. 8.3. Различные варианты ветвящейся структуры второго порядка с шестью выходными элементами (для примера 8.6)

Во всех этих случаях оптическое устройство и вычислитель предполагаются исправными. Вероятность этого события

$$h_4 = r_2 r_5 r_6 (q_4 q_1 r_3 + q_4 q_1 r_3 + q_4 q_1 q_3 + r_4 q_1 q_3) \approx 0,08.$$

И, наконец, выполнение задачи пятым способом производится только в случае, если дополнительно еще отказало вычислительное устройство, с вероятностью

$$h_5 = r_2 q_5 r_6 (q_4 + q_1 q_3 r_4) \approx 0,01.$$

Окончательное значение полной вероятности выполнения задачи

$$E = 0,52 \cdot 1 + 0,13 \cdot 0,6 + 0,13 \cdot 0,3 + 0,08 \cdot 0,15 + 0,01 \cdot 0,1 = 0,66.$$

Расчет же вероятности того, что в такой системе не произойдет ни одного отказа, дает значение 0,51.

8.4.3. Системы с симметричной ветвящейся структурой. Многие системы имеют ветвящуюся структуру, состоящую из двух частей: управляющей части и совокупности конечных (исполнительных) элементов. Будем говорить, что исполнительный элемент системы нормально функционирует, если он сам работоспособен и работоспособны все элементы, необходимые для управления им.

Если коэффициент эффективности состояния такой системы зависит только от z — числа нормально функционирующих конечных элементов и задается в виде

функции $\Phi(z)$, то для оценки эффективности достаточно знать начальные моменты распределения.

Эффективность функционирования подобной системы может быть определена по формуле

$$E = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^{(k)}}{k!} \left. \frac{d^k \Phi(z)}{dz^k} \right|_{z=0},$$

где $M^{(k)}$ — k -й начальный момент распределения числа нормально функционирующих исполнительных элементов; $\left. \frac{d^k \Phi(z)}{dz^k} \right|_{z=0}$ — k -я производная $\Phi(z)$ по z с последующей подстановкой $z = 0$ [при условии, что аппроксимирующая функция $\Phi(z)$ дифференцируема]. Обычно функция $\Phi(z)$ может быть достаточно хорошо аппроксимирована полиномом невысокой степени.

Начальные моменты $M^{(k)}$ могут быть найдены на основании следующего рекуррентного соотношения для моментной производящей функции:

$$\varphi_n(z) = \varphi_{n-1}((r_n e^z + q_n)^{a_n}),$$

где a_i — коэффициент разветвления i -го ранга, т. е. число элементов i -го ранга, которые подчинены одному элементу $(i-1)$ -го ранга. В частности, первые два начальных момента имеют вид:

$$M_n^{(1)} = M_{n-1}^{(1)} a_n r_n = r_0 \prod_{i=1}^n a_i r_i;$$

$$M_n^{(2)} = M_{n-1}^{(2)} (a_n r_n)^2 + M_{n-1}^{(1)} r_n q_n a_n. \quad (8.10)$$

Пример 8.6. Рассмотрим различные варианты ветвящихся систем второго порядка, имеющих шесть выходных элементов (рис. 8.3). Допустим сначала, что $\Phi(z) = C_1 z$, т. е. эффективность функционирования системы пропорциональна количеству нормально функционирующих выходных элементов (к таким системам могут быть отнесены транспортные системы, системы связи и т. п.).

Тогда эффективность системы с учетом выражения для $M^{(1)}$

$$E = C_1 M^{(1)} = C_1 r_0 = C_1 r_0 \prod_{i=1}^n a_i r_i.$$

Так как $\prod_{i=1}^n a_i = N_n$ — число всех исполнительных (выходных) элементов, получаем

$$E = C_1 N_n \prod_{i=1}^n r_i.$$

Из этой формулы можно сделать интересный вывод, что все системы, изображенные на рис. 8.3, при данном выбранном показателе $\Phi(z)$ эквивалентны по эффективности.

Допустим теперь, что $\Phi(z) = C_2 z^2$, т. е. эффективность функционирования пропорциональна квадрату числа нормально функционирующих выходных элементов. Это имеет место при некоторых игровых ситуациях (например, в моделях, описываемых квадратичным законом Ланчестера). Для такого случая эффективность функционирования

$$E = C_2 M^{(2)}.$$

Для высоких значений вероятности состояний работоспособности элементов (т. е. $q_i \ll 1/N_n$) формулу начального момента второго порядка (8.10) приближенно можно записать в виде

$$M^{(2)} \approx 4N_n^2 \left[1 - \sum_{i=1}^n q_i \left(1 - \frac{1}{N_i} \right) \right].$$

Полагая для простоты $q_0 = q_1 = q_2 = q$, получаем:

$$E_a \approx 2C_2 N^2 (1 - 0,83 q); \quad E_b \approx 2C_2 N^2 (1 - 1,33 q);$$

$$E_c \approx 2C_2 N^2 (1 - 1,5 q); \quad E_d \approx 2C_2 N^2 (1 - 1,67 q)$$

(здесь индексы у E соответствуют рис. 8.3).

Следовательно, в этом случае предпочтительнее система с наибольшим значением a_2/a_1 .

8.4.4. Системы с резервированием функций. Имеется целый ряд систем кратковременного действия, в которых выполнение одной и той же задачи может осуществляться, например, несколькими самостоятельными исполнительными элементами. Выполнение задачи хотя бы одним из элементов является достаточным, чтобы система в целом выполнила свою задачу. Пусть вероятность выполнения задачи одним элементом равна φ_S при условии, что система находится в S -м состоянии. Требуется определить вероятность выполнения задачи хотя бы одним из N исполнительных элементов.

Такая задача может быть решена для двух основных случаев.

1. Исполнительные элементы системы выполняют задачу одновременно и независимо, т. е. для всех элементов вероятность выполнения задачи равна φ_S .

Для этого случая оценка эффективности функционирования

$$E = \sum_S H_S [1 - (1 - \varphi_S)^N],$$

где H_S — вероятность того, что система находится в S -м состоянии; $1 - (1 - \varphi_S)^N$ — условная вероятность выполнения системой задачи при N -кратном резервировании функции при условии, что система находится в S -м состоянии.

Пример 8.7. Пусть по некоторой цели можно сделать залп из двух выстрелов. Если в момент залпа устройство точной наводки исправно, то вероятность попадания с одного выстрела $\varphi_1 = 0,85$, а если это устройство отказало, то вероятность попадания с одного выстрела $\varphi_2 = 0,58$. Пусть вероятность безотказной работы устройства точной наводки $r = 0,7$. (Предполагается независимость попаданий с каждого выстрела.) Требуется определить полную вероятность попадания.

Решение. Полная вероятность попадания

$$E = r [1 - (1 - \varphi_1)^2] + q [1 - (1 - \varphi_2)^2],$$

или после подстановки численных значений

$$E = 0,7 (1 - 0,15^2) + 0,3 (1 - 0,42^2) = 0,931.$$

2. Исполнительные элементы выполняют задачу в различные моменты времени, т. е. для каждого элемента вероятность выполнения задачи равна величине φ_S , соответствующей состоянию системы в момент выполнения задачи данным элементом.

В этом случае формула оценки эффективности

$$E = 1 - \left(1 - \sum_S H_S \varphi_S \right)^N.$$

Пример 8.8. Изменим несколько условий предыдущего примера. Пусть по цели производятся теперь два независимых выстрела (например, если в один и тот же момент по одному выстрелу производят две независимые артиллерийские системы).

Требуется определить полную вероятность попадания.

Решение. Полная вероятность попадания

$$E = 1 - [1 - (r\varphi_1 + q\varphi_2)]^2$$

или после подстановки тех же численных значений, что и в предыдущем примере,

$$E = 1 - [1 - (0,7 \cdot 0,85 + 0,3 \cdot 0,58)]^2 = 0,947.$$

Рассмотрим систему с ветвящейся структурой, у которой все конечные элементы являются резервными по отношению к выполнению некоторой операции, причем каждый из них независимо выполняет эту операцию с вероятностью φ . Предположим, что конечные элементы выполняют операцию независимо, т. е. если в системе нормально функционирует z конечных элементов, то коэффициент эффективности этого состояния $\Phi_z = 1 - (1 - \varphi)^z$. Вероятность выполнения операции системой в целом может быть вычислена по формуле

$$E = 1 - (r_0(r_1(r_2 \dots r_{n-1}(r_n(1 - \varphi) + q_n)^{a_n} + q_{n-1})^{a_{n-1}} + \dots + q_1)^{q_1} + q_0).$$

8.4.5. Системы с мультипликативным коэффициентом эффективности. Существуют системы, которые можно считать определенным обобщением последовательных систем. Эти системы состоят из ряда подсистем, для каждой из которых может быть найден свой показатель эффективности, а показатель эффективности системы в целом представляется при этом как произведение показателей эффективности этих подсистем. В общем случае состояние каждой подсистемы (т. е. принимаемое значение показателя эффективности для каждой подсистемы) может оказывать влияние на показатель эффективности других подсистем системы. Однако если этого не происходит, то

$$E = \prod_{i=1}^n E_i, \quad (8.11)$$

где E_i — показатель эффективности i -й подсистемы.

Выражение (8.11) справедливо в следующем случае. Пусть S — состояние системы в целом, а S_i — соответствующее этому состоянию состояние i -й подсистемы, $i = 1, \dots, m$. Тогда необходимо, чтобы для всякого S^* выполнялось следующее условие для коэффициентов эффективности состояний:

$$\Phi(S^*) = \prod_{i=1}^n \Phi_i(S_i^*).$$

8.4.6. Системы с пересекающимися зонами действия. Рассмотрим систему, состоящую из n элементов. С вероятностью r_i элемент с номером i находится в исправном состоянии. Каждый i -й элемент распространяет результаты своего функционирования на некоторую зону σ_i . В общем случае зоны действия элементов системы могут пересекаться, образуя зоны σ_{ij} , σ_{ijk} и т. д., на которые одновременно могут распространять свое влияние соответственно элементы i и j — в первом случае, i , j и k — во втором и т. д. Объединение всех зон действия элементов представляет собой область действия системы в целом:

$$\sigma = \bigcup_{i=1}^n \sigma_i. \quad (8.12)$$

Пусть некоторая зона σ_{α_j} есть зона пересечения индивидуальных зон элементов системы с множеством номеров $\alpha_j = (i_1, i_2, \dots, i_{n_j})$, т. е. в этой зоне пересечения может одновременно действовать n_j элементов. Тогда (8.12) запишется в виде

$$\sigma = \sum_{j=1}^{2^n} \sigma_{\alpha_j}.$$

Когда элементы системы могут отказывать, в зоне σ_{α} может действовать случайное число элементов, образующих некоторое множество $\alpha^* \subseteq \alpha$.

Будем считать, что вклад в эффективность системы от зоны пересечения σ_{α} пропорционален размеру зоны, а также коэффициенту эффективности $\Phi_{\alpha|\alpha^*}$ для этой зоны при условии, что в рассматриваемый момент времени работоспособно подмножество элементов α^* .

Учитывая возможные состояния элементов, можно вычислить математическое ожидание функции эффективности $M\Phi_{\alpha_j}$ для зоны σ_{α_j} ; тогда интегральная эффективность подобных систем

$$E = \sum_{j=1}^{2^n} \sigma_{\alpha_j} M\Phi_{\alpha_j}.$$

(Заметим, что для больших систем число зон пересечения практически бывает существенно меньше 2^n .)

Подобный подход позволяет получить достаточно компактные расчетные формулы для важных частных случаев.

1. Аддитивный коэффициент эффективности в зоне σ_{α} . В этом случае для любого α^* :

$$\Phi_{\alpha^*} = \sum_{i \in \alpha^*} \Phi_i; \quad E = \sum_{i=1}^n r_i \sigma_i \Phi_i.$$

2. Мультипликативный коэффициент эффективности в зоне σ_{α} . Полагаем $0 \leq \Phi_i \leq 1$ и $\Phi_{\alpha^*} = \prod_{i \in \alpha^*} \Phi_i$, где $\Phi_{\alpha^*} = 1$, если все элементы из множества σ_{α} отказали, и

$$E = \sum_{j=1}^{2^n} \sigma_{\alpha_j} \prod_{i \in \alpha_j} (\Phi_i r_i + q_i).$$

(По смыслу показатель эффективности убывает при росте числа работоспособных элементов, контролирующих данную зону, т. е. на самом деле здесь уместнее говорить скорее о наносимом ущербе.)

3. Показатель типа резервного действия элементов в зоне σ_{α} . В этом случае

$$\Phi_{\alpha^*} = 1 - \prod_{i \in \alpha^*} \omega_i, \quad \text{где } \omega_i = 1 - \Phi_i; \quad E = \sum_{j=1}^{2^n} \sigma_{\alpha_j} \left[1 - \prod_{i \in \alpha_j} (r_i \omega_i + q_i) \right].$$

4. Показатель типа булева перекрытия в зоне σ_{α} . В этом случае все элементы, действующие в данной зоне, являются как бы включенными параллельно в смысле надежности, т. е. достаточно, чтобы работал нормально хотя бы один из них, и функционирование будет обеспечено в зоне перекрытия с определенным показателем эффективности, т. е.

$$\Phi_{\alpha^*} = \Phi_{\alpha},$$

если α^* включает в себя индекс хотя бы одного элемента, и

$$E = \Phi_{\alpha} \sum_{j=1}^{2^n} \sigma_{\alpha_j} \left[1 - \prod_{i \in \alpha_j} q_i \right].$$

5. Показатель типа максимума в зоне σ_α . В этом случае можно считать, что в любой зоне перекрытия действует тот элемент, индивидуальный показатель эффективности которого выше, чем у остальных работоспособных в тот же момент времени:

$$\Phi_{\alpha^*} = \max_{i \in \alpha^*} \Phi_i.$$

Пусть элементы перенумерованы так, что $\Phi_1 \geq \Phi_2 \geq \dots \geq \Phi_n$. Тогда

$$E = \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha} \sum_{k \in \alpha} r_k \Phi_k \prod_{\substack{i < k \\ i \in \alpha}} q_i, \quad (8.13)$$

или

$$E = \sum_{i=1}^n \Phi_i r_i \left[\sigma_i - \sum_{\alpha_i; i \in \alpha_i} \sigma_{\alpha_i} \left(1 - \prod_{\substack{j < i \\ j \in \alpha_i}} q_j \right) \right]. \quad (8.14)$$

6. Показатель типа минимума в зоне σ_α . Расчетные формулы (8.13) и (8.14), с той лишь разницей, что нумерация зоны (при сохранении прежних формул) ведется в соответствии с убыванием показателей Φ_i , т. е. $\Phi_1 \leq \Phi_2 \leq \dots \leq \Phi_n$. (Этот коэффициент эффективности убывает при росте числа работоспособных элементов в зоне перекрытия, т. е. его можно рассматривать как характеристику ущерба.)

8.5. ВОПРОСЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Оценка эффективности функционирования сложных систем на практике часто вызывает много затруднений в связи с большой трудоемкостью расчетов из-за необходимости анализа большого числа состояний. Поэтому приходится прибегать к различным методам упрощения подобных расчетов. Один из таких методов—декомпозиция, т. е. разделение системы на меньшие по размеру подсистемы, анализ каждой из которых проще анализа исходной системы.

Другой метод оценки эффективности и надежности сложных систем состоит в построении оценочных математических моделей, позволяющих получать простые и достаточно точные верхние и нижние границы для оцениваемого параметра. В данной главе приводится пример построения подобных границ для эффективности двухполюсных сетей.

Этим, конечно, не исчерпываются методы приближенной оценки эффективности систем. Одним из дополнительных способов можно считать симметризацию структуры системы или сведение ее к изотропной в том или ином смысле.

Рассмотрим некоторые простейшие методы декомпозиции систем, существенным образом использующие свойства этих систем в соответствующих частных случаях.

1. Системы с аддитивным коэффициентом эффективности. Для того чтобы систему S с эффективностью E можно было представить в виде аддитивной совокупности подсистем $S_1, S_2, \dots, S_N$ с эффективностями $E_1, E_2, \dots, E_N$ соответственно, т. е.

$$E = \sum_{1 \leq i \leq N} E_i,$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого состояния системы α , представляющей собой совокупность состояний $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ соответствующих подсистем, выполнялось условие

$$\Phi_{\alpha} = \sum_{1 \leq i \leq N} \Phi_{\alpha_i}.$$

2. Системы с мультипликативным коэффициентом эффективности. Для того чтобы систему S с эффективностью E можно было бы представить в виде совокупности подсистем $S_1, S_2, \dots, S_N$ с эффективностями $E_1, E_2, \dots, E_N$ соответственно, причём

$$E = \prod_{i=1}^N E_i,$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого состояния системы α , представляющего собой совокупность состояний $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ соответствующих подсистем, выполнялось условие

$$\Phi_\alpha = \prod_{i=1}^N \Phi_{\alpha_i}.$$

3. Системы с пересекающимися зонами действия. Для этих систем всегда выполняется оценка

$$E \leq \sum_{i=1}^N E_i.$$

(Равенство имеет место для случая аддитивного коэффициента эффективности).

4. Общий случай. Если коэффициент эффективности состояния системы может быть представлен функцией от коэффициентов эффективности отдельных подсистем в виде

$$\Phi(S) = f(\Phi_1(S_1), \dots, \Phi_m(S_m)),$$

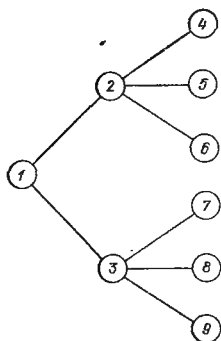
причем различные подсистемы могут включать в свой состав и одни и те же элементы, то

$$E = \mathcal{L}[f(E_1, \dots, E_m)]. \quad (8.15)$$

Здесь оператор $\mathcal{L}$ означает, что в развернутой записи выражения (8.15) в виде суммы произведений каждый сомножитель типа $r_i^{\alpha_i}$ заменяется на r_i ($\alpha_i \geq 1$).

Пример 8.9. Рассмотрим систему сбора и обработки информации (рис. 8.4), состоящую из ЭВМ (1) и связанных с ней через концентраторы (2 и 3) удаленных терминалов (4—9)¹.

Рис. 8.4. Структурная схема системы сбора и обработки информации для примера 8.9



Пусть терминалы объединены в две подсистемы (4—6 и 7—9). Таким образом, первая подсистема включает в свой состав подмножество элементов $\{1, 2, 4, 5, 6\}$, а вторая $\{1, 3, 7, 8, 9\}$. Эффективность всей системы равна взвешенной сумме эффективностей подсистем. Эффективность первой подсистемы пропорциональна квадрату, а эффективность второй — кубу количества собираемой ею информации. Каждый работоспособный и связанный с ЭВМ терминал вносит определенный вклад в собираемую подсистемой информацию. Таким образом, если Φ_1 — количество информации, собираемое первой подсистемой, а Φ_2 — второй, то $\Phi_1(x) = x_1 x_2 (a_{11} x_4 + a_{12} x_5 + a_{13} x_6)$; $\Phi_2(x) = x_1 x_3 (a_{21} x_7 + a_{22} x_8 + a_{23} x_9)$. Здесь x_i — состояние i -го элемента: $x_i = 1$, если i -й элемент работоспособен, и $x_i = 0$ в противном случае; $x = (x_1, x_2, \dots, x_9)$ — состояние системы. Эффективность системы равна $b_1 u_1^2 + b_2 u_2^3$.

¹ Нетес В. А. О математическом ожидании эффективности дискретных систем. — Автоматика и вычислительная техника, 1980, № 3.

Примеры (8.15) и (8.16) и учитывая, что $f(u_1, u_2) = b_1 u_1^2 + b_2 u_2^2$, получаем

$$E = \mathcal{L} [b_1 (p_1 p_2 (a_{11} p_4 + a_{12} p_5 + a_{13} p_6))^2 + b_2 (p_1 p_3 (a_{21} p_7 + a_{22} p_8 + a_{23} p_9))^2] = b_1 p_1 p_2 \mathcal{L} [(a_{11} p_4 + a_{12} p_5 + a_{13} p_6)^2] + b_2 p_1 p_3 \mathcal{L} [(a_{21} p_7 + a_{22} p_8 + a_{23} p_9)^2] = b_1 p_1 p_2 (a_{11}^2 p_4^2 + a_{12}^2 p_5^2 + a_{13}^2 p_6^2 + 2 a_{11} a_{12} p_4 p_5 + 2 a_{11} a_{13} p_4 p_6 + 2 a_{12} a_{13} p_5 p_6) + b_2 p_1 p_3 (a_{21}^2 p_7^2 + a_{22}^2 p_8^2 + a_{23}^2 p_9^2 + 2 a_{21} a_{22} p_7 p_8 + 2 a_{21} a_{23} p_7 p_9 + 2 a_{22} a_{23} p_8 p_9) + 6 a_{21} a_{22} a_{23} p_7 p_8 p_9].$$

8.6. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОЦЕНКЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ

8.6.1. Порядок оценки эффективности. Эффективность функционирования сложной системы должен оценивать специалист, хорошо знакомый с системой в целом, знающий назначение ее и требования к ней. При оценке эффективности системы необходим определенный навык в практическом применении методов исследования операций. Как и все задачи по исследованию операций, оценка эффективности функционирования какой-либо определенной системы является конкретной задачей. В общих чертах порядок расчета эффективности сложных систем кратковременного действия заключается в следующем:

- определяется назначение системы;
- формулируется круг возможных задач и условий работы системы;
- оценивается (на основании предыдущего опыта или экспертно) ожидаемая частота повторений данных задач и условий работы;
- выбирается наиболее подходящая в данном случае количественная мера качества функционирования системы;
- производится разбиение сложной системы на отдельные элементы (подсистемы) с учетом специфики ее структуры и процесса функционирования и восстановления работоспособности;
- составляется укрупненная функциональная схема системы;
- вычисляются показатели надежности элементов, характеризующие вероятность состояния каждого элемента в любой интересующий момент времени;
- вычисляются вероятности состояний системы на основании показателей надежности отдельных элементов (какие состояния системы нужно учесть при оценке эффективности, следует оценить специально);
- оцениваются коэффициенты эффективности состояний системы.

Методика оценки эффективности функционирования сложных систем длительного действия аналогична. Отличие заключается лишь в том, что вычисляются вероятности (или плотности вероятностей) траекторий переходов системы во времени из состояния в состояние и коэффициенты эффективности этих траекторий.

8.6.2. Определение коэффициентов эффективности. Наиболее трудоемким и принципиально сложным вопросом при оценке эффективности систем является определение коэффициентов эффективности конкретных состояний (траекторий) системы. Перечислим основные методы получения необходимых коэффициентов.

1. Аналитический метод. Коэффициенты эффективности можно определять аналитическим путем в редких случаях. Например, коэффициент эффективности может быть явной функцией числа работающих элементов определенного типа. Труднее обстоит дело с определением коэффициентов для траекторий. Однако и здесь иногда возможны относительно простые выражения.

2. Метод моделирования. Для определения коэффициентов с успехом может быть применен метод физического и математического моделирования состояний и траекторий. Этот метод может иметь самостоятельное значение при исследовании принципов функционирования систем, а также применяться для уточнения и корректировки коэффициентов эффективности, полученных приближенно аналитическим путем.

Для определения коэффициентов эффективности (в особенности для классов траекторий) может быть применен и метод статистического моделирования.

3. Метод непосредственного эксперимента с использованием опытного образца. Этот метод по сути дела представляет собой физическое моделирование на реальном объекте. Состояния и траектории системы имитируются отключением в соответствующие моменты времени определенных элементов. Этот метод обычно служит и для окончательной проверки эффективности системы.

8.6.3. Виды коэффициентов эффективности. В общем случае оценка эффективности функционирования системы кратковременного действия может быть осуществлена по формуле (8.1). Коэффициент эффективности состояния при этом может иметь любой физический смысл, например условная вероятность, абсолютная или относительная ошибка, ущерб, мощность и т. п.

Использование ненормированного коэффициента эффективности позволяет сравнивать по среднему значению выходного эффекта даже совершенно различные системы.

Для большинства технических систем выходной эффект характеризуется показателями, большое значение которых наиболее предпочтительно (например, вероятность поражения для средств ПВО, среднее число проложенных трасс для систем управления воздушным движением, объем перевозок для транспортных систем и т. п.). В этом случае удобно использовать нормированные относительно Φ_0 коэффициенты эффективности состояний Φ_i^* . Подобное нормирование удобно и когда оценивается влияние именно надежности на эффективность функционирования системы. Величину E/Φ_0 часто называют коэффициентом сохранения эффективности.

8.7. ЖИВУЧЕСТЬ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

По мере создания все более сложных и ответственных систем, к числу которых в частности, относятся и современные системы связи, транспорта и энергетики, все острее встает вопрос обеспечения их живучести. Интуитивно ясно, что, например, в электроэнергетике концентрация мощности электрических станций, создание энергокомплексов, с одной стороны, приводит к более эффективному использованию капиталовложений и снижению эксплуатационных расходов, но, с другой стороны, существенно снижает живучесть системы.

Живучесть — свойство системы продолжать нормальное функционирование с допустимыми показателями эффективности при непрогнозируемых или преднамеренных воздействиях. Такими воздействиями могут быть либо стихийные (природные) явления, либо активные внешние вмешательства.

Важным отличием задачи оценки живучести от других близких задач, например от задач оценки безотказности, устойчивости и т. п., является то, что для этой задачи, как правило, невозможно использовать понятие вероятности возникновения тех или иных ситуаций, а потому неприемлемы и вероятностные критерии оценок. Более естественным представляется использование минимаксных критериев¹.

Одним из естественных показателей количественного измерения живучести является показатель эффективности E , сохранившийся у системы после фиксированной совокупности воздействий. При этом нужно иметь в виду, что чем больше значение этого показателя, тем выше живучесть.

Совокупность воздействий может характеризоваться числом, интенсивностью и местом возникновения возмущений. Для предлагаемого минимаксного критерия сравнения вариантов построения системы целесообразно считать, что при равном числе возмущений (допустим, при одинаковой интенсивности всех возму-

¹ Руденко Ю. Н., Ушаков И. А. К вопросу оценки живучести сложных систем энергетики. — Изв. АН СССР. Сер. Энергетика и транспорт. 1979, № 1.

чений) они прикладываются к таким объектам системы, выход из строя которых приводит к наихудшим последствиям.

Понятно, что вариант системы, более живучий при числе K_1 одновременных внешних воздействий, может оказаться менее живучим при числе K_2 одновременных внешних воздействий по отношению к другому варианту. Аналогичным образом живучесть вариантов системы может зависеть и от интенсивности, и от места возникновения совокупности возмущений.

Неоднозначность выбора приводит к необходимости экспертного выбора окончательного варианта системы с учетом всех предполагаемых совокупностей воздействий.

Рассмотрим N различных систем, предназначенных для выполнения одних и тех же функций. Определим, какая из рассматриваемых систем является наиболее живучей по отношению к некоторой заданной мощности внешнего воздействия V , заданной в виде числа и интенсивности внешних воздействий по любым (т. е. даже наихудшим образом выбираемым для системы) элементам системы. Обозначим через I_s подмножество элементов s -го варианта системы ($s = 1, \dots, N$), по которым осуществляется данное воздействие. Задача выбора наиболее живучей системы в данном случае сводится к отысканию такого s^* -го варианта системы, для которого наихудшее распределение воздействий по элементам приводит к наименее существенному ущербу, т. е.

$$U(V, I_{s^*}) = \min_{1 \leq s \leq N} \max_V U(V, I_s)$$

(здесь U обозначает ущерб системы, т. е. величину, в определенном смысле противоположную E).

Рассмотрим воздействие на k различных элементов s -го варианта системы, состоящей из n_s элементов. Каждый вариант воздействия на систему удобно представлять в виде матрицы «воздействия — элементы системы» $\delta_{IJ} = ||\delta_{ij}||$, в которой элемент

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-е воздействие оказывается на } i\text{-й элемент системы,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Понятно, что

$$\sum_{1 \leq i \leq n_s} \delta_{ij} = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{1 \leq j \leq k} \delta_{ij} = 1,$$

т. е. в каждой строке и в каждом столбце данной матрицы имеется ровно по одному ненулевому элементу, $\sum_{1 \leq i \leq n_s} \sum_{1 \leq j \leq k} \delta_{ij} = k$, т. е. общее число ненулевых элементов

матрицы равно k . Понятно, что всего может быть $C_{n_s}^k k!$ всевозможных размещений воздействий по элементам системы, т. е. возможно существование такого числа различных матриц δ_{IJ} . Все это множество возможных воздействий обозначим для данного случая δ .

По характеру ущерба от вида и степени воздействия можно разделить на три основные группы:

системы с аддитивным показателем ущерба, у которых результирующий ущерб равен сумме ущербов от отдельных элементов;

системы с вогнутой функцией ущерба, у которых результирующий ущерб меньше суммы ущербов от отдельных элементов (например, элементы системы характеризуются пересекающимися зонами действия или работоспособность каждого из них необходима для выполнения определенной функции);

системы с выпуклой функцией ущерба, у которых результирующий ущерб больше суммы ущербов от отдельных элементов (например, обычное нагруженное резервирование, когда выведение из строя любого из элементов резервной группы

Таблица 8.3

Значения ущерба для элементов
первого варианта системы

Номер элемента	Номер воздействия		
	1	2	3
1	10	9	4
2	9	1	7
3	7	6	8
4	8	7	6

Таблица 8.4

Значения ущерба для элементов
второго варианта системы

Номер элемента	Номер воздействия		
	1	2	3
1	9	7	2
2	9	9	3
3	10	6	7
4	5	10	4
5	8	8	3

не приносит ущерба системе вовсе, а отказ всей резервной группы сразу же уменьшает эффективность работы системы до нуля).

Для простоты будем рассматривать только системы с аддитивной функцией ущерба.

Обозначим через $U_s(\delta_{IJ})$ ущерб, наносимый s -му варианту системы воздействием δ_{IJ} . Для системы с аддитивным показателем ущерба, очевидно, при любом воздействии δ_{IJ} справедливо условие

$$U_s(\delta_{IJ}) = U_s(\delta_{I'J'}) + U_s(\delta_{I''J''}),$$

где $\delta_{I'J'} \cup \delta_{I''J''} = \delta_{IJ}$, $\delta_{I'J'} \cap \delta_{I''J''} = \emptyset$.

Если обозначить через u_{ij}^s ущерб, наносимый в подобной системе при j -м воздействии на i -й элемент s -го варианта системы $i = 1, \dots, n_s$, то последовательное использование этого равенства приводит к следующему выражению для некоторого конкретного случая:

$$U_s(\delta_{IJ}) = \sum_{1 \leq i \leq n_s} u_{ij}^s \delta_{ij}.$$

Если имеется N различных вариантов построения системы, то задача выбора наилучшего из них по отношению к заданному воздействию сводится к решению задачи нахождения такого s^* , при котором

$$\min_{1 \leq s \leq N} \max_{\delta_{IJ} \in \delta} \sum_{1 \leq i \leq n_s} u_{ij}^s \delta_{ij} = U_{s^*}(\delta_{IJ}).$$

Пример 8.10. Имеется два варианта выполнения системы, матрицы ущерба u_{ij}^1 и u_{ij}^2 для которых при различных воздействиях приведены в табл. 8.3 и 8.4. Требуется выбрать систему, обладающую более высокой живучестью.

Для приведенных вариантов системы наибольший ущерб наносится в первом случае при $\delta_{21} = \delta_{12} = \delta_{33} = 1$ и равняется 26 единицам, а во втором случае — при $\delta_{21} = \delta_{42} = \delta_{33} = 1$, или $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$, или $\delta_{51} = \delta_{42} = \delta_{33} = 1$ и равняется 25 единицам, т. е. более живучим является второй вариант системы.

Глава 9

СИСТЕМЫ С РЕЗЕРВОМ ВРЕМЕНИ

9.1. ТЕРМИНОЛОГИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ

9.1.1. Предварительные замечания. Временное резервирование — совокупность правил использования и способов повышения надежности технических изделий, приводящих к возникновению у изделия или отдельных его устройств избыточного времени, которое может быть использовано для восстановления работо-

способности и улучшения технических характеристик. Отказ системы с временным резервированием (СВР) — событие, заключающееся в таком нарушении работоспособности, которое приводит к невыполнению системой поставленной задачи в заданное время. В зависимости от последствий отказы элементов СВР могут быть необесценивающими (неразрушающими), если вызывают лишь задержку в выполнении задания, и обесценивающими (разрушающими), если делают невозможным использование результатов проделанной работы и требуют повторения части или всей работы. В последнем случае различают полезную и обесцененную наработки.

9.1.2. Классификация способов резервирования. Временное резервирование может быть общим, отдельным и групповым. При общем резервировании созданный резерв времени может быть использован любым устройством системы. При групповом резервировании резерв доступен любому устройству, входящему в заданную группу.

Кратность резервирования m_t — это отношение величины резерва времени к времени t_0 , затрачиваемому системой на выполнение задания при безотказной работе всех ее элементов.

По способу пополнения резерв времени может быть непополняемым, мгновенно пополняемым, постепенно пополняемым. Непополняемый резерв устанавливается заранее, до начала работы и в процессе функционирования не возрастает. Мгновенно пополняемый резерв восстанавливается до исходного уровня сразу же после восстановления работоспособности. Постепенно пополняемый резерв увеличивается в интервалах безотказной работы по определенному закону, обычно линейному.

9.1.3. Классификация систем. В СВР различают следующие виды соединения элементов: последовательное (основное и многофазное); параллельное (резервное и многоканальное); последовательно-параллельное, а также соединение с сетевой структурой. При основном соединении отказ любого элемента немедленно вызывает отказ всей системы. При многофазном соединении в некоторых местах системы устанавливаются специальные накопители для хранения запасов, обеспечивающие системе групповой резерв времени. Поэтому отказ системы наступает не сразу после отказа элемента, а с некоторой задержкой, когда исчерпываются запасы во всех накопителях между отказавшим элементом и выходом системы. При резервном соединении установка дополнительных устройств не увеличивает производительности системы, но увеличивает надежность. При многоканальном соединении все параллельно соединенные устройства включаются в полезную работу, увеличивая производительность и создавая ее запас. Благодаря запасу производительности образуется резервное время. В системах с сетевой структурой также могут устанавливаться промежуточные накопители и увеличиваться производительность системы или ее подсистем за счет параллельной работы отдельных ветвей системы.

Для обозначения классов СВР используется четырехразрядный код вида X_1X_2mn , где X_1 и X_2 — тип распределения времени безотказной работы и времени восстановления (M — экспоненциальное, E — эрланговское, W — Вейбулла, G — произвольное); m и n число каналов и фаз соответственно. В каждом классе можно выделить подклассы, обозначаемые пятиразрядным кодом вида $X_1X_2 \times \times X_3X_4X_5$. Первый разряд X_1 относится к резерву времени: $X_1 = 0$ соответствует непополняемому резерву времени, $X_1 = 1$ — пополняемому, $X_1 = 2$ — комбинированному. Второй разряд относится к типу отказов: $X_2 = 0$ соответствует необесценивающим отказам, $X_2 = 1$ — обесценивающим, $X_2 = 2$ — одновременному присутствию отказов обоих типов. Третий разряд относится к характеристике других видов резервирования в системе: $X_3 = 0$ соответствует отсутствию других видов резерва, $X_3 = 1$ — наличию структурного резерва, $X_3 = 2$ — наличию нескольких видов резерва. Четвертый разряд относится к виду контроля работоспособности: $X_4 = 0$ соответствует непрерывному контролю, $X_4 = 1$ —

периодическому, $X_4 = 2$ — смешанному. Пятый разряд кодового обозначения подкласса систем относится к виду загрузки системы: $X_5 = 0$ относится к непрерывной загрузке, а $X_5 = 1$ — к переменной или случайной.

Если оказывается, что в рамках конкретного исследования тот или иной признак несуществен, то на соответствующей позиции устанавливается знак безразличия X .

9.1.4. Показатели надежности. Для СВР изучаются вероятностные характеристики трех основных случайных величин: $T_0(\tau)$ — наработка до срыва функционирования (отказа СВР); $T_1(t_0)$ — время выполнения задания; $T_2(t)$ — полезная наработка в интервале времени $(0, t)$. В дальнейшем в данной главе ради краткости для математического ожидания некоторой случайной величины Z будет использовано обозначение $\bar{Z}$ вместо стандартного обозначения MZ . С помощью указанных случайных величин вводятся все основные показатели надежности: вероятность выполнения задания (безотказного функционирования)

$$P_0(t_0, \tau, w) = P\{T_0(\tau) > t_0\} = P_0^{(1)}(t_0, t_0 + \tau, w) = \\ = P\{T_1(t_0) \leq t_0 + \tau\} = P_0^{(2)}(t_0 + \tau, t_0, w) = P\{T_2(t_0 + \tau) \geq t_0\},$$

где w — вектор параметров, характеризующий уровень избыточности; вероятность срыва задания (срыва функционирования):

$$Q_0(t_0, \tau, w) = 1 - P_0(t_0, \tau, w); \\ Q_0^{(1)}(t_0, t_0 + \tau, w) = 1 - P_0^{(1)}(t_0, t_0 + \tau, w); \\ Q_0^{(2)}(t_0 + \tau, t_0, w) = 1 - P_0^{(2)}(t_0 + \tau, t_0, w);$$

интенсивность отказов СВР

$$\Lambda(t_0, \tau, w) = -\frac{\partial}{\partial t_0} \ln P_0(t_0, \tau, w);$$

вероятность выполнения ожидаемого задания (вероятность выполнения задания, которое начато по заявке, пришедшей в систему в произвольный момент времени на стационарном участке эксплуатации)

$$P(t_0, \tau, w) = \sum_{I \in D} p_I P_I(t_0, \tau, w),$$

где p_I — вероятность того, что заявка застала систему в состоянии e_I (e_I — одно из состояний в общем случае многомерного, марковского процесса); D — множество всех состояний; $P_I(t_0, \tau, w)$ — вероятность выполнения задания при начальном состоянии e_I ;

средняя наработка до первого отказа СВР (до первого нарушения временных ограничений)

$$\bar{T}_0(\tau, w) = \int_0^\infty x dQ_0(x, \tau, w);$$

среднее непроизводительное время до выполнения задания

$$\bar{T}_2(t_0, w) = \int_0^\infty y dP_0(t_0, y, w);$$

среднее время выполнения задания

$$\bar{T}_1(t_0, w) = t_0 + \bar{T}_2(t_0, w);$$

коэффициент готовности за заданное время

$$K(\tau, w) = P(0, \tau, w)$$

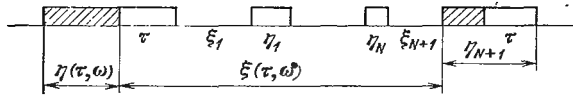


Рис. 9.1. Пояснение формулы для $K(\tau, \omega)$

— вероятность того, что система может приступить к выполнению ожидаемого задания немедленно или с задержкой, не превышающей допустимого значения. Коэффициент $K(\tau, \omega)$ можно трактовать и как отношение средних интервалов.

$$K(\tau, \omega) = \bar{\xi}(\tau, \omega) / [\bar{\xi}(\tau, \omega) + \bar{\eta}(\tau, \omega)],$$

где $\eta(\tau, \omega)$ — первая часть длительного интервала времени восстановления ($\eta > \tau$), равная $\eta_{N+1} - \tau$ (рис. 9.1); $\xi(\tau, \omega)$ — все остальное время между соседними интервалами $\eta(\tau, \omega)$, равное согласно диаграмме

$$\xi(\tau, \omega) = \tau + \sum_{i=1}^N \eta_i + \sum_{i=1}^{N+1} \xi_i.$$

Здесь N — случайное число коротких интервалов ($\eta_i \leq \tau$) времени восстановления между соседними длительными.

Некоторые вспомогательные показатели будут введены далее.

9.2. ОДНОКАНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С НЕОБЕСЦЕНИВАЮЩИМИ ОТКАЗАМИ

9.2.1. Общий случай. Рассматриваются общая вероятностная схема для систем класса GG11, подкласса XOXOX (с необесценивающими отказами элементов и непрерывным контролем) и ряд частных моделей надежности, следующих из общей схемы. Система состоит из произвольного числа элементов, образующих в общем случае сетевую структуру, и выполняет задание известной длительности t_0 , имея непополняемый резерв времени τ . Система может находиться в дискретном множестве состояний E . Моменты переходов из состояния в состояние являются марковскими, а времена пребывания в каждом из состояний имеют произвольные распределения. Поэтому процесс функционирования системы является полумарковским и задается с помощью функциональной матрицы $P(t) = \|P_{ij}(t)\|$, где $P_{ij}(t)$ — функция вероятности перехода из состояния e_i в состояние e_j . Множество E разбивается на два подмножества: E_0 и E_1 . В E_0 резерв времени не расходуется, а пребывание системы в E_1 в течение времени x приводит к уменьшению резерва времени на величину x . Для данной системы вероятность выполнения задания определяется из системы интегральных уравнений:

$$P_i(t_0, \tau) = 1 - F_i(t_0) + \sum_{j \in E} \int_0^{t_0} P_j(t_0 - x, \tau) dP_{ij}(x),$$

$$i \in E_0, F_i(t) = \sum_{(0)} P_{ij}(t);$$

$$P_i(t_0, \tau) = \sum_{j \in E} \int_0^{\tau} P_j(t_0, \tau - y) dP_{ij}(y), \quad i \in E_1, \quad E = E_0 \cup E_1, \quad (9.1)$$

Средняя наработка до отказа и среднее непроизводительное время до выполнения задания определяются из следующих систем уравнений:

$$\begin{aligned}\bar{T}_{0i}(\tau) &= \bar{T}_i + \sum_{j \in E} p_{ij} \bar{T}_{0j}(\tau), \quad i \in E_0, \quad \bar{T}_i = \int_0^{\infty} x dF_i(x); \\ \bar{T}_{0i}(\tau) &= \sum_{j \in E} \int_0^{\tau} \bar{T}_{0j}(\tau - x) dP_{ij}(x), \quad i \in E_1, \quad p_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t); \\ \bar{T}_{2i}(t_0) &= \sum_{j \in E} \int_0^{t_0} \bar{T}_{2j}(t_0 - x) dP_{ij}(x), \quad i \in E_0; \\ \bar{T}_{2i}(t_0) &= \bar{T}_i + \sum_{j \in E} p_{ij} \bar{T}_{2j}(t_0), \quad i \in E_1,\end{aligned}\tag{9.2}$$

где $\bar{T}_i$ — среднее время пребывания в состоянии e_i .

Вероятность выполнения ожидаемого задания находится из интегральных соотношений:

$$\begin{aligned}P(t_0, \tau) &= \sum_{i \in E_0} P_i \left(1 - \tilde{F}_i(t) + \sum_{j \in E} \int_0^{t_0} P_j(t_0 - x, \tau) d\tilde{P}_{ij}(x) \right) + \\ &+ \sum_{i \in E_1} P_i \sum_{j \in E} \int_0^{\tau} P_j(t_0, \tau - y) d\tilde{P}_{ij}(y); \\ \tilde{F}_{ij}(t) &= \bar{T}_{ij}^{-1} \int_0^t [1 - F_{ij}(x)] dx, \quad F_{ij}(t) = P_{ij}(t)/p_{ij}; \\ \tilde{F}_i(t) &= \bar{T}_i^{-1} \int_0^t [1 - F_i(x)] dx; \\ \tilde{P}_{ij}(t) &= \tilde{p}_{ij} \tilde{F}_{ij}(t), \quad \tilde{p}_{ij} = p_{ij} \bar{T}_{ij} / \bar{T}_i, \quad \bar{T}_{ij} = \int_0^{\infty} x dF_{ij}(t); \\ P_i &= \pi_i \bar{T}_i / \left(\sum_{j \in E} \pi_j \bar{T}_j \right), \quad \pi_i = \sum_{k \in E} \pi_k p_{ki}\end{aligned}$$

(здесь индекс тильда относится к величинам, связанным с распределением «остаточного времени», а π_k означают стационарные вероятности для вложенной цепи Маркова).

Если система начинает функционировать с приходом заявки на стационарном участке эксплуатации, то средняя наработка до окончания резерва времени определяется из соотношения

$$\begin{aligned}\bar{T}_0(\tau) &= \sum_{i \in E_0} P_i \left(\tilde{T}_i + \sum_{j \in E} \tilde{p}_{ij} \bar{T}_{0j}(\tau) \right) + \sum_{i \in E_1} P_i \sum_{j \in E} \bar{T}_{0j}(\tau - x) dP_{ij}(x), \\ \tilde{T}_i &= \int_0^{\infty} x d\tilde{F}_i(x),\end{aligned}$$

где $\bar{T}_{0i}(\tau)$ — решение системы (9.2). Рассмотрим далее частные модели надежности.

9.2.2. Элемент с непополняемым резервом времени (подкласс 00000). Процесс функционирования элемента представляет собой альтернирующий процесс, в котором интервалы времени безотказной работы ξ_i чередуются с интервалами вре-

мени восстановления η_i (см. рис. 9.1). Все интервалы ξ_i имеют одинаковые распределения $F(t)$, а интервалы η_i — распределения $G_i(t)$. Множества E_0 и E_1 в формуле (9.1) имеют по одному состоянию e_0 и e_1 . Решение системы двух интегральных уравнений находится в каждом отдельном случае после того, как становится известным вид распределений $F(t)$ и $G(t)$. Момент выполнения задания является моментом времени, когда суммарная наработка достигнет величины t_0 , причем к этому моменту суммарное время восстановления должно быть меньше τ . Момент отказа совпадает с моментом времени, когда оказывается полностью исчерпанным резерв времени независимо от достигнутой наработки.

При экспоненциальных распределениях $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$ и $G(t) = 1 - \exp(-\mu t)$ вероятность выполнения задания при начальном состоянии e_0 и вероятность выполнения ожидаемого задания определяются по формулам:

$$P_0(t_0, \tau) = e^{-\lambda t_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t_0)^k}{k!} \left(1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\mu \tau)^i}{i!} e^{-\mu \tau} \right) =$$

$$= 1 - e^{-\lambda t_0 - \mu \tau} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t_0)^k}{k!} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\mu \tau)^i}{i!}; \quad (9.3)$$

$$P(t_0, \tau) = P_0(t_0, \tau) - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-\lambda t_0 - \mu \tau} I_0(2\sqrt{\lambda \mu t_0 \tau}), \quad (9.4)$$

где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка:

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k} / (k!)^2.$$

При вычислении конечного числа слагаемых в обоих представлениях вероятности в формуле (9.3) удастся найти двусторонние границы искомой вероятности.

Средние значения и дисперсии наработки до отказа и времени выполнения задания:

$$\bar{T}_0(\tau) = (1 + \mu \tau) / \lambda, \quad \bar{T}_1(t_0) = t_0 (1 + \lambda / \mu);$$

$$DT_0(\tau) = (1 + 2\mu \tau) / \lambda^2, \quad DT_1(t_0) = 2\lambda t_0 / \mu^2.$$

Коэффициент оперативной готовности за заданное время

$$K(\tau) = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-\mu \tau}.$$

Для быстровосстанавливаемых элементов ($\bar{\eta} \ll \bar{\xi}$) и длительных заданий ($t_0 \gg \bar{\xi}$) расчет вероятности выполнения задания можно проводить по асимптотическим формулам:

$$P_0(t_0, \tau) \approx \Phi\left(\frac{\gamma - \rho}{\sqrt{2\rho}}\right); \quad P_0(t_0, \tau) \approx \Phi\left(\frac{\gamma - \rho + 1}{\sqrt{2\rho}}\right); \quad \rho = \lambda t_0; \quad \gamma = \mu \tau;$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

При фиксированной кратности резервирования $m_t = \tau/t_0$ в (9.3) и (9.4) надо заменить τ на $m_t t_0$. При $\bar{m}_t = \mu m_t / \lambda > 1$ вероятность $P_0(t_0, m_t)$ с ростом t_0 сначала уменьшается, а затем вновь начинает расти. Минимальная гарантированная Вероятность выполнения задания достигается при $\rho_* = \lambda t_0^* \approx 1/\bar{m}_t$ и равна

$$P_0(t_0^*, m_t) \approx e^{-1/\bar{m}_t} [1 + (1 - e^{-1/\bar{m}_t})/\bar{m}_t].$$

Вероятность выполнения задания при постоянном резерве времени

λt_0	μt										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,1	0,9048	0,9632	0,9858	0,9945	0,9979	0,9992	0,9997	0,9999	—	—	—
0,2	0,8187	0,9267	0,9704	0,9881	0,9952	0,9981	0,9992	0,9997	0,9999	—	—
0,3	0,7408	0,8904	0,9539	0,9807	0,9920	0,9967	0,9986	0,9994	0,9998	0,9999	—
0,4	0,6703	0,8546	0,9364	0,9724	0,9881	0,9949	0,9978	0,9991	0,9996	0,9998	0,9999
0,5	0,6065	0,8193	0,9181	0,9633	0,9837	0,9928	0,9969	0,9986	0,9994	0,9997	0,9999
0,6	0,5488	0,7847	0,8990	0,9533	0,9787	0,9904	0,9957	0,9981	0,9992	0,9996	0,9998
0,7	0,4966	0,7508	0,8794	0,9426	0,9731	0,9875	0,9943	0,9974	0,9988	0,9995	0,9998
0,8	0,4493	0,7178	0,8591	0,9311	0,9668	0,9843	0,9926	0,9966	0,9984	0,9993	0,9997
0,9	0,4066	0,6856	0,8384	0,9189	0,9601	0,9807	0,9908	0,9956	0,9980	0,9991	0,9996
1,0	0,3679	0,6542	0,8175	0,9061	0,9528	0,9768	0,9898	0,9945	0,9974	0,9988	0,9994
2,0	0,1353	0,3943	0,6035	0,7540	0,8519	0,9139	0,9511	0,9730	0,9853	0,9921	0,9958
2,5	0,0821	0,2995	0,5041	0,6680	0,7871	0,8683	0,9208	0,9535	0,9733	0,9850	0,9917
3,0	0,0498	0,2250	0,4147	0,5833	0,7169	0,8149	0,8828	0,9278	0,9565	0,9744	0,9851
3,5	0,0330	0,1673	0,3366	0,5022	0,6443	0,7558	0,8380	0,8956	0,9344	0,9597	0,9758
4,0	0,0183	0,1234	0,2800	0,4269	0,5717	0,6930	0,7876	0,8575	0,9069	0,9406	0,9629
5,0	0,0067	0,0656	0,1686	0,2982	0,4351	0,5639	0,6755	0,7663	0,8364	0,8884	0,9256

Значения вероятностей (9.3) приведены в табл. 9.1, а вероятностей $P_0(t_0, m_t)$ — в табл. 9.2.

Средняя наработка в заданном интервале времени определяется с помощью формулы

$$\bar{T}_3(t) = \int_0^t \gamma(x) dx,$$

где $\gamma(x)$ — вероятность застать элемент работоспособным в момент x .

При экспоненциальных распределениях:

$$\gamma(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}; \quad \bar{T}_3(t) = \frac{\mu t}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{(\lambda + \mu)^2} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t}).$$

При больших t средняя наработка $\bar{T}_3(t) \approx Kt$.

Таблица 9.2

Вероятность выполнения задания при постоянной кратности резерва

λt_0	m_t							
	1	2	3	4	5	6	8	10
0,1	0,9135	0,9213	0,9281	0,9349	0,9406	0,9462	0,9555	0,9632
0,2	0,8487	0,8737	0,8946	0,9121	0,9267	0,9389	0,9574	0,9704
0,3	0,7989	0,8452	0,8801	0,9078	0,9286	0,9452	0,9678	0,9807
0,4	0,7621	0,8286	0,8767	0,9114	0,9364	0,9537	0,9766	0,9881
0,5	0,7329	0,8193	0,8782	0,9181	0,9451	0,9633	0,9837	0,9928
0,6	0,7070	0,8142	0,8821	0,9248	0,9533	0,9705	0,9887	0,9957
0,8	0,6724	0,8128	0,8935	0,9395	0,9669	0,9814	0,9930	0,9984
1,0	0,6542	0,8174	0,9061	0,9528	0,9766	0,9886	0,9974	0,9994
1,5	0,6288	0,8339	0,9320	0,9691	0,9882	0,9964	0,9992	0,9999
2,0	0,6035	0,8519	0,9512	0,9853	0,9958	0,9989	0,9999	—
2,5	0,5918	0,8683	0,9647	0,9917	0,9981	0,9995	—	—
3,0	0,5833	0,8828	0,9744	0,9951	0,9992	0,9999	—	—
3,5	0,5769	0,8956	0,9814	0,9967	0,9996	—	—	—
4,0	0,5717	0,9069	0,9863	0,9984	0,9998	—	—	—
5,0	0,5669	0,9256	0,9925	0,9995	0,9999	—	—	—

Пример 9.1. Для решения задачи на ЭВМ-1 производительностью $C_1 = 100$ тыс. операций/с с параметрами $\lambda_1 = 0,05 \text{ ч}^{-1}$, $\mu_1 = 1 \text{ ч}^{-1}$ требуется $t = 6$ ч машинного времени. Поскольку вероятность выполнения задания $P(t) = \exp \times \times (-\lambda_1 t) = 0,75$ недостаточна, необходимо разработать методы повышения надежности введением структурной или временной избыточности, обеспечивающие вероятность выполнения задания не менее 0,97.

Р е ш е н и е. При общем структурном дублировании для повышения надежности используем еще одну ЭВМ-1 в нагруженном резерве. Тогда

$$P_0(t) \approx \exp \left(-\frac{2\lambda_1^2 t}{3\lambda_1 + \mu_1} \right) = 0,975.$$

Альтернативным вариантом является использование ЭВМ-2 производительностью $C_2 = 200$ тыс. операций/с, которая обеспечивает $t_0 = 3$ ч, $\tau = 3$ ч и ту же кратность резервирования $m_i = 1/1$, что и первый вариант. Согласно (9.3)

$$P_0(t_0, \tau) = \exp \{-0,05 \cdot 3\} \{1 + 0,05 \cdot 3 [1 - \exp(-3)] + 0,01125 \times \\ \times [1 - 4 \exp(-3)]\} = 0,991.$$

При дублировании аппаратуры коэффициент готовности $K = 1 - 0,005/1,105 = 0,9955$, вероятность выполнения ожидаемого задания $P(t_0, 0) = 0,97$.

При дублировании времени в ЭВМ-2 коэффициент готовности за заданное время

$$K(\tau) = 1 - \exp(-3)/21 = 0,9976.$$

Вероятность выполнения ожидаемого задания

$$P(t_0, \tau) = 0,991 - \exp(-3,15) (1 + 0,45 + 0,45^2/4 + 0,45^3/36)/21 = 0,988.$$

Если увеличение производительности ЭВМ-2 сопровождается ростом интенсивности отказов $\lambda_2 = 2 \lambda_1$, то $P_0(t_0, \tau) = 0,981$. Если же $\lambda_2 = a \lambda_1$, то вероятности $P_0(t)$ и $P_0(t_0, \tau)$ выравниваются при $a = 2,53$. Если же $C_2 = b C_1$, то $\rho = 0,3/b$, $\gamma = 6(1 - 1/b)$ и вероятности выравниваются при $b = 1,6$, т. е. запас производительности в 60% эквивалентен установке второй ЭВМ-1.

При произвольных распределениях наработки и времени восстановления вероятность выполнения задания следует рассчитывать по асимптотическим формулам:

$$P_0(t_0, \tau) \approx \Phi \left((\tau - \bar{T}_1 t_0 / \bar{T}_0) / \sqrt{\bar{T}_1^2 t_0 \bar{T}_0^{-1} (\sigma_0^2 \bar{T}_0^{-2} + \sigma_1^2 \bar{T}_1^{-2})} \right),$$

$$\bar{T}_0 = \int_0^\infty x dF(x);$$

$$P_0(t_0, \tau) \approx \Phi \left(\left(\bar{T}_0 \left(1 + \frac{\tau}{\bar{T}_1} \right) - t_0 \right) / \sqrt{\bar{T}_0^2 \tau \bar{T}_1^{-1} (\sigma_0^2 \bar{T}_0^{-2} + \sigma_1^2 \bar{T}_1^{-2})} \right),$$

$$\bar{T}_1 = \int_0^\infty x dG(x); \quad (9.5)$$

$$\sigma_0^2 = \int_0^\infty x^2 dF(x) - \bar{T}_0^2; \quad \sigma_1^2 = \int_0^\infty x^2 dG(x) - \bar{T}_1^2.$$

Средние значения t_0 и τ определяются по формулам:

$$\bar{T}_0(\tau) = (1 + \tau/\bar{T}_1), \quad \bar{T}_1(t_0) = t_0(1 + \bar{T}_1/\bar{T}_0); \quad (9.6)$$

$$DT_0(\tau) = \tau \bar{T}_0^2 \bar{T}_1^{-1} (\sigma_0^2 \bar{T}_0^{-2} + \sigma_1^2 \bar{T}_1^{-2}),$$

$$DT_1(t_0) = t_0 \bar{T}_1^2 \bar{T}_0^{-1} (\sigma_0^2 \bar{T}_0^{-2} + \sigma_1^2 \bar{T}_1^{-2}). \quad (9.7)$$

Коэффициент готовности за заданное время

$$K(\tau) = 1 - (\bar{T}_0 + \bar{T}_1)^{-1} \int_0^\tau [1 - G(x)] dx. \quad (9.8)$$

Расчетные формулы при гамма-распределении наработки $F(t) = I(K, \lambda t)$ и времени восстановления $G(t) = I(r, \mu t)$ приведены в табл. 9.3, а при распределении наработки Вейбулла — Гнеденко $F(t) = 1 - \exp\{- (\lambda t)^m\}$ и гамма-распределении времени восстановления $G(t) = I(r, \mu t)$ — в табл. 9.4 (здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция). Используемые в этих формулах коэффициенты a_{ij} и C_i приведены в табл. 9.5 и 9.6.

Пример 9.2. Система, имеющая распределение наработки Вейбулла-Гнеденко с параметрами $m = 0,7$ и $\lambda = 0,0104 \text{ ч}^{-1}$ и экспоненциальное распределение времени восстановления с параметром $\mu = 1 \text{ ч}^{-1}$, должна выполнить задание, требующее при безотказной работе непрерывной наработки в 4 сут. Для повышения надежности создан резерв времени $\tau = 4 \text{ ч}$. Необходимо найти вероятность выполнения задания, среднюю наработку до окончания резерва времени и среднее время выполнения задания.

Решение. Вероятность выполнения задания находим по формулам табл. 9.4 при $\rho = (\lambda t_0)^m = (0,0104 \cdot 96)^{0,7} = 1$, $\gamma = \mu \tau = 4$. Используя коэффициенты из табл. 9.5, получаем верхнюю и нижнюю оценки при различном числе слагаемых в формулах:

$$\begin{aligned} \underline{P}_0 &= 0,3679(1+0,9817)+0,1839(-0,3293 \cdot 0,9817+1,3293 \cdot 0,9084)+ \\ &+ 0,0613 (0,09358 \cdot 0,9817-1,1418 \cdot 0,9084+2,0482 \cdot 0,7619)+0,0153 \times \\ &\times (-0,9817 \cdot 0,025+0,9084 \cdot 0,6974-3,1575 \cdot 0,7619+3,4852 \cdot 0,5665); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_0 &= 1-0,0067-0,1839 (0,0183+1,3293 \cdot 0,0733)-0,0613 (0,0183 + \\ &+ 0,9064 \cdot 0,0733+2,0482 \cdot 0,1465)-0,0153(0,0183+0,0733 \cdot 0,025+ \\ &+ 0,1465 \cdot 0,3276+0,1954 \cdot 3,4851). \end{aligned}$$

Результаты расчетов сведены в табл. 9.7.

9.2.3. Элемент с мгновенно пополняемым резервом времени (подкласс 10000). Элемент функционирует так же, как в предыдущем случае, но момент отказа устанавливается иначе. Отказ наступает в момент времени, когда время восстановления после очередного нарушения работоспособности превысит резервное время τ_1 , которое в общем случае является случайной величиной с заданным распределением $\Phi(t)$. Интервалы времени $\eta < \tau_1$ («короткие интервалы») либо включаются, либо не включаются в полезное дело. В первом случае вероятность безотказ-

Показатели надежности элемента (подкласс EE11)

Показатель	Расчетная формула
$P_0(t_0, \tau)$	$1 - I(K, \rho) + \sum_{i=1}^{\infty} I(ri, \gamma) [I(Ki, \rho) - I((i+1)K, \rho)], \rho = \lambda t_0, \gamma = \mu \tau$
$P_0^a(t_0, \tau)$	$\frac{\Phi(\gamma - r\rho/K) / \sqrt{(1+r/K) r\rho/K}}{\Phi((K + K\gamma/r - \rho) / \sqrt{(1+K/r) K\gamma/r})}$
$\bar{T}_0(\tau)$	$\bar{T}_0 \sum_{i=0}^{\infty} I(ri, \gamma) \approx \frac{K}{\lambda r} \left(\gamma + \frac{r+1}{2} \right)$
$\bar{T}_1(t_0)$	$t_0 + \frac{r}{\mu} \sum_{i=1}^{\infty} I(Ki, \lambda t_0) \approx t_0 \left(1 + \frac{r\lambda}{K\mu} \right) - \frac{r(K-1)}{2K\mu}$
$DT_0(\tau)$	$\frac{K^2}{\lambda^2} \left[1 + \frac{1}{K} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{K} + 2i \right) I(ri, \gamma) \right] - \bar{T}_0^2(\tau)$
$DT_1(t_0)$	$r\lambda t_0 \left(1 + \frac{K}{r} \right) / K\mu^2$
$K(\tau)$	$1 - \frac{\lambda}{K\mu + r\lambda} \left[r - \sum_{i=1}^r I(i, \gamma) \right] = K + (1-K) \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r I(i, \gamma), K = \frac{K\mu}{K\mu + r\lambda}$

Таблица 9.4

Показатели надежности элемента (подкласс WE11)

Показатель	Расчетная формула
$P_0(t_0, \tau)$	$e^{-\rho} \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho^i}{i!} \sum_{j=1}^i a_{ji} I(ri, \gamma) \right] =$ $= 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho^i}{i!} e^{-\rho} \sum_{\gamma=0}^{ir-1} e^{-\gamma} \frac{\gamma^\gamma}{\gamma!} b_{[\gamma/r]+1, i},$ $\rho = (\lambda t_0)^m, \gamma = \mu \tau, b_{ri} = \sum_{j=r}^i a_{ji}$
$\bar{T}_0(\tau)$	$\bar{T}_0 \sum_{i=0}^{\infty} I(ri, \gamma) \approx \bar{T}_0 \left(\frac{\gamma}{r} + \frac{r+1}{2r} \right), \bar{T}_0 = \Gamma \left(1 + \frac{1}{m} \right) / \lambda$

Показатель	Расчетная формула
$P_0^a(t_0, \tau)$	$\Phi\left(\left[\gamma\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)-r\rho\right]/\sqrt{\rho r^2 A\Gamma(1+1/m)}\right),$ $A=\Gamma\left(1+\frac{2}{m}\right)-1+\frac{1}{r};$ $\Phi\left(\left[\gamma(r+1-\rho)/\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)\right]/\sqrt{\gamma A/r}\right)$
$\bar{T}_1(t_0)$	$t_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{r}{\mu} C_j \frac{\rho^j}{j!} e^{-\rho} \approx$ $\approx t_0 \left(1 + \frac{r\lambda/\mu}{\Gamma(1+1/m)}\right) + \frac{r}{\mu} \left[\frac{\Gamma(1+2/m)}{2\Gamma^2(1+1/m)} - 1\right]$
$DT_1(t_0)$	$\frac{r^2}{\mu^2} \frac{2\Gamma(1+2/m)\lambda t_0}{\Gamma^3(1+1/m)} + \frac{r}{\mu^2} \sum_{i=1}^{\infty} C_i \frac{\rho^i}{i!} e^{-\rho}$
$K(\tau)$	$K + (1-K) \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r J(i, \gamma), \quad K = \Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right) / \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right) + \frac{r\lambda}{\mu}\right]$

Таблица 9.5

Коэффициенты a_{ij} в формуле свертки распределений Вейбулла—Гнеденко

i	j	m					
		0,5	0,7	0,9	1,2	1,6	2,0
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	-0,57080	-0,32933	-0,10349	0,18559	0,47302	0,66667
2	2	1,57080	1,32933	1,10349	0,81441	0,52698	0,33333
1	3	0,28761	0,09358	0,00916	0,02958	0,19613	0,40000
2	3	-2,42920	-1,14178	-0,28900	0,37068	0,59912	0,53333
3	3	3,14159	2,04820	1,27984	0,59974	0,20475	0,06667
1	4	-0,13717	-0,02503	-0,00076	0,00443	0,07687	0,22857
2	4	2,70796	0,69737	0,05341	0,11826	0,47438	0,59048
3	4	-8,97300	-3,15746	-0,58723	0,46422	0,38370	0,17143
4	4	7,40220	3,48511	1,53458	0,41309	0,06504	0,00952
1	5	0,06343	0,00648	0,00006	0,00064	0,02920	0,12698
2	5	-2,64307	-0,37007	-0,00854	0,03249	0,32222	0,55873
3	5	16,8341	3,16547	0,17410	0,23060	0,45826	0,27937
4	5	-32,9937	-8,19176	-1,05219	0,46564	0,17254	0,03386
5	5	19,7392	6,38989	1,88556	0,27062	0,01777	0,00106
1	6	-0,02875	-0,00164	0,00000	0,00009	0,01088	0,06926
2	6	2,40484	0,18214	0,00126	0,00823	0,20121	0,48485
3	6	-26,2100	-2,61541	-0,04234	0,09351	0,44454	0,36825
4	6	91,4537	11,8791	0,44267	0,32117	0,27757	0,07273
5	6	-124,757	-20,8823	-1,76767	0,40767	0,06148	0,00481
6	6	58,1368	12,4381	2,36609	0,17033	0,00431	0,00010
1	7	0,01286	0,00041	0,00000	0,00001	0,00400	0,03730
2	7	-2,09699	-0,08560	-0,00018	0,00198	0,11922	0,39853
3	7	36,7466	1,93575	0,00919	0,03372	0,38200	0,42864
4	7	-202,871	-13,7020	-0,14751	0,17356	0,35050	0,12219
5	7	472,862	40,6548	0,98212	0,36232	0,12488	0,01280

i	j	m					
		0,5	0,7	0,9	1,2	1,6	2,0
3	2	3	4	5	6	7	8
6	7	-489,692	-53,2534	-2,86098	0,32472	0,01845	0,00053
7	7	186,038	25,4500	3,01735	0,01369	0,00094	0,00001
1	8	0,00568	-0,00010	-0,00001	0,00000	0,00146	0,01989
2	8	1,77760	0,03904	0,00003	0,00047	0,068180	0,31577
3	8	-48,2107	-1,33533	-0,00187	0,01126	0,30323	0,45970
4	8	394,925	13,8020	0,04279	0,08158	0,38229	0,17685
5	8	-1397,45	-61,3814	-0,42157	0,24775	0,19442	0,02605
6	8	2410,37	132,478	2,00193	0,35668	0,04539	0,00169
7	8	-1999,65	-136,953	-4,52451	0,24093	0,00484	0,00005
8	8	639,247	54,3509	3,90321	0,06135	0,00019	0,00000
1	9	0,00253	0,00001	-0,00002	-0,00001	0,00053	0,01053
2	9	-1,47712	-0,01726	0,00002	0,00011	0,03801	0,24371
3	9	60,4517	0,87721	0,00031	0,00356	0,22765	0,46530
4	9	-705,808	-12,7122	-0,01125	0,03485	0,37782	0,23139
5	9	3554,01	79,3941	0,15449	0,14416	0,25673	0,04485
6	9	-9071,39	-250,775	-1,06225	0,29601	0,08409	0,00403
7	9	12318,4	420,266	3,85514	0,31690	0,01400	0,00018
8	9	-8491,00	-356,534	-7,04908	0,16902	0,00114	0,00000
9	9	2337,82	120,502	5,11264	0,03540	0,00004	0,00000
1	10	-0,00102	-0,00003	-0,00002	-0,00001	0,00021	0,00555
2	10	1,20876	0,00809	0,00012	0,00004	0,02079	0,18444
3	10	-73,3708	-0,55771	-0,00032	0,00105	0,16402	0,45120
4	10	1188,08	10,9936	0,00314	0,01391	0,34782	0,28145
5	10	-8173,03	-92,5091	-0,05120	0,07512	0,30275	0,06885
6	10	28933,7	400,662	0,47459	0,20607	0,13029	0,00802
7	10	-57143,8	-966,961	-2,45539	0,31054	0,03009	0,00049
8	10	63669,0	1314,41	7,13183	0,26003	0,00378	0,00002
9	10	-37438,0	-941,255	-10,8744	0,11325	0,00024	0,00000
10	10	9037,14	276,214	6,77163	0,01997	0,00001	0,00000

Таблица 9.6

Коэффициенты C_i в формуле для расчета среднего значения и дисперсии времени выполнения задания

i	m					
	0,5	0,7	0,9	1,2	1,6	2,0
1	1	1	1	1	1	1
2	2,57080	2,32933	2,10349	1,81441	1,52698	1,33333
3	4,85398	3,95462	3,27068	2,57017	2,00862	1,66667
4	7,96857	5,83780	4,48270	3,28596	2,43691	1,96190
5	12,0010	7,94513	5,72935	3,97311	2,82745	2,22328
6	17,0035	10,2500	7,00434	4,63810	3,19049	2,45926
7	23,0006	12,7322	8,30338	5,28511	3,53218	2,67629
8	29,9994	15,3764	9,62338	5,91708	3,85653	2,87865
9	38,0000	18,1701	10,9620	6,53615	4,16636	3,06915
10	47,0005	21,1039	12,3174	7,14388	4,46369	3,24970

Вероятность выполнения задания

i	$\underline{P}_0$	$\overline{P}_0$	$(\underline{P}_0 + \overline{P}_0)/2$	i	$\underline{P}_0$	$\overline{P}_0$	$(\underline{P}_0 + \overline{P}_0)/2$
1	0,7291	0,9933	0,8612	3	0,9307	0,9484	0,9395
2	0,8931	0,9720	0,9326	4	0,9334	0,9358	0,9347

ного функционирования определяется из системы уравнений для преобразований Лапласа — Стилтеса:

$$q_0(S) = a_{01}(S) q_1(S); \quad q_1(S) = a_{10}(S) q_0(S) + a_{12}(S); \quad q_i(S) = \int_0^{\infty} e^{-St} dQ_i(t); \quad (9.9)$$

$$a_{ij}(S) = \int_0^{\infty} e^{-St} dP_{ij}(t); \quad P_{01}(t) = F(t); \quad P_{10}(t) = \int_0^t [1 - \Phi(x)] dG(x);$$

$$P_{12}(t) = \int_0^t [1 - G(x)] d\Phi(x).$$

Общее решение (9.9) при $\overline{T}_0 \geq \overline{T}_1$ имеет вид

$$P_0(t) = 1 - Q_0(t) = 1 - q \sum_{n=0}^{\infty} (1-q)^n F^{*(n+1)}(t), \quad (9.10)$$

где $q = P(\eta > \tau_1) = \int_0^{\infty} [1 - G(x)] d\Phi(x) = p_{12} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{12}(t)$; $F^{*(n+1)}(t)$ — $(n+1)$ -кратная свертка распределения $F(t)$. При $F(t) = 1 - \exp \times (-\lambda t)$ формула (9.10) преобразуется к виду

$$P_0(t) = \exp(-q \lambda t).$$

При $\tau_1 = t_1 = \text{const}$

$$P_0(t) = \begin{cases} 1, & t \leq t_1, \\ \exp\{-\lambda(1 - G(t_1))(t - t_1)\}, & t \geq t_1. \end{cases} \quad (9.11)$$

Если восстановление работоспособности быстрое ($\overline{T}_0 \gg \overline{T}_1$) и q мало (событие $\eta > \tau_1$ — редкое), то вероятность $P_0(t)$ можно оценивать по асимптотической формуле

$$P_0(t) \approx \exp(-qt/\overline{T}_0), \quad \overline{T}_0 = \int_0^{\infty} x dF(x).$$

Средняя наработка до первого отказа находится с помощью (9.9) и известного выражения

$$\overline{T}_0(\tau_1) = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} [1 - q_0(S)] = \frac{1}{q} \left\{ \overline{T}_0 + \int_0^{\infty} [1 - G(t)] [1 - \Phi(t)] dt \right\}.$$

Приближенно $\overline{T}_0(\tau_1)$ можно оценивать с помощью первого слагаемого, являющегося основным.

Коэффициент готовности за заданное время

$$K(\tau_1) = 1 - q\overline{T}_1/(\overline{T}_0 + \overline{T}_1).$$

Если короткие промежутки времени восстановления не включаются в полезное время, $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$, $\tau_1 = t_1 = \text{const}$, то

$$P_0(t) = \exp\{-\lambda t [1 - G(t_1)]\}, \quad (9.12)$$

где t — требуемая суммарная наработка. Формула (9.12) точная и верна не только при $\bar{T}_0 \gg \bar{T}_1$, но и при любых соотношениях между $\bar{T}_0$ и $\bar{T}_1$. Средняя наработка до отказа, полученная из (9.12),

$$\bar{T}_0(t_1) = \bar{T}_0/q = \bar{T}_0/[1 - G(t_1)].$$

Коэффициент готовности

$$K(t_1) = \left[\bar{T}_0 + \int_0^{t_1} x dG(x) \right] / (\bar{T}_0 + \bar{T}_1).$$

Пример 9.3. Устройство осуществляет прием, обработку и передачу информации в реальном масштабе времени. По условиям функционирования задержка в передаче информации на 20 мин и более рассматривается как срыв функционирования. Необходимо найти показатели надежности устройства, полагая, что интенсивность отказов $\lambda = 0,04 \text{ ч}^{-1}$, среднее время восстановления $\bar{T}_1 = 1/\mu = 0,2 \text{ ч}$, оперативное время $t = 8 \text{ ч}$.

Решение. Вероятность безотказного функционирования определяется по формуле (9.11): $P_0(t) = \exp\{-0,04(8 - 0,33) \exp(-5 \cdot 0,33)\} = 0,943$. При отсутствии резерва времени $P_0(t) = \exp(-0,04 \cdot 8) = 0,726$. Выигрыш в надежности по вероятности срыва функционирования $G_Q = 0,274/0,057 = 4,8$. Средняя наработка $\bar{T}_0(t_1) = 25 \cdot \exp(5 \cdot 0,33) = 130 \text{ ч}$. Выигрыш в надежности по средней наработке $G_T = 130/25 = 5,2$. Коэффициенты готовности $K(t_1) = 1 - \exp(-5 \cdot 0,33)0,2/25,2 = 0,9985$; $K(0) = 25/25,2 = 0,992$. Выигрыш по коэффициенту простоя $G_K = [1 - K(0)]/[1 - K(t_1)] = 0,008/0,0015 = 5,3$.

9.2.4. Элемент с комбинированным резервом времени (подкласс 20000). Элемент имеет мгновенно пополняемый резерв времени τ_1 с распределением $\Phi(t)$ и непополняемый резерв τ , расходуемый после того, как исчерпан резерв τ_1 . Срыв функционирования происходит в момент времени, когда фактический расход непополняемого резерва превысит τ . Интервалы времени восстановления η_i , не превышающие τ_1 , включаются в полезное время. При этих условиях вероятность выполнения задания длительности t_0 находится из системы уравнений

$$\begin{aligned} P_0(t_0, \tau) &= 1 - F(t_0) + \int_0^{t_0} P_1(t_0 - x, \tau) dF(x); \\ P_1(t_0, \tau) &= [1 - G(t_0)][1 - \Phi(t_0)] + \int_0^{t_0} [1 - \Phi(x)] P_0(t_0 - x, \tau) dG(x) + \\ &+ \int_0^{t_0} d\Phi(x) \int_x^{\tau+x} P_0(t_0 - x, \tau + x - y) dG(y). \end{aligned} \quad (9.13)$$

При $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$ и $G(t) = 1 - \exp(-\mu t)$ из (9.13) получается следующая расчетная формула:

$$P_0(t_0, \tau) = e^{-\rho} \left[1 + \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\rho^K}{K!} I(K, \mu\tau) \right], \quad \rho = \lambda(t_0 - \bar{\tau}_1) \varphi(\mu), \quad (9.14)$$

$$\bar{\tau}_1 = \int_0^{\infty} x d\Phi(x), \quad \varphi(\mu) = \int_0^{\infty} e^{-\mu x} d\Phi(x), \quad t_0 > \bar{\tau}_1.$$

При $\Phi(t) = 0$ формула (9.14) совпадает с (9.3), а при $\tau = 0$ и $\tau_1 = t_1$ — с формулой (9.11).

Средняя наработка до срыва функционирования находится между величинами:

$$\bar{T}_0^{(1)}(\tau) = (\bar{T}_0 + \bar{T}_1) \int_0^\infty \int_x^\infty (u-x)^2 dG(u) d\Phi(x) / 2A^2 + (\bar{T}_0 + \bar{T}_1) \tau / A;$$

$$\bar{T}_0^{(2)}(\tau) = (\bar{T}_0 + \bar{T}_1) \left(\frac{1}{q} + \frac{\tau}{A} \right), \quad A = \int_0^\infty \int_x^\infty [u-x] dG(u) d\Phi(x);$$

$$\bar{T}_0 = \int_0^\infty x dF(x), \quad \bar{T}_1 = \int_0^\infty [1-G(x)][1-\Phi(x)] dx.$$

При малых τ $\bar{T}_0(\tau)$ ближе к $\bar{T}_0^{(2)}(\tau)$, а при больших — к $\bar{T}_0^{(1)}(\tau)$. При $G(t) = 1 - \exp(-\mu t)$, $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$, $\tau_1 = t_1$

$$\bar{T}_0(\tau, t_1) = \frac{1}{\mu} (1 + \mu\tau) \left[\exp(\mu t_1) \left(1 + \frac{\mu}{\lambda} \right) - 1 \right].$$

При выводе расчетной формулы для коэффициента готовности используется его трактовка как вероятности выполнения краткосрочного задания ($t_0 \approx 0$). К ранее сделанным допущениям следует добавить еще одно: о том, как расходуется резерв времени при нарушении работоспособности элемента в отсутствие заявок на выполнение задания. Если резерв τ_1 расходуется даже в отсутствие заявки, а резерв τ только с приходом заявки либо резерв τ_1 не расходуется до прихода заявки, но для выполнения даже краткосрочного задания требуется восстановление работоспособности в течение времени, не превышающем $\tau_1 + \tau$, то коэффициент готовности рассчитывается по формуле

$$K^{(1)}(\tau) = 1 - \frac{1}{\bar{T}_0 + \bar{\eta}} \int_0^\infty \Phi(x) (1 - G(x + \tau)) dx, \quad \bar{\eta} = \int_0^\infty x dG(x). \quad (9.15)$$

Если же резерв τ_1 расходуется до прихода заявки, а после ее прихода элемент должен быть отремонтирован, даже когда τ_1 не исчерпан, то коэффициент готовности

$$K^{(2)}(\tau) = 1 - \frac{1}{\bar{T}_0 + \bar{\eta}} \int_0^\infty [1 - G(x + \tau)] [\Phi(x) dx + x d\Phi(x)].$$

При $G(t) = 1 - \exp(-\mu t)$ формула (9.15) приобретает вид

$$K^{(1)}(\tau) = 1 - q e^{-\mu\tau} / (1 + \mu\bar{T}_0), \quad q = \varphi(\mu).$$

Среднее время выполнения задания t_0 находится между величинами:

$$\bar{T}_1^{(1)}(t_0) = t_0 (1 + B / (\bar{T}_0 + \bar{T}_1)), \quad \bar{T}_0 = \int_0^\infty x dF(x);$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_1^{(2)}(t_0) = & \bar{T}_1^{(1)}(t_0) + (\bar{T}_0 + \bar{T}_1)^{-1} \left[\int_0^\infty x d\Phi(x) \right] \int_0^x [1 - G(u)] du - B\bar{T}_0 - \bar{\eta}\bar{\tau}_1 + \\ & + B(\alpha_0 + \alpha_1 + \bar{T}_0\bar{T}_1) / 2(\bar{T}_0 + \bar{T}_1)^2, \end{aligned}$$

где $\alpha_0 = \int_0^\infty x^2 dF(x)$; $\alpha_1 = \int_0^\infty x^2 dF_1(x)$; $F_1(x) = 1 - [1 - G(x)][1 - \Phi(x)]$;

$$B = \bar{\eta} - \int_0^\infty d\Phi(x) \int_0^x [1 - G(u)] du; \quad \bar{T}_1 = \int_0^\infty [1 - \Phi(t)][1 - G(t)] dt.$$

При экспоненциальном распределении времени восстановления

$$\bar{T}_1 = \frac{1}{\mu} [1 - \varphi(\mu)]; \quad B = \frac{1}{\mu} \varphi(\mu); \quad \alpha_1 = \int_0^{\infty} t^2 e^{-\mu t} \{d\Phi(t) + [1 - \Phi(t)] d(\mu t)\}$$

и среднее время выполнения задания

$$\bar{T}_1(t_0) \approx t_0 \{1 + \varphi(\mu)/[1 - \varphi(\mu) + \mu \bar{T}_0] \}.$$

При $\tau_1 = t_1$

$$\bar{T}_1(t_0) = t_0 \{1 + e^{-\mu t_1}/[\mu + \lambda(1 - e^{-\mu t_1})]\}. \quad (9.16)$$

Пример 9.4. Технологическая линия с интенсивностью отказов $\lambda = 0,05 \text{ ч}^{-1}$ и средним временем восстановления $\bar{\eta} = 10$ мин допускает перерывы в работе на время, не превышающее 15 мин. Если простой более длительный, то поставки продукции на выходе линии осуществляются за счет запасов, которых хватает для компенсации простоев в течение 30 мин. Необходимо найти вероятность безотказной работы линии в течение $t_0 = 5$ ч и среднее время до исчерпания запасов.

Решение. Исходные данные для расчетов: $\mu t_1 = 15/10 = 1,5$; $\lambda t_0 = 0,25$; $\lambda t_1 = 0,05 \cdot 0,25 = 0,0125$; $\mu \tau = 3$. Вероятность безотказной работы линии рассчитываем по формуле (9.14): $P_0(t_0, \tau) = 0,9974$. Среднее время выполнения пятичасового задания согласно (9.16) равно $\bar{T}_1(t_0) = 5 \{1 + \exp(-1,5)/[1 - \exp(-1,5) + 120]\} = 5,008 \text{ ч}$.

9.2.5. Последовательная система с непополняемым резервом времени (подкласс 00000). Система из n последовательно соединенных элементов функционирует так, что после отказа любого элемента [время до отказа имеет распределение $R_i(t)$] восстановление работоспособности происходит за счет непополняемого резерва τ в течение времени η_i , имеющем распределение $G_i(t)$. Во время ремонта новых отказов не происходит. Отказы обнаруживаются немедленно с помощью системы аппаратного контроля. В математической модели исходной системе ставится в соответствие полумарковский процесс с $(n+1)$ -м состоянием: e_0 — система работоспособна, e_i , $i = 1, \dots, n$, — система неработоспособна, а i -й элемент ремонтируется. Согласно общей схеме вводим два подмножества: $E_0 = e_0$ и $E_1 = \{e_i, i = 1, \dots, n\}$. В системе уравнений (9.1) функции вероятностей переходов:

$$P_{0i}(t) = \int_0^t [1 - F_0(x)] \lambda_i(x) dx; \quad F_0(t) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - R_i(t)]; \quad P_{i0}(t) = G_i(t);$$

$$\lambda_i(t) = R'_i(t)/[1 - R_i(t)].$$

При экспоненциальных распределениях $R_i(t) = 1 - \exp(-\lambda_i t)$ и $G_i(t) = 1 - \exp(-\mu_i t)$

$$P_0(t_0, \tau) = e^{-\lambda t_0} \left[1 + \sum_{i=1}^n \frac{(\lambda t_0)^i}{i!} G^{*(i)}(\tau) \right], \quad \lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad (9.17)$$

где $G^{*(i)}(t)$ — i -кратная свертка $G(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} [1 - \exp(-\mu_i t)]$.

Отсюда следует, что при одинаковых $G_i(t)$ система может быть заменена одним эквивалентным элементом с интенсивностью отказов λ . Если же μ_i различны, то вычисление сверток надо проводить численно.

Показатели надежности последовательной системы (подкласс 00000)

Показатель	Расчетная формула
$\bar{T}_0(\tau)$	$\left(\rho\tau + \sum_{i=1}^n \rho_i/\mu_i \right) / \rho^2, \quad \rho_i = \lambda_i/\mu_i, \quad \rho = \sum_{i=1}^n \rho_i$
$DT_0(\tau)$	$\left[2\tau \sum_{i=1}^n \rho_i/\mu_i + 5 \left(\sum_{i=1}^n \rho_i/\mu_i \right)^2 / \rho - 4 \sum_{i=1}^n \rho_i/\mu_i^2 \right] / \rho^3$
$\bar{T}_1(t_0)$	$(1 + \rho) t_0$
$DT_1(t_0)$	$2t_0 \sum_{i=1}^n \rho_i/\mu_i$

При распределениях наработки Вейбулла — Гнеденко $R_i(t) = 1 - \exp \{ - (\lambda_i t)^m \}$ вероятность выполнения задания определяется по формуле из табл. 9.4, в которой функция $I(r_i, \gamma)$ должна быть заменена функцией $G^{*(i)}(t)$, а

$$G(t) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda} \right)^m G_i(t); \quad \lambda^m = \sum_{i=1}^n \lambda_i^m. \quad (9.18)$$

Расчетные формулы для моментов случайных величин $T_0(\tau)$ и $T_1(t_0)$ при экспоненциальных распределениях приведены в табл. 9.8. При других распределениях показатели надежности можно рассчитать по формулам (9.5)—(9.8), если удастся свести систему к одному эквивалентному элементу.

Пример 9.5. Система состоит из трех элементов с показателями надежности: $\lambda_1 = 0,02 \text{ ч}^{-1}$; $\lambda_2 = 0,001 \text{ ч}^{-1}$; $\lambda_3 = 0,0001 \text{ ч}^{-1}$; $\mu_1 = 6 \text{ ч}^{-1}$; $\mu_2 = 0,6 \text{ ч}^{-1}$; $\mu_3 = 0,09 \text{ ч}^{-1}$. При выполнении задания длительностью $t_0 = 16 \text{ ч}$ допускается задержка в выдаче результатов на время 20 мин. Найти вероятность выполнения задания, средние значения и дисперсии наработки до окончания резерва времени и времени выполнения задания.

Решение. Расчет вероятности выполнения задания проводим по формуле (9.17). Для упрощения расчетов при вычислении сверток заменим $G(t)$ на $G_1(t)$ либо на $\lambda_1 G_1(t)/\lambda$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. В первом случае получим оценку сверху, во втором — снизу:

$$\begin{aligned} \overline{P_0(t_0, \tau)} &= \exp(-0,0211 \cdot 16) \{ 1 + 0,3376 (0,9479 [1 - \exp(-2)] + \\ &+ 0,0474 [1 - \exp(-0,2)] + 0,00473 [1 - \exp(-0,03)] \} + 0,057 \cdot (0,9479)^2 [1 - \\ &- 3 \exp(-2)] + 0,0064 \cdot (0,9479)^3 [1 - 5 \exp(-2)] + 0,00054 \cdot (0,9479)^4 [1 - 6,333 \times \\ &\times \exp(-2)] \} = 0,7135 (1,2796 + 0,9479 \cdot 0,034) = 0,9360; \\ \overline{P_0(t_0, \tau)} &= 0,7135 (1,2796 + 0,036) = 0,9387. \end{aligned}$$

В отсутствие резерва времени $P_0(t) = 0,7135$. Среднее время выполнения задания

$$\bar{T}_1(t_0) = 16 (1 + 0,02/6 + 0,001/0,6 + 0,0001/0,09) = 16,1 \text{ ч.}$$

Дисперсия

$$D = 32 (0,02/36 + 0,001/0,36 + 0,0001/0,0081) = 0,5017;$$

$$\sigma = \sqrt{DT_1(t_0)} = 0,7083; \quad r = \sigma/\bar{T}_1(t_0) = 0,044.$$

Средняя наработка до окончания резерва времени

$$\bar{T}_0(\tau) = (0,0061/3 + 0,01568)/0,0061^2 = 474,4 \text{ ч.}$$

Без резерва времени $\bar{T}_0(0) = 47,4 \text{ ч.}$ Выигрыш в надежности $G_T = 10$. Дисперсия наработки

$$DT_0(\tau) = [32 \cdot 0,0157 + 0,0157^2/0,0061 - 4(0,02/216 + 0,001/0,216 + 0,0001/0,00073)] = 593 \text{ 000 ч}^2; \sigma_0 = 770 \text{ ч}; r_0 = \sigma_0/\bar{T}_0(\tau) = 1,62.$$

9.2.6. Последовательная система с комбинированным резервом времени (подкласс 20000). В систему, рассмотренную в предыдущем пункте, дополнительно вводится отдельный мгновенно пополняемый резерв времени τ_{1i} , расходуемый при отказе только i -го элемента ($i = 1, \dots, n$) и имеющий распределение $\Phi_i(t)$. Неполняемый резерв τ расходуется только после окончания резерва τ_{1i} и доступен любому элементу. Вероятность выполнения задания находится из системы интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} P_0(t_0, \tau) &= 1 - F_0(t_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^{t_0} P_i(t_0 - x, \tau) dP_{0i}(x); \\ P_i(t_0, \tau) &= [1 - G_i(t_0)][1 - \Phi_i(t_0)] + \int_0^{t_0} [1 - \Phi_i(x)] P_0(t_0 - x, \tau) dG_i(x) + \\ &+ \int_0^{t_0} d\Phi_i(x) \int_x^{\tau+x} P_0(t_0 - x, \tau + x - y) dG_i(y), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (9.19)$$

При $G_i(t) = 1 - \exp(-\mu_i t)$ и $R_i(t) = 1 - \exp(-\lambda_i t)$ решение (9.19) имеет вид:

$$P_0(t_0, \tau) = e^{-\rho} \left[1 + \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K!} \rho^K G^{*(K)}(\tau) \right]; \quad \rho = \Lambda t_0 - \sum_{i=1}^n \Lambda_i \bar{\tau}_{1i}; \quad (9.20)$$

$$\Lambda = \sum_{i=1}^n \Lambda_i, \quad \Lambda_i = \lambda_i \varphi_i(\mu_i); \quad G(\tau) = \sum_{i=1}^n \frac{\Lambda_i}{\Lambda} [1 - \exp(-\mu_i \tau)]; \quad t_0 > \max_{(i)} \bar{\tau}_{1i}.$$

Другие показатели надежности приведены в табл. 9.9. Индексы в $K^{(i)}(\tau)$ соответствуют описанию в п. 9.2.4. При $n = 1$ из формулы (9.20) и табл. 9.9 получаются формулы п. 9.2.4, а при $\tau = 0$ — формулы п. 9.2.3.

9.2.7. Система с неполняемым резервом времени и общим структурным резервом (подкласс 00100). Система содержит n основных и k резервных элементов. При экспоненциальных распределениях наработки и времени восстановления элементов, одной ремонтной бригаде и полном восстановлении системы после отказа $k + 1$ элементов вероятность выполнения задания определяется по формуле

$$P_0(t_0, \tau) \approx e^{-t_0/\bar{T}_0} \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} (t_0/\bar{T}_0)^i I(ki, \mu\tau) \right], \quad (9.21)$$

$$\bar{T}_0 = \sum_{i=0}^k \sum_{s=0}^i \kappa_s / \lambda_i \kappa_i, \quad \kappa_s = \prod_{j=1}^s \lambda_{j-1} / \mu_j,$$

где λ_i и μ_i — интенсивности переходов в марковском графе состояний.

Показатели надежности последовательной системы (подкласс 20000)

Показатель	Расчетная формула
$\bar{T}_0(\tau)$	$\left(\bar{T}_0 + \sum_{i=1}^n \rho_{0i} \bar{T}_i \right) \left(\tau/A + \sum_{i=1}^n \lambda_i \rho_{i, n+i} / \lambda \mu_i^2 A^2 \right),$ $\rho_{i, n+i} = \varphi_i(\mu_i), A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \rho_{i, n+i} / \lambda \mu_i, \quad \varphi_i(\mu_i) = \int_0^\infty e^{-\mu_i x} d\Phi_i(x)$
$\bar{T}_1(r_0)$	$t_0 + \frac{1}{C} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda \mu_i} \left[\varphi_i(\mu_i) \left(t_0 - \frac{1}{\lambda} \right) - \bar{C}_i \right] + \frac{1}{C^2} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda \mu_i} \times$ $\times \varphi_i(\mu_i) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} \left[\alpha_{2i} + \frac{1}{\lambda} \bar{T}_i + \frac{1}{\mu_i} (\bar{T}_i - \bar{C}_i) \right], \quad C = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} \times$ $\times \left(\frac{1}{\lambda} + \bar{T}_i \right), \quad \bar{T}_i = \frac{1}{\mu_i} [1 - \varphi_i(\mu_i)], \quad \alpha_{2i} = \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx,$ $\bar{C}_i = \int_0^\infty x e^{-\mu_i x} d\Phi_i(x)$
$K^1(\tau)$	$1 - \frac{1}{1 + \rho} \sum_{i=1}^n \rho_i \varphi_i(\mu_i) e^{-\mu_i \tau}, \quad \rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}, \quad \rho = \sum_{i=1}^n \rho_i$
$K^2(\tau)$	$k^{(1)}(\tau) - \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{C}_i e^{-\mu_i \tau}$

Если после отказа система возобновляет работу сразу же, как в ней оказались работоспособными n элементов, то

$$P_0(t_0, \tau) \approx e^{-\Lambda_0 t_0} \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} (\Lambda_h t_0)^i I(i, \mu_{h+1} \tau) (e^{\Lambda_0 t_0} - 1) / (e^{\Lambda_h t_0} - 1) \right],$$

$$\Lambda_0 = 1/\bar{T}_0, \quad \Lambda_h = \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i / \lambda_h \mu_h \right)^{-1}.$$

При скользящем нагруженном резервировании с кратностью k/n и произвольных распределениях наработки элементов $F(t)$ и времени восстановления $G(t)$ для вероятности выполнения задания получены приближенные формулы, использующие асимптотические выражения для показателей надежности резервированных систем при быстром восстановлении:

$$P_0(t_0, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} [H_0(t_0)]^i \exp \{ -H_0(t_0) \} I(i, \gamma),$$

$$\gamma = -\ln(1 - \tilde{G}(\tau)), \quad H_0(t_0) = \int_0^{t_0} h_0(x) dx,$$

$$h_0(t) = [h(t)]^{k+1} \int_0^\infty \left\{ \int_x^\infty [1 - G(u)] du \right\}^{r-1} \frac{x^{k-r}}{(k-r)!} \frac{dx}{(r-1)!}.$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}(t) = 1 - \int_0^\infty \left\{ \int_x^\infty [1 - G(u)] du \right\}^{r-1} [1 - G(x+t)] x^{k-r} dx \int_0^\infty \times \\ \times \left\{ \int_x^\infty [1 - G(u)] du \right\}^{r-1} x^{k-r} dx, \end{aligned}$$

где $h(t)$ — функция интенсивности потока отказов неизбыточной системы; r — число ремонтных бригад. При общем резервировании с целой кратностью $1/n$ и $r = n + 1$ для системы с нагруженным резервом

$$h_0(t) \approx (n + 1) \bar{\eta}^n [h(t)]^{n+1}; \quad \tilde{G}(t) = G(t).$$

При ненагруженном дублировании

$$H_0(t_0) = qt_0/\bar{\xi}; \quad q = \int_0^\infty [1 - G(x)] dF(x); \quad \bar{\xi} = \int_0^\infty x dF(x); \quad \gamma = -\ln[1 - G(\tau)].$$

Пример 9.6. Система из двух ЭВМ производительностью 100 тыс. операций/с, одна из которых находится в нагруженном резерве и при безотказной работе выполняет задание за время $t = 6$ ч. Распределения наработки и времени восстановления экспоненциальные с параметрами $\lambda = 0,05 \text{ ч}^{-1}$ и $\mu = 1 \text{ ч}^{-1}$. Вероятность выполнения задания $P(t) = \exp\{-2\lambda^2 t / (3\lambda + \mu)\} = 0,974$. При модернизации процессор заменен более быстрой действующим, обеспечивающим производительность ЭВМ $C = 150$ тыс. операций/с. Найти вероятность выполнения того же задания в том же интервале времени, полагая, что параметры λ и μ не изменились.

Решение. Согласно исходным данным: $k = 1$; $t_0 = 6/1,5 = 4$ ч; $\tau = 6 - 4 = 2$ ч; $\Lambda_0 = 4,35 \cdot 10^{-3} \text{ ч}^{-1}$; $\Lambda_1 = 4,55 \cdot 10^{-3} \text{ ч}^{-1}$; $\mu_2 = \mu$; $\mu\tau = 2$; $\Lambda_1 t_0 = 0,0182$. Вероятность выполнения задания $P_0(t_0, \tau) = \exp(-0,0174) \{1 + (0,01754/0,01835)(0,0182[1 - \exp(-2)] + 1,65 \cdot 10^{-4}[1 - 3 \exp(-2)])\} = 0,9976$. Вероятность срыва задания уменьшилась в 11 раз. Для сравнения заметим, что одиночная ЭВМ производительностью 150 тыс. операций/с выполняет это же задание с вероятностью 0,971.

9.3. ОДНОКАНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ОБЕСЦЕНИВАЮЩИМИ ОТКАЗАМИ

9.3.1. Общий случай. Рассматриваются общая вероятностная схема для систем класса GG11, подкласса X1X0X (с обесценивающими отказами и непрерывным контролем) и ряд частных моделей надежности, следующих из общей схемы.

Рассматриваемая одноканальная система имеет два подмножества состояний: E_0 — работоспособные, E_1 — неработоспособные. В состоянии $e \in E_0$ система за время x выполняет полезную работу объема x и не расходует резерва времени. При переходе из состояния $e \in E_0$ в состояние $e \in E_1$ вся накопленная к этому времени наработка обесценивается. При этом резерв времени y мгновенно уменьшается на величину x , а если $x > y$, то переход немедленно приводит к срыву задания. Обесценивание наработки связано с неустраняемыми неблагоприятными последствиями отказов для результатов уже выполненной работы — искажением промежуточной информации или разрушением программы в вычислительной системе, неустраняемым браком в технологической системе и пр. В состоянии $e \in E_1$ наработка не накапливается, а резерв времени за время x уменьшается на величину x . После перехода из E_1 в E_0 выполнение задания начинается заново.

Если случайный процесс функционирования полумарковский с вложенной марковской цепью, характеризующейся матрицей $P = ||p_{ij}||$, а интервалы вре-

мени между соседними изменениями состояния имеют произвольные распределения $F_{ij}(t)$, как и в § 9.2, полумарковский процесс задается функциональной матрицей $P(t) = ||P_{ij}(t)||$; при этом $p_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$, а $F_{ij}(t) = P_{ij}(t)/p_{ij}$. Вероятности выполнения задания длительности t_0 при наличии непополняемого резерва времени τ и начальном состоянии i определяются из системы интегральных уравнений:

$$P_i(t_0, \tau) = 1 - F_i(t_0) + \sum_{i \in E_0} \int_0^{t_0} P_j(t_0 - x, \tau) dP_{ij}(x) + \\ + \sum_{i \in E_1} \int_0^a P_j(t_0, \tau - y) dP_{ij}(y), \quad i \in E_0;$$

$$P_i(t_0, \tau) = \sum_{j \in E} \int_0^\tau P_j(t_0, \tau - x) dP_{ij}(x), \quad i \in E_1; \quad E = E_0 \cup E_1; \quad a = \min(t_0, \tau). \quad (9.22)$$

После преобразования Лапласа — Стильеса (9.22) сводится к системе алгебраических уравнений:

$$P_i^*(t_0, \omega) = 1 - F_i(t_0) + \sum_{j \in E_1} a_{ij}(t_0, \omega) P_j^*(t_0, \omega), \quad i \in E_0; \quad (9.23)$$

$$P_i^*(t_0, \omega) = \sum_{j \in E} a_{ij}(\omega) P_j^*(t_0, \omega) \quad i \in E_1,$$

где a_{ij} и P_i^* — преобразования Лапласа — Стильеса, определяемые как

$$a_{ij}(t_0, \omega) = \int_0^{t_0} e^{-\omega x} dP_{ij}(x); \quad P_i^*(t_0, \omega) = \omega \int_0^\infty e^{-\omega \tau} P_i(t_0, \tau) d\tau.$$

Средний расход резерва времени до выполнения задания t_0 находится из системы уравнений

$$\bar{T}_{2i}(t_0) = \bar{T}_i(t_0) + \sum_{j \in E_1} P_{ij}(t_0) \bar{T}_{2j}(t_0), \quad i \in E_0; \quad \bar{T}_i(t_0) = \int_0^{t_0} x dF_i(x);$$

$$\bar{T}_{2i}(t_0) = \bar{T}_i + \sum_{j \in E} p_{ij} \bar{T}_{2j}(t_0), \quad i \in E_1; \quad \bar{T}_i = \int_0^\infty x dF_i(x).$$

Из общей схемы получаются результаты для частных случаев.

9.3.2. Элемент с одноэтапным заданием (подкласс 01000). Элемент с распределениями наработки $F(t)$ и времени восстановления $G(t)$ может находиться в одном из двух состояний: e_0 или e_1 . Поэтому имеем:

$$P_0^*(t_0, \omega) = 1 - F(t_0) + P_1^*(t_0, \omega) \int_0^{t_0} e^{-\omega x} dF(x);$$

$$P_1^*(t_0, \omega) = g(\omega) P_0^*(t_0, \omega), \quad g(\omega) = \int_0^\infty e^{-\omega x} dG(x).$$

Отсюда при $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$, $G(t) = 1 - \exp(-\mu t)$

$$P_0^*(t_0, \omega) = (1 + a) e^{-\lambda t_0} / (1 + a e^{-(\lambda + \omega) t_0}), \quad a = \lambda \mu / \omega (\omega + \lambda + \mu).$$

Расчетные формулы:

$$P_0(t_0, \tau) = \sum_{i=0}^{m_t} [A_i(\tau - it_0) - A_{i+1}(\tau - it_0)] e^{-(i+1)\lambda t_0}, \quad m_t = \frac{\tau}{t_0}; \quad (9.24)$$

$$A_i(t) = \binom{2i-1}{i} (pq)^i + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(i+j-1)! p^i q^j (\lambda t)^{i-j-1}}{i! j! (i-1-j)!} \times \\ \times \left\{ (-1)^{i-j} \frac{i\lambda t}{i-j} - (i+j) q e^{-(\lambda + \mu)t} \right\}, \quad i \geq 1; \\ p = 1 - q = \mu/(\lambda + \mu).$$

В случае сбоев $p = 1$, $A_i(t) = (-1)^i (\lambda t)^i / i!$. Расчетная формула

$$P_0(t_0, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-(i+1)\lambda t_0} (-1)^i \frac{1}{i!} [\lambda(\tau - it_0)]^i [1 + \lambda(\tau - it_0)/(i+1)]. \quad (9.25)$$

Из разложения $P_0^*(t_0, \omega)$ по степеням ω получены расчетные формулы для среднего значения и дисперсии времени выполнения задания:

$$\bar{T}_1(t_0) = t_0 + [\bar{T}_1 F(t_0) + \bar{T}_0(t_0)]/[1 - F(t_0)]; \\ DT_1(t_0) = [\beta_2 F(t_0) + 2\bar{T}_1 \bar{T}_0(t_0) + \alpha_2(t_0)]/[1 - F(t_0)] + \\ + [T_1 F(t_0) + \bar{T}_0(t_0)]^2/[1 - F(t_0)]^2; \\ \alpha_2 = \int_0^{t_0} x^2 dF(x), \quad \beta_2 = \int_0^{\infty} x^2 dG(x); \\ \bar{T}_0(t_0) = \int_0^{t_0} x dF(x), \quad \bar{T}_1 = \int_0^{\infty} x dG(x).$$

При экспоненциальных распределениях:

$$\bar{T}_1(t_0) = (\bar{T}_0 + \bar{T}_1) [\exp(\lambda t_0) - 1]; \\ DT_1(t_0) = \bar{T}_1^2(t_0) + (e^{\lambda t_0} - 1) (\beta_1 + 2\bar{T}_0 \bar{T}_1) + 2\bar{T}_0^2 (e^{\lambda t_0} - 1 - \lambda t_0 e^{\lambda t_0}) - \\ - 2t_0 \bar{T}_1 e^{\lambda t_0}.$$

В случае сбоев:

$$\bar{T}_1(t_0) = [\exp(\lambda t_0) - 1]/\lambda; \quad (9.26)$$

$$DT_1(t_0) = [(e^{\lambda t_0} - 1)^2 + 2(e^{\lambda t_0} - 1) - 2\lambda t_0 e^{\lambda t_0}]/\lambda^2. \quad (9.27)$$

Пример 9.7. На ЭВМ с потоком сбоев интенсивностью $\lambda = 1 \text{ ч}^{-1}$ и полной аппаратной контролью $\alpha = 0,9$ решается задача длительностью $t_0 = 2 \text{ ч}$. Полагая, что все сбои, обнаруженные аппаратным контролем, исправляются, а прочие сбои обнаруживаются с некоторой задержкой средствами функционального контроля, но обесценивают всю предыдущую наработку, необходимо оценить требуемое резервное время, достаточное для того, чтобы вероятность решения задачи была не менее 0,95. Каковы среднее значение и дисперсия времени решения задачи?

Решение. Вероятность решения задачи за минимальное время $P(t_0) = \exp\{-(1 - \alpha)\lambda t_0\} = \exp(-0,1 \cdot 2) = 0,82 < 0,95$. Поэтому необходим резерв времени. Согласно (9.25) $P_0(t_0, \tau) = \exp(-\beta \lambda t_0) (1 + \beta \lambda \tau)$, $\beta = 1 - \alpha$. При $\tau = t_0$ $P_0(t_0, t_0) = 0,98 > 0,95$. Поэтому τ находим из формулы $\tau = [0,95 \exp(\beta \lambda t_0) - 1]/\beta \lambda = 1,6 \text{ ч}$. Из (9.26) и (9.27) находим: $\bar{T}_1(t_0) = 10 [\exp(0,2) - 1] = 2,21 \text{ ч}$; $DT_1(t_0) = 100 (0,221^2 + 2 \cdot 0,221 - 0,4 \cdot 1,221) = 0,326$; $\sigma = \sqrt{DT_1(t_0)} = 0,57 \text{ ч}$; $r = \sigma/\bar{T}_1(t_0) = 0,26$.

9.3.3. Элемент с многоэтапным заданием (подкласс 01000). Чтобы уменьшить объем обесцененных работ при отказе, задание разбивают на этапы одинаковой длительности и обеспечивают защиту выполненных этапов от обесценивания. В ЭВМ это достигается установкой контрольных точек и запоминанием промежуточных результатов расчета в контрольных точках. Тогда при n этапах длительностью $\theta = t_0/n$ вероятность выполнения задания определяется по формуле

$$P_0(t_0, \tau, n) = e^{-\lambda t_0} \sum_{i=0}^{n m_t} e^{-i \lambda \theta} C_{n+i-1}^i \sum_{j=0}^n C_n^j (-1)^j A_{i+j}(\tau - i\theta). \quad (9.28)$$

Функции $A_i(t)$ определяются по формулам (9.24) или (9.25). Среднее значение и дисперсия времени выполнения задания:

$$\begin{aligned} \bar{T}_1(t_0, n) &= n(\bar{T}_0 + \bar{T}_1)(e^{\lambda \theta} - 1), \quad \bar{T}_0 = 1/\lambda; \\ DT_1(t_0, n) &= \bar{T}_1^2(t_0, n)/n + n(e^{\lambda \theta} - 1)(\beta_2 + 2\bar{T}_0 \bar{T}_1 - 2\bar{T}_0 \theta) + \\ &\quad + 2\bar{T}_0^2(n e^{\lambda \theta} - n - n\lambda \theta) - 2n\theta \bar{T}_1 e^{\lambda \theta}. \end{aligned}$$

Чтобы учесть время δ на образование контрольных точек, надо положить $\theta = t_0/n + \delta$, а m_t в (9.28) заменить на $m_{t1} = \tau^*/t_0$, $\tau^* = \tau - n\delta$. Оптимальная длительность этапа, при которой среднее время выполнения задания минимально, определяется по формуле

$$\theta_{01} = \sqrt{2[1 - \exp(-\lambda \delta)]}/\lambda.$$

Оптимальное число этапов

$$n_{01} = t_0/\theta_0 = \lambda t_0 / \sqrt{2[1 - \exp(-\lambda \delta)]}.$$

Среднее время выполнения задания при оптимальном числе этапов

$$\bar{T}_1(t_0, n_{01}) = \lambda t_0 (\bar{T}_0 + \bar{T}_1) [\exp(\lambda \theta_{01} + \lambda \delta) - 1] / \lambda \theta_{01}.$$

Оптимальная длительность этапа и оптимальное число этапов, обеспечивающие максимальную вероятность выполнения задания, находятся по формулам:

$$\theta_{02} = \delta (\sqrt{m_t + 1} + 1)/m_t; \quad n_{02} = t_0 (\sqrt{m_t + 1} - 1)/\delta, \quad m_t = \tau/t_0.$$

Пример 9.8. В системе, рассмотренной в примере 9.7, задание разбивается на 100 этапов, время образования контрольной точки $\delta = 1$ с. Найти резервное время и оптимальные длительности этапов, обеспечивающие максимум вероятности и минимум среднего времени выполнения задания.

Решение. При 100 этапах $\theta = 120/100 = 1,2$ мин. При $\tau_* = \theta \lambda \tau_* = 0,002$ и вероятности $P_0 = \exp(-0,2) [1 + 100 \cdot 0,002 + C_{100}^2 0,002^2/2 + \dots + C_{100}^3 0,002^3/6] = 0,991$. Это значение больше требуемого, равного 0,95. Поэтому необходимый резерв времени $\tau_* < \theta$, и для его расчета нужно использовать формулу (9.28) при $i=0$. Расчет дает, что требуемая вероятность $P_0 = 0,95$ достигается при $\tau_* = 0,0155$ ч = 56 с. Тогда $\tau = 56 + 101 = 157$ с, т. е. добавляя, к минимальному времени $t_0 = 2$ ч резерв времени $\tau = 2,62$ мин (кратность резервирования $m_t = 2,18$ %), можно увеличить P_0 от 0,82 до 0,95. Оптимальная длительность этапа $\theta_{02} = 92$ с. Оптимальное число этапов $n_{02} = 7200/92 = 78$. Отсюда $\tau_* = \tau - n_{02}\delta = 79$ с. Вероятность выполнения задания $P_0(t_0, n_{02}) = \exp(-0,2) [1 + 78 \cdot 0,00217 + C_{78}^2 0,00217^2/2 + C_{78}^3 0,00217^3/6] = 0,963$. Среднее время выполнения задания при 100 этапах $\bar{T}_1(t_0) = 100 \cdot 10 [\exp(0,00203) - 1] = 2,03$ ч. Дисперсия $DT_1(t_0) = 2,03^2/100 - (\exp(0,002) - 1) 20 \cdot 0,02 + 200 \cdot 100 [\exp(0,002) - 1 - 0,002] = 4 \cdot 10^{-8}$ ч², $\sigma = 2 \cdot 10^{-4}$ ч, $r = 10^{-4}$. Оптимальное число этапов $n_{01} = 7200/\sqrt{2 \cdot 10 \cdot 3600} = 27$, среднее время выполнения задания $\bar{T}_1(n_{01}, t_0) = 2 [\exp(\sqrt{2\gamma} + \gamma) - 1]/\sqrt{2\gamma} = 2,015$ ч, $\gamma = \lambda \delta$.

9.3.4. Последовательная система (подкласс 01000). Система состоит из N элементов с функциями распределения наработки $R_i(t)$ и времени восстановления $G_i(t)$. Расчетная формула для вероятности выполнения задания t_0 при непополняемом резерве τ находится путем обращения преобразования Лапласа (9.23):

$$P_0(t_0, \tau) = [1 - F_0(t_0)] \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(t_0, \tau), \quad 1 - F_0(t_0) = \sum_{i=1}^N [1 - R_i(t_0)].$$

Функция $\Phi_n(t_0, \tau)$ — n -кратная свертка по переменной τ функции $\Phi(t_0, \tau)$, получаемой обращением выражения

$$\varphi(t_0, \omega) = \sum_{i=1}^N f_i(\omega) \int_0^{t_0} e^{-\omega x} dP_{oi}(x); \quad P_{oi}(t) = \int_0^t [1 - F_0(x) \lambda_i(x)] dx.$$

В случае сбоев

$$\Phi(t_0, \tau) = F_0(\min(t_0, \tau)).$$

При $m_t \leq 1$ $\Phi(t_0, \tau) = F_0(\tau)$, и тогда

$$P_0(t_0, \tau) = [1 - F_0(t_0)] [1 + H(\tau)],$$

где $H(\tau)$ — среднее число сбоев за время τ . При одинаковых $G_i(t)$ и $R_i(t) = 1 - \exp(-\lambda_i t)$ расчеты показателей надежности следует вести по формулам,

приведенным в п. 9.3.2 и 9.3.3, при $\lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i$.

9.4. ОДНОКАНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СО СЛУЧАЙНОЙ ЗАГРУЗКОЙ

9.4.1. Предварительные замечания. Особенность систем этого подкласса состоит в том, что они выполняют операции или задания по заявкам, поступающим в случайные моменты времени. Процесс функционирования может нарушаться отказами элементов, обнаруживаемыми системой контроля и устраняемыми путем ремонта или замены отказавших элементов запасными. Из-за случайной загрузки возникают периоды незанятости и появляется возможность устранить отказ до поступления заявки на выполнение задания.

Рассматриваемые системы могут отличаться по следующему признаку. В одних системах задержка в начале обслуживания недопустима, в других она может быть не более заданного или случайного значения τ_1 . Будем говорить, что в первом случае система не имеет, а во втором имеет пополняемый резерв времени.

9.4.2. Элемент с непополняемым резервом времени. Рассмотрим две модели. В модели 1 длительность задания настолько мала по сравнению с наработкой элемента до отказа, что ею можно пренебречь. Нарботка между отказами, время восстановления и интервал между моментами поступления заявок являются независимыми случайными величинами с произвольными распределениями $F(t)$, $G(t)$, $A(t)$. Тогда средняя наработка до отказа с учетом временной избыточности определяется по формуле

$$\bar{T}_0(z_*) = \frac{1}{q} \{ \bar{T}_0 + M[\min(\eta, z_*)] \}, \quad \bar{T}_0 = \int_0^{\infty} x dF(x), \quad (9.29)$$

где

$$q = \int_0^{\infty} [1 - G(t)] dA^*(t); \quad \Theta = M\{\min(\eta, z_*)\} = \int_0^{\infty} [1 - A^*(t)] [1 - G(t)] dt,$$

$$A^*(t) = \frac{1}{z} \int_0^t [1 - A(x)] dx, \quad z = \int_0^{\infty} [1 - A(x)] dx;$$

Значение параметров q и Θ для элемента 01001

$G(t)$	$A(t)$	q	Θ
$1 - e^{-\mu t}$	$1 - e^{-\gamma t}$	$\frac{\gamma}{(\gamma + \mu)}$	$\frac{1}{(\gamma + \mu)}$
$1 - (1 + \mu t) e^{-\mu t}$	$1 - e^{-\gamma t}$	$\frac{\gamma(\gamma + 2\mu)}{(\gamma + \mu)^2}$	$\frac{(2\mu + \gamma)}{(\gamma + \mu)^2}$
$1 - e^{-\mu t}$	$1 - (1 + \gamma t) e^{-\gamma t}$	$\frac{\gamma(2\gamma + \mu)}{2(\gamma + \mu)^2}$	$\frac{(2\mu + 3\gamma)}{2(\gamma + \mu)^2}$
$1 - \sum_{i=1}^n v_i e^{-\mu_i t}$	$1 - e^{-\gamma t}$	$\sum_{i=1}^n \frac{\gamma}{\gamma + \mu_i} v_i$	$\frac{\sum_{i=1}^n v_i}{(\gamma + \mu_i)}$
$1 - e^{-\mu t}$	$1 - \sum_{i=1}^n v_i e^{-\gamma_i t}$	$\frac{\sum_{i=1}^n \frac{v_i}{\gamma_i + \mu}}{\sum_{i=1}^n \frac{v_i}{\gamma_i}}$	$\frac{\sum_{i=1}^n \frac{v_i}{\gamma_i(\gamma_i + \mu)}}{\sum_{i=1}^n \frac{v_i}{\gamma_i}}$

z_* — резерв времени от момента отказа до поступления заявки. Значения q и Θ для некоторых законов распределения приведены в табл. 9.10. При быстром восстановлении ($\bar{\eta} \ll \bar{T}_0$, $\bar{\eta} \ll \bar{z}$) можно воспользоваться приближенными формулами:

$$\bar{T}_0(z_*) \approx \bar{T}_0/q, \quad P(t, z_*) \approx \exp(-qt/\bar{T}_0), \quad t \gg \bar{z}. \quad (9.30)$$

Пример 9.9. Система состоит из устройств первичной обработки информации и аппаратуры передачи данных и осуществляет обработку информации, поступающей в случайные моменты времени от ряда источников, и ее передачу потребителям в реальном масштабе времени. Задержка в обработке и передаче информации на время, сверх минимально необходимого, недопустима. Найти среднюю наработку системы до срыва функционирования и вероятность безотказного функционирования в течение $t = 8$ ч, если известно, что интенсивность отказов системы $\lambda = 0,04 \text{ ч}^{-1}$, среднее время восстановления $\bar{\eta} = 1/\mu = 0,2$ ч, интервалы между заявками распределены экспоненциально с параметром $\gamma = 20 \text{ ч}^{-1}$.

Решение. Систему представим в виде одного восстанавливаемого структурного элемента с функциями распределения $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$; $G(t) = 1 - \exp(-\mu t)$; $A(t) = 1 - \exp(-\gamma t)$. По формулам из табл. 9.10 и формулам (9.29) и (9.30) находим: $q = 20/(20+5) = 0,8$; $\Theta = 1/(20+5) = 0,04$ ч; $\bar{T}_0 = (25+0,04)/0,8 = 31,3$ ч; $P(t, z_*) \approx \exp(-0,04 \cdot 0,8 \cdot 8) = 0,775$.

Модель 2 отличается от модели 1 тем, что задание имеет длительность X , которая является случайной величиной с заданным распределением $B(t)$ и средним значением $\bar{t}_0$. При экспоненциальных распределениях $F(t) = 1 -$

Средняя наработка до отказа элемента 01001

Особые условия	Расчетная формула $\bar{T}_0(z)$
$\bar{\eta} \ll \frac{1}{\lambda}, \bar{\eta} \ll \bar{z}$	$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\gamma} [1 - \beta(\lambda)]$
$\bar{t}_0 \ll \frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\lambda} [1 - g(\gamma)]$
$\bar{\eta} \ll \bar{T}_0, \bar{\eta} \ll 1/\gamma$	$\bar{T}_0(\gamma + \beta) / \gamma [1 - f(\gamma + \beta)]$
$\bar{T}_0(\gamma + \beta) \gg 1$	$[1 - g(\gamma) + \gamma \bar{T}_0] / \gamma [1 - g(\gamma)]$
$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ $G(t) = 1 - e^{-\mu t}$ $B(t) = 1 - e^{-\beta t}$	Приближенные выражения: $\frac{1}{\lambda \gamma} + \frac{(\gamma + \beta)(\gamma + \mu)}{\lambda \gamma (\gamma + \beta + \lambda + \mu)}$ $\frac{1}{\gamma} (\lambda + \gamma + \beta) \text{ при } \bar{\eta} \ll \bar{T}_0, \bar{\eta} \ll \frac{1}{\gamma};$ $\frac{1}{\lambda \gamma} (\lambda + \gamma + \mu) \text{ при } \bar{t} \ll \frac{1}{\lambda}$

— $\exp(-\lambda t)$ и $A(t) = 1 - \exp(-\gamma t)$ расчетная формула для средней наработки до отказа

$$\bar{T}_0(z) = \frac{\lambda \left[1 + \frac{\lambda}{\gamma} (1 - g(\gamma)) \right] + \gamma [1 - \beta(\lambda)]}{\lambda [1 - g(\gamma)] + \gamma [1 - \beta(\lambda)]}, \quad (9.31)$$

где $g(\gamma) = \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} dG(t)$; $\beta(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dB(t)$.

При $A(t) = 1 - \exp(-\gamma t)$, $B(t) = 1 - \exp(-\beta t)$ и произвольных $F(t)$ и $G(t)$ расчетная формула

$$\bar{T}_0(z) = \frac{\bar{T}_0(\gamma + \beta) + \frac{1}{\gamma} [\beta + \gamma f(\gamma + \beta)] [1 - g(\gamma)]}{\gamma [1 - g(\gamma) f(\gamma + \beta)] + \beta [1 - g(\gamma)]}, \quad (9.32)$$

$$f(\gamma + \beta) = \int_0^{\infty} e^{-(\gamma + \beta)t} dF(t).$$

Частные случаи формул (9.31) и (9.32) приведены в табл. 9.11.

9.4.3. Элемент с пополняемым резервом времени (подкласс 02001). Наряду с резервом времени, обусловленным характером поступления заданий, используется пополняемый резерв τ_1 с функцией распределения $D(t)$. При $\bar{T}_0 \gg z$ (практически при $\bar{T}_0/\bar{z} > 15-20$) для вероятности безотказного функционирования

$P(t, z_* + \tau_1)$ и средней наработки $T_0(z_* + \tau_1)$ можно использовать формулы (9.29) и (9.30), в которых:

$$\Theta = M\{\min(\eta, z_* + \tau_1)\} = \int_0^\infty [1 - S(t)][1 - G(t)] dt; \quad (9.33)$$

$$q = \int_0^\infty [1 - G(t)] dS(t), \quad S(t) = \int_0^t A^*(t-x) dD(x).$$

Если τ_1 — случайная величина, равная t_1 , то

$$S(t) = A^*(t - t_1); \quad q = \int_0^\infty [1 - G(t + t_1)] dA^*(t);$$

$$\Theta = \int_0^{t_1} [1 - G(t)] dt + \int_{t_1}^\infty [1 - G(t)][1 - A^*(t - t_1)] dt. \quad (9.34)$$

Частные случаи формул (9.33) и (9.34) приведены в табл. 9.12 и 9.13.

Пример 9.10. Сохраняя условия примера 9.9, дополнительно будем считать, что допустимо запаздывание в начале выполнения задачи на величину $t_1 = 0,2$ ч. Необходимо найти $\bar{T}_0(z_* + t_1)$ и $P(t, z_* + t_1)$.

Решение. По формуле из табл. 9.13 $q = 20 \exp(-5 \cdot 0,2)/(20 + 5) = 0,294$. Далее по формуле (9.30) $P(t, z_* + t_1) = \exp(-0,04 \cdot 0,294 \cdot 8) = 0,91$. Средняя наработка до отказа $T_0(z_* + t_1) = \{25 + 0,2[1 - \exp(-5 \cdot 0,2)] + \exp(-5 \cdot 0,2)/(20 + 5)\}/0,294 = 85,5$ ч. По сравнению с $\bar{T}_0 = 25$ ч средняя наработка возросла в 3,4 раза.

9.4.4. Последовательная система с непополняемым резервом времени (подкласс 01001). Система состоит из n элементов, имеющих интенсивность отказов в незанятом состоянии λ_i' и в занятом λ_i , $i = 1, \dots, n$. Времена восстановления имеют распределения $G_{1i}(t)$. Интервалы времени между моментами окончания об-

Т а б л и ц а 9.12

Значения параметров q и Θ для элемента 02001 при $P(\tau_1 < t_1) = D(t)$

Закон распределения	b	Θ
$G(t) = 1 - e^{-\mu t}$ $D(t) = 1 - e^{-\delta t}$	$\frac{\gamma \delta}{(\mu + \delta)(\mu + \gamma)}$	$\frac{1}{\gamma - \delta} \left(\frac{\gamma}{\mu + \delta} - \frac{\delta}{\mu + \gamma} \right)$
$G(t) = 1 - (1 + \mu t) e^{-\mu t}$ $D(t) = 1 - e^{-\delta t}$	$\frac{\gamma \delta [3\mu^2 + \gamma \delta + 2\mu(\gamma + \delta)]}{(\mu + \delta)^2 (\mu + \gamma)^2}$	$\frac{1}{\gamma - \delta} \left[\frac{\gamma(2\mu + \delta)}{(\mu + \delta)^2} - \frac{\delta(2\mu + \gamma)}{(\mu + \gamma)^2} \right]$
$G(t) = 1 - e^{-\mu t}$ $D(t) = 1 - (1 + \delta t) e^{-\delta t}$	$\frac{\gamma \delta^2}{(\mu + \delta)^2 (\mu + \gamma)}$	$\frac{(\mu + \delta)^2 + \gamma(\mu + 2\delta)}{(\mu + \delta)^2 (\mu + \gamma)}$
$G(t) = 1 - \sum_{i=1}^n v_i e^{-\mu_i t}$ $D(t) = 1 - e^{-\delta t}$	$\gamma \delta \sum_{i=1}^n v_i / (\mu_i + \delta)(\mu_i + \gamma)$	$\frac{1}{\gamma - \delta} \sum_{i=1}^n v_i \left(\frac{\gamma}{\mu_i + \delta} - \frac{\delta}{\mu_i + \gamma} \right)$

Значения параметров q и Θ для элемента 02001 при $\tau_1 = t_1$

Закон распределения	q	Θ
$G(t) = 1 - e^{-\mu t}$, $A(t) = 1 - e^{-\gamma t}$	$\frac{\gamma}{\gamma + \mu} e^{-\mu t_1}$	$\frac{1}{\mu} (1 - e^{-\mu t_1}) + \frac{1}{\gamma + \mu} e^{-\mu t_1}$
$G(t) = 1 - e^{-\mu t}$, $A(t) = 1 - (1 + \gamma t) e^{-\gamma t}$	$\frac{\gamma (2\gamma + \mu)}{2(\gamma + \mu)^2} e^{-\mu t_1}$	$\frac{(2\mu + 3\gamma)}{2(\gamma + \mu)^2} e^{-\mu t_1} + \frac{1}{\mu} (1 - e^{-\mu t_1})$
$G(t) = 1 - (1 + \mu t) e^{-\mu t}$, $A(t) = 1 - e^{-\gamma t}$	$\frac{\gamma (\gamma + 2\mu) + \gamma \mu 2t_1 (\gamma + \mu)}{(\gamma + \mu)^2} e^{-\mu t_1}$	$\frac{\gamma + 2\mu + \mu t_1 (\gamma + \mu)}{(\gamma + \mu)^2} e^{-\mu t_1} + \frac{2}{\mu} \left[1 - \left(1 + \frac{\mu t_1}{2} \right) \exp(-\mu t_1) \right]$
$G(t) = 1 - e^{-\mu t}$, $A(t) = 1 - \sum_{i=1}^n v_i e^{-\gamma_i t}$	$\sum_{i=1}^n \frac{v_i}{\mu + \gamma_i} e^{-\mu t_1} \Bigg/ \sum_{i=1}^n \frac{v_i}{\gamma_i}$	$\frac{1}{\mu} (1 - e^{-\mu t_1}) + \sum_{i=1}^n \frac{v_i}{\gamma_i (\gamma_i + \mu)} \times$ $\times e^{-\mu t_1} \Bigg/ \sum_{i=1}^n \frac{v_i}{\gamma_i}$
$G(t) = 1 - \sum_{i=1}^n v_i e^{-\mu_i t}$, $A(t) = 1 - e^{-\gamma t}$	$\sum_{i=1}^n \frac{\gamma v_i}{\gamma + \mu_i} e^{-\mu_i t_1}$	$\sum_{i=1}^n \left[\frac{v_i}{\mu_i} (1 - e^{-\mu_i t_1}) + \frac{v_i}{\gamma + \mu_i} e^{-\mu_i t_1} \right]$

служивания и моментами поступления новой заявки распределены экспоненциально с параметром γ , длительность обслуживания заявки имеет распределение $B(t)$. Тогда средняя наработка до отказа определяется по формуле

$$\bar{T}_0(z) = \left\{ 1 + \frac{\gamma}{\lambda} [1 - \beta(\lambda)] + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda'_i}{\gamma} [1 - g_{1i}(\gamma)] \right\} \Bigg/ \left\{ \gamma [1 - \beta(\gamma)] + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n \lambda'_i [1 - g_{1i}(\gamma)] \right\}, \quad \lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (9.35)$$

При $n = 1$ и $\lambda'_i = \lambda_i$ из (9.35) получается формула (9.31). Если система не отказывает в незанятом состоянии, то

$$\bar{T}_0(z) = 1/\lambda + 1/\gamma [1 - \beta(\lambda)].$$

При $B(t) = 1 - \exp(-\beta t)$, в частности,

$$\bar{T}_0(z) = 1/\lambda + 1/\gamma + \beta/\lambda\gamma.$$

Если задание имеет постоянную длительность t_0 , то $\beta(\lambda) = \exp(-\lambda t_0)$, и тогда

$$\bar{T}_0(z) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\gamma} \Big/ (1 - e^{-\lambda t_0}).$$

При $t_0 \ll 1/\lambda$

$$\bar{T}_0(z) \approx \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{\gamma t_0} \right).$$

Чтобы найти коэффициент готовности, нужно дополнительно знать распределение времени восстановления элементов после отказа в занятом состоянии $G_{2i}(t)$. Тогда средняя доля времени пребывания системы в свободном состоянии (независимо от работоспособности) или работоспособном занятом состоянии

$$K = C \left\{ \frac{1}{\gamma} \beta(\lambda) + \frac{1}{\lambda} [1 - \beta(\lambda)] \right\} \Big/ \left\{ C \left(\frac{1}{\gamma} \beta(\lambda) + \frac{1}{\lambda} (1 + \rho) [1 - \beta(\lambda)] \right) + \right. \\ \left. + \beta(\lambda) \sum_{i=1}^n \rho'_i [1 - g_{1i}(\gamma)] \right\},$$

где $C = \gamma + \sum_{i=1}^n \lambda'_i [1 - g_{1i}(\gamma)]$; $\rho = \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{\eta}_{2i}$; $\rho'_i = \sum_{i=1}^n \lambda'_i \bar{\eta}_{2i}$; $\bar{\eta}_{2i} = \int_0^\infty x dG_{2i}(x)$.

Средняя доля времени пребывания системы в работоспособном состоянии (свободном или занятом) определяется по формуле

$$K^0 = \frac{\beta(\lambda) + C [1 - \beta(\lambda)]/\lambda}{\beta(\lambda) \sum_{i=1}^n \lambda'_i \bar{\eta}_{2i} [1 - g_{1i}(\gamma)] + C \{ \beta(\lambda)/\gamma + (1 + \rho) [1 - \beta(\lambda)]/\lambda \}}.$$

Выйгрыш в надежности по коэффициенту готовности от использования резерва времени

$$G_K = K/K^0 = 1 + (C - \gamma) \beta(\lambda) \Big/ \left\{ \gamma \beta(\lambda) + \frac{\gamma}{\lambda} C [1 - \beta(\lambda)] \right\}.$$

При $\lambda'_i = 0$ $K = K^0$ и $G_K = 1$. При $B(t) = 1 - \exp(-\beta t)$, $n = 1$ $K = [1 + \gamma \lambda \bar{\eta}_2 / (\beta + \gamma)]^{-1}$. Если загрузка системы $\alpha = \gamma / (\beta + \gamma) \rightarrow 1$, то $K \rightarrow (1 + \rho)^{-1}$. При $\lambda' = \lambda$, $n = 1$ $G_K = 2 - \alpha$.

9.4.5. Последовательная система с комбинированным резервом времени (подкласс 21001). Дополнительно к предыдущей модели полагаем, что имеется пополняемый резерв времени τ_{1i} с функцией распределения $D_i(t)$, который может расходоваться только с приходом заявки, если система неработоспособна, или после отказа занятой системы. Тогда средняя наработка до отказа

$$\bar{T}_0(z_* + \tau_1) = \left\{ 1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda'_i}{\gamma + \mu'_i} \left(1 + \frac{\gamma}{\mu_i} [1 - d_i(\mu_i)] \right) \right\} \times \\ \times \left\{ \beta(\lambda) + [1 - \beta(\lambda)] \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} d_i(\mu_i) \right\} + \frac{\gamma}{\lambda} [1 - \beta(\lambda)] \left\{ 1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i} [1 - d_i(\mu_i)] \right\} \times \\ \times \left\{ 1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda'_i}{\gamma + \mu'_i} [1 - d_i(\mu_i)] \right\} \Big/ \gamma \left\{ [1 - \beta(\lambda)] \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda'_i}{\gamma + \mu'_i} \right) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} d_i(\mu_i) + \right. \\ \left. + \beta(\lambda) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda'_i}{\gamma + \mu'_i} d_i(\mu_i) \right\}, \quad \mu_i = \bar{\eta}_{2i}^{-1}, \quad \mu'_i = \bar{\eta}_{1i}^{-1}, \quad d_i(\mu_i) = \int_0^\infty e^{-\mu_i x} dD_i(x).$$

При $n = 1$

$$\begin{aligned} \bar{T}_0(z_* + \tau_1) = & \left\{ (\gamma + \mu' + \lambda') \left[\beta(\lambda) + \frac{\gamma}{\lambda} [1 - \beta(\lambda)] \right] + \frac{\gamma}{\mu} [1 - d(\mu)] \times \right. \\ & \times [\lambda' + (\gamma + \mu') [1 - \beta(\lambda)]] - \gamma \frac{\lambda'}{\lambda} [1 - \beta(\lambda)] d(\mu) \left. \right\} / \{ \gamma d(\mu) \times \\ & \times [\lambda' + (\gamma + \mu') [1 - \beta(\lambda)]] \} \end{aligned} \quad (9.36)$$

При $\lambda' = \lambda$, $\mu' = \mu$, $B(t) = 1 - \exp(-\beta t)$ из (9.36) получаем

$$\begin{aligned} \bar{T}_0(z_* + \tau_1) = & \left\{ \frac{1}{\gamma} \left\{ 1 + \frac{\lambda}{\mu} \left[1 - \frac{\gamma}{\gamma + \mu} d(\mu) \right] \right\} + \right. \\ & + K \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} [1 - d(\mu)] \right] \left. \right\} / \left\{ 1 + \frac{\lambda}{\gamma + \mu} - \beta K \right\}, \quad (9.37) \\ K = & \left\{ 1 + \frac{\lambda}{\gamma + \mu} [1 - d(\mu)] \right\} / [\beta + \lambda d(\mu)]. \end{aligned}$$

Если резерв времени величина неслучайная и равная t_1 , то $d(\mu) = \exp \times (-\mu t_1)$, и тогда

$$\bar{T}_0(z_* + \tau_1) = \frac{1}{\gamma} \left\{ (K + 1) \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t_1}) \right] \gamma + \lambda + \mu \right\} / (\gamma + \lambda + \mu - \beta K), \quad (9.38)$$

$$K = \{ \gamma + \mu + \lambda [1 - \exp(-\mu t_1)] \} / [\beta + \lambda \exp(-\mu t_1)].$$

Если задание кратковременное, то $1/\beta \rightarrow 0$ и формулы (9.37), (9.38) переходят в формулы п. 9.4.3.

9.5. МНОГОКАНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

9.5.1. Предварительные замечания. Многоканальные системы (МС) состоят из нескольких параллельно работающих устройств (каналов), объединенных для выполнения общего задания. Если в m -канальной системе номинальная производительность каждого устройства равна C_1 , то номинальная производительность системы C_m в общем случае удовлетворяет неравенствам $C_1 \leq C_m \leq mC_1$. Если затраты ресурсов (аппаратуры и времени) на организацию параллельной работы всех каналов очень малы, то $C_m = mC_1$, в противном случае $C_m < mC_1$.

Многоканальные системы могут иметь жесткую или гибкую структуру. В первом случае для восстановления работоспособности любого канала необходимо прерывать работу всей системы, и поэтому в этих отрезках времени производительность системы равна нулю. Модель такой МС легко сводится к модели одноканальной системы, и показатели ее надежности рассчитываются по формулам предыдущих параграфов данной главы. Во втором случае восстановление работоспособности отказавших каналов можно производить без прекращения работы остальных каналов. При i отказавших каналах и $m - i$ работоспособных производительность системы $C_{m-i} = f(m - i) C_1$. Вид функции $f(m - i)$ определяется затратами ресурсов на комплексирование. В зависимости от организации взаимопомощи каналов и их взаимозаменяемости различают бригадное, групповое и раздельные (индивидуальные) задания. В первом случае каналы полностью взаимозаменяемы и любая часть задания может быть передана любому свободному устройству (каналу). Во втором случае все каналы разбиваются на группы и взаимопомощь обеспечивается только внутри группы. В третьем случае каждый канал получает собственную часть общего задания, которая не может быть передана другому каналу. В моделях надежности будем считать, что отказы каналов статистически независимы, в МС имеется полный непрерывный и достоверный контроль работоспособности, отказавший канал немедленно отключается и начинается восстановление его работоспособности, отказы каналов не обесценивают результатов проделанной работы.

9.5.2. Система с гибкой структурой и бригадным заданием. Рассматриваются две модели надежности. В модели 1 интенсивности отказов каналов постоянны, а времена восстановления имеют экспоненциальные распределения. Число ремонтных бригад r произвольное от 1 до m . Многоканальная система может находиться в одном из состояний e_i , $i = 0, \dots, m$, где i — число отказавших каналов. Переход из состояния e_i в e_{i+1} происходит с интенсивностью Λ_i , а в e_{i-1} — с интенсивностью M_i . Пусть также $C_m = mC$ и система выполняет задание, требующее при безотказной работе всех каналов времени t_0 . Избыточное время $\tau = t - t_0$. Отказ системы наступает в тот момент, когда суммарное время простоя всех каналов превышает значение mt .

Вероятности выполнения задания $P_i(t_0, \tau)$ при начальном состоянии e_i определяются из системы интегральных уравнений:

$$P_0(t_0, \tau) = e^{-\Lambda_0 t_0} + \int_0^{t_0} P_1(t_0 - x, \tau) \Lambda_0 e^{-\Lambda_0 x} dx;$$

$$P_i(t_0, \tau) = \int_0^{t(t_0, \tau)} \left[\Lambda_i P_{i+1} \left(t_0 - \frac{m-i}{m} x, \tau - \frac{i}{m} x \right) + M_i P_{i-1} \left(t_0 - \frac{m-i}{m} x, \tau - \frac{i}{m} x \right) \right] \times$$

$$\times e^{-(\Lambda_i + M_i)x} dx + \exp \left[-(\Lambda_i + M_i) \frac{mt_0}{m-i} \right] \delta \left(\tau - \frac{i}{m-i} t_0 \right), \quad i = 1, \dots, m-1; \quad (9.39)$$

$$P_m(t_0, \tau) = \int_0^{\tau} M_m \exp(-M_m x) P_{m-1}(t_0, \tau - x) dx;$$

$$f(t_0, \tau) = \begin{cases} m\tau/i, & (m-i)\tau \leq it_0, \\ mt_0/(m-i), & (m-i)\tau \geq it_0, \end{cases}$$

Здесь обозначено

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

Двойное преобразование Лапласа — Карсона

$$P_i^{**}(s, \omega) = s\omega \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} P_i(t_0, \tau) e^{-st_0 - \omega\tau} dt_0 d\tau$$

позволяет свести (9.39) к системе алгебраических уравнений:

$$P_0^{**}(s, \omega) - \frac{\Lambda_0}{\Lambda_0 + s} P_1^{**}(s, \omega) = \frac{s}{s + \Lambda_0}; \quad (9.40)$$

$$P_i^{**}(s, \omega) = \frac{m [\Lambda_i P_{n+1}^{**}(s, \omega) + M_i P_{i-1}^{**}(s, \omega)]}{s(m-i) + i\omega + m(\Lambda_i + M_i)} = \frac{s(m-i)}{s(m-i) + i\omega + m(\Lambda_i + M_i)},$$

$$i = 1, \dots, m-1;$$

$$P_m^{**}(s, \omega) - \frac{M_m}{\omega + M_m} P_{m-1}^{**}(s, \omega) = 0, \quad \Lambda_i = (m-i)\lambda.$$

Средняя наработка до отказа MS определяется из системы уравнений:

$$\begin{aligned}\bar{T}_0^*(\omega) - \bar{T}_1^*(\omega) &= 1/\Lambda_0; \quad \bar{T}_m^*(\omega) - \frac{M_m}{\omega + M_m} \bar{T}_{m-1}^*(\omega) = 0; \\ \bar{T}_i^*(\omega) - \frac{m}{i\omega + m(\Lambda_i + M_i)} (\Lambda_i \bar{T}_{i+1}^*(\omega) + M_i \bar{T}_{i-1}^*(\omega)) &= \\ &= \frac{m-i}{i\omega + m(\Lambda_i + M_i)}, \quad i = 1, \dots, m-1; \\ \bar{T}_i^*(\omega) &= \omega \int_0^\infty \bar{T}_i(\tau) e^{-\omega\tau} d\tau.\end{aligned}$$

Для невозстанавливаемой системы решение (9.40) и последующее обратное преобразование дают формулу, удобную для расчетов при малых значениях кратности резервирования $m_t = \tau/t_0$ и больших m :

$$\begin{aligned}P_0(t_0, \tau) &= \sum_{K=0}^{[(m\tau)/(\tau+t_0)]} m(-1)^K (m-K)^{-1} e^{-m\lambda t_0} \times \\ &\times \sum_{i=K}^{m-1} \binom{i}{K} \binom{m-1}{i} \frac{(m-K)^i}{i!} \left(\lambda\tau - \frac{K\lambda t_0}{m-K} \right)^i.\end{aligned}$$

При больших m_t удобнее пользоваться следующей формулой:

$$\begin{aligned}P_0(t_0, \tau) &= 1 - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{m!} (m\lambda t_0)^i e^{-m\lambda t_0} - \sum_{i=1}^{[m\tau/(\tau+t_0)]} \binom{m}{i} \frac{\{\lambda[(m-i)t_0 - i\tau]\}^{m-i}}{(m-i)!} \times \\ &\times L_{i-1}^{m-i} \{\lambda[m-i)t_0 - i\tau]\} e^{-m\lambda t_0},\end{aligned}$$

где $L_n^m(at) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i (at)^i \prod_{j=1}^{n-i} (m+i+j)$ — полиномы

Лагерра m -го порядка. Расчетные формулы при $m=2, 3$ и 4 приведены в табл. 9.14. Средняя наработка определяется по формуле

$$\begin{aligned}\bar{T}_0(\tau) &= \frac{1}{\lambda} \left[1 + \sum_{i=1}^m (-m)^{-i} \binom{m-1}{i} \sum_{j=1}^i \binom{j}{i} (-1)^{j-1} \frac{j^i}{m-j} \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp\{- (m-j) m\lambda\tau/j\} \right].\end{aligned}$$

Для восстанавливаемой системы средняя наработка до отказа при $m = 2$ и 3 и неограниченном восстановлении определяется по формулам:

$$\bar{T}_0(\tau, 2) = \frac{1}{2\lambda} + \frac{\mu}{\lambda} \tau + [1 - \exp(-2(\lambda + \mu)\tau)] / 2(\lambda + \mu)\tau; \quad (9.41)$$

$$\begin{aligned}\bar{T}_0(\tau, 3) &= \frac{1}{3\lambda} + \frac{\mu}{\lambda} \tau + \frac{2\Lambda_1}{\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2} [1 - \cos(\Lambda_3\tau) e^{-\Lambda_2\tau}] + \\ &+ \frac{2}{\Lambda_3} \left(1 - \frac{\Lambda_1\Lambda_2}{\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2} \right) \sin(\Lambda_3\tau) e^{-\Lambda_2\tau};\end{aligned}$$

$$\Lambda_1 = \frac{3}{4\lambda} (2\lambda + \mu)^2, \quad \Lambda_2 = \frac{3}{4} (5\lambda + 3\mu), \quad \Lambda_3 = \frac{3}{4} \sqrt{(\mu - \lambda)(9\lambda + 7\mu)}, \quad \mu > \lambda.$$

При больших m и τ можно пользоваться асимптотической формулой

$$\bar{T}_0(\tau) \approx \frac{1}{m\lambda} + \frac{\mu}{\lambda} \tau.$$

Вероятность выполнения задания невосстанавливаемой системой с бригадным заданием

m	$P_0(t_0, \tau, m)$
2	$[1 + 2\lambda \min(t_0, \tau)] e^{-2\lambda t_0}$
3	$(1 + 2\gamma_1 + \gamma_1^2/2) e^{-\rho_1}, \tau \leq t_0/2, \gamma_1 = 3\lambda\tau, \rho_1 = 3\lambda t_0,$ $[1 + \rho_1 + \gamma_1^2/2 - (2\gamma_1 - \rho_1)^2/3!] e^{-\rho_1}, t_0/2 \leq \tau \leq 2t_0,$ $(1 + \rho_1 + \rho_1^2/2) e^{-\rho_1}, \tau \geq 2t_0$
4	$(1 + 3\gamma_1 + 3\gamma_1^2/2 + \gamma_1^3/6) e^{-\rho_1}, \tau \leq t_0/3, \gamma_1 = 4\lambda\tau, \rho_1 = 4\lambda t_0,$ $[1 + \rho_1 - \rho_1^2/4 + 3\rho_1 \gamma_1/2 - 3\gamma_1^2/4 + \gamma_1^3/6 - (3\gamma_1 - \rho_1)^3/96] e^{-\rho_1}, \frac{t_0}{3} \leq \tau \leq t_0,$ $\left(1 + \rho_1 + \frac{1}{2} \rho_1^2 + \frac{1}{96} \gamma_1^3 - \frac{3}{32} \rho_1 \gamma_1^2 + \frac{9}{32} \rho_1^2 \gamma_1 - \frac{11}{96} \rho_1^3\right) e^{-\rho_1}, t_0 \leq \tau \leq 3t_0$ $(1 + \rho_1 + \rho_1^2/2 + \rho_1^3/3!) e^{-\rho_1}, \tau \geq 3t_0$

В модели 2 предполагается кроме независимости отказов еще и независимость восстановления различных каналов. Введем функцию $Q_i^{(1)}(mt_0, t, m) = 1 - P_i(t_0, t - t_0, m)$. Тогда вероятность срыва функционирования можно вычислять с помощью рекуррентного соотношения

$$Q_0^{(1)}(mt_0, t, m) = Q_0^{(1)}(mt_0 - (m-1)t, t) + [1 - F(t)] Q_0^{(1)}(mt_0 - t, t, m-1) + \int_a^b Q_0^{(1)}(mt_0 - x, t, m-1) dx Q_0^{(1)}(x, t), \quad (9.42)$$

где $a = \max[0, mt_0 - (m-1)t]$; $b = \min(mt_0, t)$; $Q_0^{(1)}(t_0, t) = 1 - P_0(t_0, t - t_0)$, $P_0(t_0, \tau)$ — вероятность выполнения задания t_0 одним каналом при наличии резерва времени τ , определяемая по формулам § 9.3 и 9.4; $F(t)$ — функция распределения наработки канала до отказа. Расчет с помощью формулы (9.42) проводится с использованием численных процедур.

9.5.3. Система с гибкой структурой, бригадным заданием и общим структурным резервом. Система состоит из m основных элементов, образующих пучок параллельных каналов, и n резервных элементов. Резервные элементы не закрепляются за каналами, а могут заменить при отказе любой из них. Система может находиться в одном из состояний e_i , $i = 0, \dots, m+n$. Причем в $e_0 - e_n$ она имеет максимальную производительность $C_m = mC$, а в e_{n+i} ($i > 0$) производительность $C_{m-i} = (m-i)C$. Обозначим через $F_0(t)$ и $F_n(t)$ — функции распределения времени до первого выхода в состояние e_{n+1} при условии, что начальным было состояние e_0 или e_n соответственно. Тогда вероятности $P_i(t_0, \tau, m)$ можно найти из системы интегральных уравнений:

$$P_0(t_0, \tau) = 1 - F_0(t_0) + \int_0^{t_0} P_{n+1}(t_0 - x, \tau) dF_0(x);$$

$$P_n(t_0, \tau) = 1 - F_n(t_0) + \int_0^{t_0} P_{n+1}(t_0 - x, \tau) dF_n(x);$$

$$\begin{aligned}
P_{n+i}(t_0, \tau) = & \int_0^{t(t_0, \tau)} \left[\Lambda_{n+i} P_{n+i+1} \left(t_0 - \frac{m-i}{m} x, \tau - \frac{i}{m} x \right) + \right. \\
& + M_{n+i} P_{n+i-1} \left(t_0 - \frac{m-i}{m} x, \tau - \frac{i}{m} x \right) \Big] \exp [-(\Lambda_{n+i} + M_{n+i}) x] dx + \\
& + \exp \left[-(\Lambda_{n+i} + M_{n+i}) \frac{m t_0}{m-i} \right] \delta \left(\tau - \frac{i}{m-i} t_0 \right), \quad i = 1, \dots, m-1; \\
P_{m+n}(t_0, \tau) = & \int_0^\tau M_{m+n} e^{-M_{m+n} x} P_{m+n-1}(t_0, \tau - x) dx. \quad (9.43)
\end{aligned}$$

После двумерного операционного преобразования:

$$\begin{aligned}
P_0^{**}(s, \omega) - f_0(s) P_{n+1}^{**}(s, \omega) &= 1 - f_0(s); \\
P_n^{**}(s, \omega) - f_n(s) P_{n+1}^{**}(s, \omega) &= 1 - f_n(s); \\
P_{n+i}^{**}(s, \omega) - \frac{m[\Lambda_{n+i} P_{n+i+1}^{**}(s, \omega) + M_{n+i} P_{n+i-1}^{**}(s, \omega)]}{s(m-i) + i\omega + m(\Lambda_{n+i} + M_{n+i})} = \\
= \frac{s(m-i)}{s(m-i) + i\omega + m(\Lambda_{n+i} + M_{n+i})}, \quad i = 1, \dots, m-1; \\
P_{m+n}^{**}(s, \omega) - \frac{M_{m+n}}{\omega + M_{m+n}} P_{m+n-1}^{**}(s, \omega) &= 0.
\end{aligned}$$

В общем случае вероятности определяются непосредственным интегрированием в (9.43) или путем численного обращения двумерного преобразования Лапласа. Для невозстанавливаемой системы:

при ненагруженном резерве

$$\begin{aligned}
P_0(t_0, \tau) = & \sum_{i=0}^{m+n-1} \frac{1}{i!} (m\lambda t_0)^i e^{-m\lambda t_0} - e^{-m\lambda t_0} \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m-1}{i} (-m)^{-i+1} \times \\
& \times \sum_{j=1}^i \frac{(-1)^{j-1} j^i}{(m-j)(i+n)!} \binom{i}{j} \left(m\lambda t_0 - \frac{m-j}{j} m\lambda \tau \right)^{n+i} \delta \left(t_0 - \frac{m-j}{j} \tau \right);
\end{aligned}$$

при нагруженном резерве и $n = 1$

$$\begin{aligned}
P_0(t_0, \tau) = & (m+1) e^{-m\lambda t_0} - m e^{-(m+1)\lambda t_0} + (m+1) e^{-m\lambda t_0} \times \\
& \times \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m-1}{i} \left\{ \frac{(m\lambda \tau)^i}{i!} - \sum_{j=1}^i \frac{m}{m-j} e^{-\lambda t_0} j^i (-1)^{j-1} \binom{i}{j} \times \right. \\
& \times \left[\exp \left(\frac{m-j}{j} \lambda \tau \right) - 1 - \exp \left(\frac{m-j}{j} \lambda \tau \right) I \left(i+1, \frac{m-j}{j} \tau - \lambda t_0 \right) \delta \left(\tau - \frac{j t_0}{m-j} \right) \right] \Big\}, \\
I(K, a) = & 1 - \sum_{i=0}^{K-1} \frac{a^i}{i!} e^{-a}.
\end{aligned}$$

Средняя наработка до отказа:

$$\bar{T}_0(\tau, n) = \bar{T}_0(0, n) + \frac{m-1}{m\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{m-1} (-m)^{m-i} \binom{m-1}{i} \times \\ \times \sum_{j=1}^i \binom{i}{j} \frac{j^i (-1)^{j-1}}{m-j} \exp\left(-\frac{m-j}{j} m\lambda\tau\right);$$

$$\bar{T}_0(0, n) = \begin{cases} (n+1)/m\lambda & \text{при ненагруженном резерве (ННР),} \\ \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^n \frac{1}{m+i} & \text{при нагруженном резерве (НР).} \end{cases}$$

Расчетные формулы при конкретных m и n приведены в табл. 9.15—9.17.

Пример 9.11. Невосстанавливаемая вычислительная система состоит из четырех идентичных устройств, два из которых образуют двухканальную систему,

Т а б л и ц а 9.15

Вероятность выполнения задания невосстанавливаемой многоканальной системой с общим резервированием канала

m	n	Режим резерва	$P_0(t_0, \tau, m, n)$
2	1	НР	$(3-2e^{-\rho})e^{-2\rho} + 6e^{-2\rho}(e^{-\rho} + \rho - 1), t_0 \leq \tau, \rho = \lambda t_0,$ $(3-2e^{-\rho})e^{-2\rho} + 6e^{-2\rho}(\gamma + e^{-\rho} - e^{-\rho+\gamma}), t_0 \geq \tau, \gamma = \lambda\tau$
		ННР	$(1+2\rho+2\rho^2)e^{-2\rho}, t_0 \leq \tau, \rho = \lambda t_0, \gamma = \lambda\tau$ $(1+2\rho+4\rho\gamma-2\gamma^2)e^{-2\rho}, t_0 \geq \tau$
3	1	НР	$(28-27e^{-\rho}-24\rho+18\rho^2)e^{-3\rho}, t_0 \leq \tau/2, \rho = \lambda t_0, \gamma = \lambda\tau,$ $[24\rho-24\gamma+18\gamma^2-20-27e^{-\rho}+48e^{-\rho+\gamma/2}-24(\gamma-\rho/2)^2]e^{-3\rho},$ $\tau/2 \leq t_0 \leq 2\tau$ $(24\gamma+18\gamma^2+4-27e^{-\rho}-24e^{-\rho+2\gamma}+48e^{-\rho+\gamma/2})e^{-3\rho}, t_0 \geq 2\tau$
		ННР	$\left(1+3\rho+\frac{(3\rho)^2}{2!}+\frac{(3\rho)^3}{3!}\right)e^{-3\rho}, t_0 \leq \tau/2, \rho = \lambda t_0, \gamma = \lambda\tau,$ $\left[1+3\rho+\frac{(3\rho)^2}{2!}+\frac{(3\rho)^3}{3!}+\frac{3}{4}(2\rho-\gamma)^3\right]e^{-3\rho}, \tau/2 \leq t_0 \leq 2\tau,$ $\left[1+3\rho+9\gamma\left(2\rho-2\gamma+\frac{3}{2}\rho\gamma-\frac{5}{4}\gamma^2\right)\right]e^{-3\rho}, t_0 \geq 2\tau$
2	2	НР	$(16e^{-\rho}-3e^{-2\rho}-12+12\rho)e^{-2\rho}, t_0 \leq \tau, \rho = \lambda t_0, \gamma = \lambda\tau,$ $[6-8e^{-\rho}+3e^{-2\rho}+12\gamma-24(e^\gamma-1)e^{-\rho}+6e^{-2\rho}(e^{2\gamma}-1)]e^{-2\rho}, t_0 \geq \tau$
		ННР	$[1+2\rho+(2\rho)^2/2!+(2\rho)^3/3!]e^{-2\rho}, t_0 \leq \tau,$ $\left[1+2\rho+(2\rho)^2/2!+4\gamma\left(\rho^2-\rho\gamma+\frac{1}{3}\gamma^2\right)\right]e^{-2\rho}, t_0 \geq \tau$

Средняя наработка до отказа невосстанавливаемой многоканальной системой
с общим резервированием канала

m	n	Режим резерва	$\bar{T}_0(\tau, m, n)$
2	1	НР ННР	$4/3\lambda - \exp(-2\gamma)/2\lambda, \gamma = \lambda\tau$ $3/2\lambda - \exp(-2\gamma)/2\lambda$
3	1	НР ННР	$5/4\lambda - 4 \exp(-3\gamma/2)/9\lambda - 2 \exp(-6\gamma)/9\lambda$ $4/3\lambda - 4 \exp(-3\gamma/2)9\lambda - 3 \exp(-6\gamma)/9\lambda$
2	2	НР ННР	$19/12\lambda - \exp(-2\gamma)/2\lambda$ $2/\lambda - \exp(-2\gamma)/2\lambda$

а два находятся в нагруженном резерве. Система предназначена для выполнения двух сеансов расчета длительностью $t = 12$ ч с интервалом $t_1 = 18$ ч. Минимальное время, требуемое одному каналу для выполнения расчетов, равно 12 ч. Интенсивность отказов одного устройства в рабочем режиме равна $\lambda_1 = 0,02 \text{ ч}^{-1}$, в нерабочем режиме $\lambda_2 = 0,001 \text{ ч}^{-1}$. Необходимо найти вероятность выполнения задания.

Р е ш е н и е. Согласно исходным данным $t_0 = \tau = 6$ ч. Второй сеанс расчета будет выполнен, если к его началу окажется работоспособным 4 — i устройств ($i = 0, 1, 2, 3$) и они проработают во втором сеансе не менее 12 ч. При этом первый сеанс также будет выполнен. Поэтому расчетная формула имеет вид

$$P_0(t_0, \tau, 2, 2) = \sum_{i=0}^3 p_i P_i(t_0, \tau), \quad p_i = \binom{4}{i} e^{-(4-i)(\lambda_1 t + \lambda_2 \tau)} (1 - e^{-\lambda_1 t - \lambda_2 \tau}).$$

Вероятности $P_i(t_0, \tau)$ рассчитываются по формулам табл. 9.15 ($i = 0: m = n = 2$; $i = 1: m = 2, n = 1$) и табл. 9.14 ($i = 2: m = 2$), а $P_3(t_0, \tau) = \exp(-\lambda_1 t)$. Результаты расчетов приведены в табл. 9.18.

Т а б л и ц а 9.17

Среднее время выполнения задания невосстанавливаемой многоканальной системой
с общим резервированием каналов

m	n	Режим резерва	$\bar{T}_1(t_0, m, n)$
2	1	НР ННР	$t_0 \left[1 + 6e^{-2\rho} \left(\frac{1}{\rho} - 1 + \frac{\rho}{2} - \frac{1}{\rho} e^{-\rho} \right) \right], \rho = \lambda t_0$ $t_0 \left[1 + \frac{2}{3} \rho^2 e^{-2\rho} \right]$
3	1	НР ННР	$t_0 \{ 1 + e^{-3\rho} [15\rho^3 + 84(e^{-\rho} + \rho - 1 - \rho^2/2)] \}$ $t_0 [1 + e^{-3\rho} (3\rho^2/4 + 11\rho^3/128)]$
2	2	НР ННР	$t_0 \left\{ 1 + 6e^{-2\rho} \left[\rho + \frac{4}{\rho} (1 - \rho - e^{-\rho}) - \frac{1}{2\rho} (1 - 2\rho - e^{-2\rho}) \right] \right\}$ $t_0 (1 + \rho^3 e^{-2\rho/3})$

i	0	1	2	3	$P_0(t_0, \tau, 2, 2)$
P_i	0,99898	0,99709	0,97538	0,7866	0,9834
ρ_i	0,3563	0,4196	0,1851	0,03638	

9.5.4. Система с гибкой структурой, бригадным заданием и раздельным резервированием каналов. Система состоит из m каналов, и каждый канал имеет $n - 1$ идентичных ему устройств в резерве. Резерв, приданный одному из каналов, нельзя использовать для резервирования других каналов. Рассматривая резервированный канал как одноканальную восстанавливаемую систему и используя асимптотическую экспоненциальность распределения наработки такой системы с параметром $\Lambda = 1/\bar{T}_0(n)$, при экспоненциальном распределении времени восстановления расчет вероятности выполнения задания и других показателей можно вести по формулам п. 9.5.2. В частности, при марковских моделях функционирования с помощью (9.41) получаем:

$$\bar{T}_0(\tau, 2, n) = \frac{1}{2} \bar{T}_0(n) + \mu \tau \bar{T}_0(n) + (1 - \exp \{-2[1 + \mu \bar{T}_0(n)] \tau / \bar{T}_0(n)\}) \times \\ \times \bar{T}_0(n) / 2 [1 + \mu \bar{T}_0(n)],$$

$$\bar{T}_0(n) = \sum_{i=1}^n \sum_{s=0}^i \kappa_s / \lambda_i \kappa_i, \quad \kappa_s = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{s-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_s},$$

где λ_i и μ_i — интенсивности переходов в графе состояний. При нагруженном резерве и одной ремонтной бригаде $\lambda_i = (n - i) \lambda$, $\mu_i = \mu$.

Для невозстанавливаемой системы при ненагруженном резерве вероятность выполнения задания определяется по формуле:

$$P_0(t_0, \tau, m, n) = \\ = \begin{cases} \sum_{i=0}^{mn-1} \frac{1}{i!} (m \lambda t_0)^i e^{-m \lambda t_0}, & t_0 \leq \tau / (m-1), \\ \sum_{i=0}^{mn-1} \frac{(m \lambda t_0)^i}{i!} e^{-m \lambda t_0} - m \sum_{i=0}^{n-1} \frac{[\lambda(t_0 + \tau)]^i}{i!} \times \\ \times \sum_{j=n(m-1)}^{mn-1-i} \frac{[(m-1) \lambda t_0 - \lambda \tau]^j}{j!} e^{-m \lambda t_0}, & \frac{\tau}{m-1} \leq t_0 \leq \frac{2\tau}{m-2}. \end{cases}$$

При нагруженном дублировании каналов:

$$P_0(t_0, \tau, m, 2) = (-2)^m \sum_{i=0}^{m-1} \binom{2m-2-i}{m-1} \{2^{-i-1} [1 - I(i+1, 2\rho_1)] + \\ + (-1)^{i-1} [1 - I(i+1, \rho_1)]\} = P^0, \quad t_0 \leq \frac{\tau}{m-1}; \\ P_0(t_0, \tau, m, 2) = P^0 - \Delta P, \quad \frac{\tau}{m-1} \leq t_0 \leq \frac{2\tau}{m-2},$$

Вероятность выполнения задания

Показатель	Режим резерва	Расчетная формула
$P_0(t_0, \tau)$	HNP	$\left(1 + 2\rho + \frac{(2\rho)^2}{2!} + \frac{(2\rho)^3}{3!}\right) e^{-2\rho}, t_0 \leq \tau, \rho = \lambda t_0, \gamma = \lambda \tau,$ $\left[1 + 2\rho + \frac{(2\rho)^2}{2!} + \frac{(2\rho)^3}{3!} - (1 + 2\gamma)(\rho - \gamma)^2 - \frac{4}{3}(\rho - \gamma)^3\right] e^{-2\rho}, t_0 \geq \tau$
	HP	$4(2\rho - 1)e^{-2\rho} + (5 + 4\rho)e^{-4\rho}, t_0 \leq \tau, \rho = \lambda t_0, \gamma = \lambda \tau,$ $4(1 + 2\gamma)e^{-2\rho} + (1 + 4\gamma)e^{-4\rho} + 4(1 - 2e^{2\gamma})e^{-3\rho - \gamma}, t_0 \geq \tau$
$\bar{T}_0(\tau)$	HNP	$2/\lambda - (3 + 2\gamma) \exp(-2\gamma)/4\lambda$
	HP	$3/2\lambda - 2 \exp(-2\gamma)/3\lambda + \exp(-4\gamma)/12\lambda$
$\bar{T}_1(t_0)$	HNP	$t_0 [1 + \rho^2(2 + 5\rho) \exp(-2\rho)/6]$
	HP	$t_0 \left\{ 1 + 2e^{-2\rho} \left[2\rho - 4 + (2 + \rho)e^{-2\rho} + \frac{1}{\rho}(4 - 6e^{-\rho} + 2e^{-2\rho}) \right] \right\}$
$\bar{T}(t)$	HNP	$[2 - (2 + \lambda t) \exp(-\lambda t)]/\lambda$
	HP	$3/2\lambda - 2 \exp(-\lambda t)/\lambda + \exp(-2\lambda t)/2\lambda$

$$\Delta P = m(-2)^m \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} \binom{2m-3-i}{m-2} \frac{(\rho_1 - \alpha)^i}{i!} \left[(-1)^{i+1} + \frac{1}{2} e^{-\rho_1} \right] e^{-\rho_1} + \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^{m-2} \binom{2m-3-i}{m-1} \frac{(\rho_1 - \alpha)^i}{i!} \left[e^{-2\rho_1 + \alpha} + \frac{1}{2} (-1)^{m+1+i} e^{-\rho_1 - \alpha} \right] \right\}, \\ \rho_1 = m\lambda t_0, \quad \alpha = \lambda t_0 + \lambda \tau.$$

Расчетные формулы при $m = n = 2$ приведены в табл. 9.19.

9.5.5. Система с гибкой структурой, отдельными и групповыми заданиями.

Рассматривается система, состоящая из $N = \sum_{i=1}^K (m_i + n_i)$ идентичных устройств, разбитых на K групп. Каждая группа представляет собой m_i -канальную систему, имеющую n_i устройств в резерве. Общее задание, требующее суммарной наработки всех каналов t'_0 , распределяется между группами пропорционально производительности $t'_0 i = t'_0 m_i / m$, $m = \sum_{i=1}^K m_i$. Задание считается выполненным, если все группы выполняют свои части задания. Если все группы работают с максимальной возможной производительностью $C(m_i) = m_i C$, то время выполнения задания

минимально и равно $t_0' = t_0/m$. Если рассмотреть оперативное время $t > t_0$, то возникает резерв времени $\tau = t - t_0$, причем он одинаков у всех групп. В том случае, если каждая группа имеет собственные ремонтные бригады и, следовательно, их работоспособность восстанавливается независимо, вероятность выполнения задания определяется по формуле

$$P_0(t_0, \tau, m, n, K) = \prod_{i=1}^K P_0(t_{0i}'/m_i, \tau, m_i, n_i). \quad (9.44)$$

Функции $P_0(t_0, \tau, m, n)$ задаются формулами п. 9.5.3. Если $m_i = 1$, $K = m$, то задания у каждого канала отдельные. Тогда вероятности $P_0(t_0, \tau)$ находятся по формулам для одноканальных систем.

Пример 9.12. Требуется рассчитать вероятность выполнения двух сеансов расчета системой, рассмотренной в примере 9.11, при следующих вариантах организации ее работы:

- 1) четырехканальная система состоит из двух автономных двухканальных систем, каждая из которых выполняет половину общего задания;
- 2) из четырех устройств составляется двухканальная система с бригадным заданием и отдельным нагруженным резервированием каналов;
- 3) четыре устройства образуют четырехканальную систему с бригадным заданием;
- 4) два устройства образуют двухканальную систему, а два находятся в общем нагруженном резерве.

В отличие от системы из примера 9.11 здесь устройства переводятся в нерабочий режим сразу же после окончания расчетов, а не в конце 12-часового сеанса, причем интенсивность отказов в нерабочем режиме $\lambda_2 = 0$.

Решение. Для варианта 1 согласно (9.44)

$$P_0(t_{01}, t_{02}, \tau, 2, 2) = \left[e^{-\alpha/2} P_0(t_{02}, \tau, 2) + \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha/2} P_0(t_{02}, \tau, 1) \right]^2, \quad \alpha = \lambda t,$$

где $\alpha = \lambda t$; $\lambda = 0,02 \text{ ч}^{-1}$; $t = 12 \text{ ч}$; $P_0(t_{02}, \tau, 1) = e^{-\alpha/2}$, а $P_0(t_{02}, \tau, 2)$ — определяется по формуле из табл. 9.14. Для варианта 2

$$P_0(t_{01}, t_{02}, \tau, 2, 2) = \sum_{i=1,3,4} p_i(t_{01}, \tau) P_i(t_{02}, \tau) + p_2(t_{01}, \tau) P_0(t_{02}, \tau, 2) + \tilde{p}_2(t_{01}, \tau) \tilde{P}_0(t_{02}, \tau, 2), \quad \tau = t - t_0, \quad (9.45)$$

где p_i — вероятность того, что в момент окончания первого сеанса расчетов работоспособно i устройств; $\tilde{p}_2$ и p_2 — вероятности того, что два отказавших устройства принадлежат одному или различным каналам. В (9.45):

$$p_2(t_{01}, \tau) = 4e^{-\alpha}(1 - e^{-\alpha/2})^2; \quad p_i(t_0, \tau) = \binom{4}{i} e^{-i\alpha/2} (1 - e^{-\alpha/2})^{4-i}, \quad i = 3, 4;$$

$$p_1(t_{01}, \tau) = 4\alpha(1 + e^{-\alpha}) - 2(1 - e^{-\alpha}),$$

$$p_2(t_{01}, \tau) = 4e^{-\alpha} \left(e^{-\alpha/2} - e^{-\alpha} - \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha} \right).$$

Вероятности выполнения второго сеанса $P_1(t_{02}, \tau) = \exp(-\alpha/2)$, $P_2(t_{02}, \tau)$ и $P_4(t_{02}, \tau)$ находятся по формулам табл. 9.14 и 9.19, $P_2(t_{02}, \tau) = 1 - (1 - e^{-\alpha})^2$. Остается найти $P_3(t_{02}, \tau)$. При трех работоспособных устройствах для выполнения второго сеанса расчетов необходимо, чтобы нерезервированный канал проработал в течение времени t , либо в случае его отказа в момент $x < t$ хотя бы одно из двух работоспособных устройств резервированного канала проработало безотказно в течение $t - x$. Поэтому

$$P_3(t_{02}, \tau) = e^{-\alpha} + \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} [1 - (1 - e^{-\alpha + \lambda x})^2] dx = e^{-\alpha} (2\alpha + e^{-\alpha}).$$

Для вариантов 3 и 4

$$P_0(t_{01}, t_{02}, \tau, 2, 2) = \sum_{i=1}^4 p_i(t_{01}, \tau) P_i(t_{02}, \tau).$$

В варианте 3

$$p_i(t_{01}, \tau) = \alpha^{4-i} e^{-\alpha/(4-i)}; \quad i = 1, \dots, 4.$$

Вероятности $P_i(t_{02}, \tau)$ определяются по формулам табл. 9.14 при $i = m$, $P_1(t_{02}, \tau) = \exp(-\alpha)$. В варианте 4 при $i = 2, 3, 4$ p_i определяются по формуле (9.46), а

$$p_1(t_{01}, \tau) = \exp(-\alpha) [6\alpha - 18 + 24 \exp(-\alpha/2) - 6 \exp(-\alpha)].$$

Результаты расчетов приведены в табл. 9.20.

Т а б л и ц а 9.20

Вероятность выполнения задания невосстанавливаемой
вычислительной системой с раздельным резервированием каналов

Вари- ант	p_1	p_2	p_3	p_4	P_1	P_2	P_3	P_4	P_0
1	0,09633	0,8869	—	—	0,8869	0,9832	—	—	0,9514
2	0,00624	0,04025	0,3156	0,6188	0,7866	0,9754	0,9864	0,9996	0,9927
3	0,00179	0,02265	0,1888	0,7866	0,7866	0,9754	0,9980	0,9998	0,9984
4	0,00472	0,06037	0,3156	0,6188	0,7866	0,9754	0,9971	0,9997	0,9958

$$\tilde{p}_2 = 0,01859, \quad \tilde{P}_2 = 0,9545$$

Наибольшую вероятность имеет четырехканальная система с бригадным заданием, наименьшую — четырехканальная система с групповыми заданиями.

Г л а в а 10

СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕНАДЕЖНЫМ ПРИБОРОМ

10.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

10.1.1. Введение. При анализе многих сложных систем на стадиях проектирования, внедрения и эксплуатации исследуются системы массового обслуживания (СМО). В настоящее время изучено большое число СМО при различных предположениях о поступлении требований, структуре системы и порядке обслуживания. Для конкретных систем важным моментом является учет возможного выхода из строя прибора.

В этом разделе справочника приводятся результаты, позволяющие определять основные характеристики СМО в установившемся (стационарном) режиме. Рассмотрены различные СМО в случае одного обслуживающего устройства (прибора) с учетом его надежности, дающие представление о возможностях исследования моделей теории массового обслуживания. При этом интервалы между последовательными поступлениями требований в систему предполагаются независимыми экспоненциально распределенными случайными величинами.

10.1.2. Определения и обозначения основных характеристик. Приведем обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем:

α — время поступления — интервал между последовательными поступлениями требований в систему;

β — длительность обслуживания отдельного требования надежно работающим прибором;

γ — интервал времени, в течение которого прибор обслуживает отдельное требование без ремонта (переналадки);

δ — длительность восстановления работоспособности прибора при выходе его из строя во время обслуживания;

ϵ — интервал времени, в течение которого прибор сохраняет работоспособное состояние (без восстановления) при ожидании поступления требований в свободную систему;

φ — длительность восстановления работоспособности прибора после ее потери при ожидании требований;

k — длительность настройки прибора на обслуживание первого требования после того, как система была свободна от требований (так называемое время «разогрева»);

L_{in} — количество требований, поступающих в систему одновременно (размер «группы» на входе);

L_{out} — количество дополнительных требований, возникающих после обслуживания отдельного требования;

Все случайные величины предполагаются однородными и независимыми в совокупности;

FIFO — обозначение дисциплины обслуживания требований в порядке поступления;

LIFO — обозначение дисциплины с инверсионным порядком обслуживания (первым обслуживается требование, последним поступившее в систему) ¹.

Требование, обслуживание которого было прервано из-за «поломки» прибора, либо теряется, либо дообслуживается, либо обслуживается заново после восстановления работоспособности прибора;

h — интервал времени с момента начала обслуживания требования до ближайшего момента, когда требование покинуло систему и прибор оказался в рабочем состоянии (время блокировки прибора требованием);

L — число требований в системе;

ω — время ожидания начала обслуживания требованием, поступившим в систему;

v — время пребывания требования в системе (во всех рассмотренных здесь СМО $v = \omega + h$);

π — период занятости системы (интервал времени с момента поступления требования в свободную систему до освобождения системы вновь);

ρ — загрузка системы.

Предполагается конечность первых моментов всех случайных величин, определяющих СМО. Существование стационарных распределений характеристик СМО обусловлено неравенством $\rho < 1$.

Сводка обозначений дается в табл. 10.1.

10.1.3. Время блокировки прибора требованием. Эта характеристика будет использоваться во всех рассмотренных СМО. Она берет на себя учет надежности и восстановления работоспособности работавшего прибора. Укажем соотношения, определяющие преобразование Лапласа — Стильтеса $h(s) = M \exp(-sh)$ и первые моменты h_k случайной величины h при различных предположениях относительно требования, обслуживание которого было прервано из-за «поломки» прибора.

¹ FIFO (LIFO) — принятые в теории массового обслуживания обозначения, полученные в результате сокращения английских названий дисциплин обслуживания «first (last) in — first out».

Используемые обозначения характеристик СМО

Характеристика	Обозначение				
	Случайная величина	Функция распределения	Преобразование Лапласа — Стильтеса, или производящая функция	Математическое ожидание	Момент порядка «k»
Время поступления	α	$A(t)$	$\alpha(s)$	$M\alpha = a^{-1}$	α_k
Время обслуживания	β	$B(t)$	$\beta(s)$	$M\beta = b^{-1}$	β_k
Наработка работающего прибора	γ	$C(t)$	$\gamma(s)$	$M\gamma = c^{-1}$	γ_k
Время ремонта работающего прибора	δ	$D(t)$	$\delta(s)$	$M\delta = d^{-1}$	δ_k
Наработка при простое	ε	$E(t)$	$\varepsilon(s)$	$M\varepsilon$	ε_k
Время ремонта после простоя	φ	$F(t)$	$\varphi(s)$	$M\varphi$	φ_k
Время «разогрева»	$k(\chi)$	$K(t)$	$h(s) (\chi(s))$	$Mh(M\chi)$	$k_k (\chi_k)$
Размер «группы» на входе	L_{in}		$\Phi(z)$	ML_{in}	$M(L_{in})^k$
Размер дополнительной «группы»	L_{out}		$F(z)$	ML_{out}	$M(L_{out})^k$
Время блокировки	h		$h(s)$	Mh	h_k
Состояние системы	L		$P(z)$	ML	$M(L)^k$
Время ожидания	ω		$\omega(s)$	$M\omega$	ω_k
Время пребывания	v		$v(s)$	Mv	v_k
Период занятости системы	π		$\pi(s)$	$M\pi$	π_k

При потере прерванного требования преобразование Лапласа — Стильтеса функции распределения времени блокировки прибора требованием $h(s)$ математическое ожидание Mh и дисперсия Dh определяются следующими соотношениями.

В общем случае:

$$h(s) = \int_0^{\infty} \exp(-su) [1 - C(u)] dB(u) + \delta(s) \int_0^{\infty} \exp(-su) [1 - B(u)] dC(u);$$

$$Mh = -h'(0); Dh = h''(0) - (Mh)^2;$$

если $C(t) = 1 - \exp(-ct)$, $c > 0$, $t \geq 0$, то:

$$h(s) = \frac{c\delta(s)}{s+c} + \beta(s+c) \left(1 - \frac{c\delta(s)}{s+c}\right); Mh = (c^{-1} + M\delta) [1 - \beta(c)];$$

$$Dh = (c^{-2} + D\delta) [1 - \beta(c)] + (c^{-1} + M\delta) [\beta(c) Mh + 2\beta'(c)];$$

если $B(t) = 1 - \exp(-bt)$, $b > 0$, $t \geq 0$, то:

$$h(s) = \frac{b}{s+b} + \gamma(s+b) \left[\delta(s) - \frac{b}{s+b}\right]; Mh = b^{-1} + \gamma(b) (M\delta - b^{-1});$$

$$Dh = \gamma(b) D\delta + [1 - \gamma(b)] b^{-2} + \gamma(b) [1 - \gamma(b)] (M\delta - b^{-1})^2 - 2\gamma'(b) (M\delta - b^{-1}).$$

При дообслуживании прерванного требования в общем случае

$$h(s) = \int_0^{\infty} \exp(-st) P(\delta(s), t) dB(t);$$

$$s \int_0^{\infty} \exp(-st) P(z, t) dt = \frac{1 - \gamma(s)}{1 - z\gamma(s)};$$

если $C(t) = 1 - \exp(-ct)$, $c > 0$, $t \geq 0$, то:

$$h(s) = \beta(s + c - c\delta(s)); Mh = M\beta(1 + cM\delta);$$

$$Dh = D\beta(1 + cM\delta)^2 + cM\beta[D\delta + (M)^2\delta];$$

если $B(t) = 1 - \exp(-bt)$, $b > 0$, $t \geq 0$, то:

$$h(s) = \frac{b}{s+b} \frac{1 - \gamma(s+b)}{1 - \delta(s)\gamma(s+b)}; Mh = b^{-1} + \frac{\gamma(b)M\delta}{1 - \gamma(b)};$$

$$Dh = D\beta + \frac{\gamma(b)D\delta}{1 - \gamma(b)} + \frac{\gamma(b)M\delta - 2\gamma'(b)}{[1 - \gamma(b)]^2} M\delta.$$

При обслуживании заново прерванного требования без учета длительности предшествовавшего обслуживания преобразование Лапласа — Стильтьеса, математическое ожидание и дисперсия определяются соотношениями:

В общем случае

$$h(s) = \int_0^{\infty} \exp(-su) [1 - C(u)] dB(u) \left[1 - \delta(s) \int_0^{\infty} \exp(-sv) [1 - B(v)] dC(v) \right]^{-1};$$

если $C(t) = 1 - \exp(-ct)$, $c > 0$, $t \geq 0$, то:

$$h(s) = \left[\frac{c\delta(s)}{s+c} + \left(1 - \frac{c\delta(s)}{s+c} \right) \frac{1}{\beta(s+c)} \right]^{-1};$$

$$Mh = (c^{-1} + M\delta) \left(\frac{1}{\beta(c)} - 1 \right);$$

$$Dh = (c^{-2} + D\delta) \left(\frac{1}{\beta(c)} - 1 \right) + (Mh)^2 + (c^{-1} + M\delta) \left(Mh + \frac{2\beta'(c)}{[\beta(c)]^2} \right);$$

если $B(t) = 1 - \exp(-bt)$, $b > 0$, $t \geq 0$, то создается ситуация, эквивалентная дообслуживанию прерванного требования:

$$h(s) = \frac{b}{s+b} \frac{1 - \gamma(s+b)}{1 - \delta(s)\gamma(s+b)}; Mh = b^{-1} + \frac{\gamma(b)M\delta}{1 - \gamma(b)};$$

$$Dh = D\beta + \frac{\gamma(b)D\delta}{1 - \gamma(b)} + \frac{\gamma(b)M\delta - 2\gamma'(b)}{[1 - \gamma(b)]^2} M\delta.$$

10.2. СТАНДАРТНАЯ ОДНОЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА С ОЖИДАНИЕМ

10.2.1. Описание системы. Входящий поток требований пуассоновский: $A(t) = 1 - \exp(-at)$, $a > 0$, $t \geq 0$. Прибор ненадежен как в свободном, так и в рабочем состоянии. Допускается неограниченная очередь. Выражение для загрузки системы имеет вид

$$\rho = aMh.$$

10.2.2. Число требований в системе. Производящая функция стационарного распределения L имеет вид

$$P(z) = P(0) \frac{1 - R(z)}{h(a - az) - z} h(a - az),$$

где $P(0) = \frac{(1-\rho) [1 - \varepsilon(a) \varphi(a)]}{1 - \varepsilon(a) + \varepsilon(a) a M \varphi}$, а функция

$$R(z) = R_0(z) = \frac{1 - \varepsilon(a)}{1 - \varepsilon(a) \varphi(a)} z + \frac{\varepsilon(a)}{1 - \varepsilon(a) \varphi(a)} [\varphi(a - az) - \varphi(a)]$$

представляет собой производящую функцию распределения случайной величины R — числа требований, поступивших в систему к началу обслуживания прибором требования после того, как система была свободной; при этом

$$MR = R'(1) = \frac{1 - \varepsilon(a) + \varepsilon(a) a M \varphi}{1 - \varepsilon(a) \varphi(a)};$$

$$DR = \frac{\varepsilon(a) a^2}{1 - \varepsilon(a) \varphi(a)} [D\varphi + (M\varphi)^2] + MR(1 - MR).$$

Тогда $P(0) = (1 - \rho)/(MR)$.

Для математического ожидания и дисперсии L справедливо соотношение

$$ML = \rho + \frac{a^2 h_2}{2(1-\rho)} + \frac{R''(1)}{2R'(1)},$$

или

$$ML = \rho + \frac{a^2 [Dh + (Mh)^2]}{2(1-\rho)} + \frac{\varepsilon(a) a^2 [D\varphi + (M\varphi)^2]}{2[1 - \varepsilon(a) + \varepsilon(a) a M \varphi]};$$

$$DL = a^2 Dh + ML + \frac{a^3 h_3}{3(1-\rho)} + \left\{ \frac{a^2 [Dh + (Mh)^2]}{2(1-\rho)} \right\}^2 + \frac{\varepsilon(a) a^3 \varphi_3}{3[1 - \varepsilon(a) + \varepsilon(a) a M \varphi]} - \left\{ \frac{\varepsilon(a) a^2 [D\varphi + (M\varphi)^2]}{2[1 - \varepsilon(a) + \varepsilon(a) a M \varphi]} \right\}^2. \quad h_3 = -h'''(0).$$

10.2.3. Характеристики для дисциплины обслуживания FIFO. Преобразование Лапласа-Стилтьеса стационарной функции распределения времени пребывания требования в системе $v(s)$ определяется следующим соотношением:

$$P(z) = v(a - az).$$

В связи с тем, что $v(s) = \omega(s) h(s)$, для преобразования Лапласа — Стилтьеса времени ожидания требованием начала обслуживания справедливо выражение

$$\omega(s) = \frac{1-\rho}{1 - \varepsilon(a) + \varepsilon(a) a M \varphi} \frac{[1 - \varepsilon(a)] s + \varepsilon(a) a [1 - \varphi(s)]}{s - a + ah(s)}.$$

Между математическими ожиданиями и дисперсиями случайных величин L , v и ω справедливы связи:

$$Mv = M\omega + Mh; \quad Dv = D\omega + Dh;$$

формула Литтла $ML = aMv$ и $DL = a^2 Dv + ML$.

Непосредственно для $M\omega$ и $D\omega$ имеем:

$$M\omega = \frac{a [Dh + (Mh)^2]}{2(1-\rho)} + \frac{\varepsilon(a) a [D\varphi + (M\varphi)^2]}{2[1 - \varepsilon(a) + \varepsilon(a) a M \varphi]};$$

$$D\omega = \frac{a}{1-\rho} \left[\frac{h_3}{3} + \frac{Dh + (Mh)^2}{2} M\omega \right] + \frac{\varepsilon(a) a}{1 - \varepsilon(a) + \varepsilon(a) a M \varphi} \left[\frac{\varphi_3}{3} - \frac{D\varphi + (M\varphi)^2}{2} M\omega \right].$$

10.2.4. Характеристики для дисциплин обслуживания LIFO. Для преобразования Лапласа — Стильтеса стационарной функции распределения времени ожидания начала обслуживания справедливо представление

$$\omega^L(s) = \frac{(1-\rho)[1-\varepsilon(a)]}{1-\varepsilon(a)+\varepsilon(a)aM\varphi} + \frac{a[1-\mu(s)]}{[s+a-a\mu(s)]} + \frac{(1-\rho)a\varepsilon(a)}{1-\varepsilon(a)+\varepsilon(a)aM\varphi} \frac{1-\varphi[s+a-a\mu(s)]}{s+a-a\mu(s)},$$

где функция $\mu(s)$ однозначно определяется уравнением

$$\mu(s) = h[s+a-a\mu(s)], \quad \operatorname{Re} s > 0, \quad |\mu(s)| < 1, \quad \mu(0) = 1. \quad (10.1)$$

Математические ожидания времен ожидания начала обслуживания при дисциплинах FIFO и LIFO совпадают:

$$M\omega = M\omega^L.$$

Дисперсия времени ожидания начала обслуживания при дисциплине LIFO имеет вид

$$D\omega^L = \frac{ah_3}{3(1-\rho)^2} + \frac{1+\rho}{1-\rho} (M\omega)^2 + \frac{a\varepsilon(a)}{1-\varepsilon(a)+\varepsilon(a)aM\varphi} \frac{\varphi_3}{3(1-\rho)} - \frac{a\varepsilon(a)[D\varphi+(M\varphi)^2]}{1-\varepsilon(a)+\varepsilon(a)aM\varphi} \frac{M\omega}{1-\rho}.$$

Отметим, что дисперсии времен ожидания при дисциплинах FIFO и LIFO связаны соотношением

$$D\omega^L(1-\rho) = D\omega + \rho(M\omega)^2.$$

Преобразование Лапласа — Стильтеса времени пребывания требования в системе, так же как и для дисциплины FIFO, имеет представление

$$v^L(s) = \omega^L(s)h(s)$$

со всеми вытекающими отсюда последствиями:

$$Mv^L = Mv = M\omega + Mh; \quad Dv^L = D\omega + Dh.$$

10.2.5. Период занятости системы. Преобразование Лапласа — Стильтеса периода занятости системы требованиями имеет вид

$$\pi(s) = \frac{1-\varepsilon(a)}{1-\varepsilon(a)\varphi(a)} \mu(s) + \frac{a\varepsilon(a)}{1-\varepsilon(a)\varphi(a)} \frac{\varphi(s+a-a\mu(s))-\varphi(a)}{a\mu(s)-s} \mu(s),$$

где $\mu(s)$ — функция, однозначно определяемая из (10.1).

Для математического ожидания и дисперсии периода занятости системы требованиями справедливы выражения:

$$M\pi = \frac{1}{a(1-\rho)} \left[\rho - \frac{\varepsilon(a)}{1-\varepsilon(a)\varphi(a)} (1-\varphi(a)-aM\varphi) \right].$$

$$D\pi = \frac{1}{a^2(1-\rho)} \left\{ \frac{a^2 Dh + \rho^2}{P(0)} + \frac{\varepsilon(a)}{1-\varepsilon(a)\varphi(a)} [a^2 D\varphi + (aM\varphi)^2 + 2(1-\varphi(a)-aM\varphi)] \right\}.$$

10.3. СИСТЕМА С ПОСТУПЛЕНИЕМ ТРЕБОВАНИЙ ГРУППАМИ

10.3.1. Описание системы. Отличие от стандартной СМО из § 10.2 состоит в том, что входящий поток требований квазипуассоновский, т. е. через случайные интервалы времени, определяемые функцией распределения их длительности $A(t) = 1 - \exp(-at)$, $a > 0$, $t \geq 0$, в систему поступает группа требований случайной длины $L_{\text{гн}}$. Производящая функция распределения $L_{\text{гн}}$ задана

$$Mz^{L_{\text{гн}}} = \Phi(z), \quad \Phi(1) = 1.$$

Выражение для загрузки системы имеет вид

$$\rho = aMhML_{\text{гн}}.$$

10.3.2. Число требований в системе. Производящая функция стационарного распределения L имеет вид

$$P(z) = P(0) \frac{1 - R(z)}{h(a - a\Phi(z)) - z} h(a - a\Phi(z)),$$

где $R(z) = R_0(\Phi(z)) = \frac{1 - \varepsilon(a)}{1 - \varepsilon(a)\varphi(a)} \Phi(z) + \frac{\varepsilon(a)}{1 - \varepsilon(a)\varphi(a)} [\varphi(a - a\Phi(z)) - \varphi(a)]$;

$$P(0) = \frac{1 - \rho}{R'(1)} = \frac{1 - \rho}{ML_{1n}} \frac{1 - \varepsilon(a)\varphi(a)}{1 - \varepsilon(a) + \varepsilon(a)aM\varphi}.$$

Для математического ожидания и дисперсии L справедливо соотношение

$$ML = \rho + \frac{h_2 a^2 (ML_{1n})^2 + Mh a \Phi''(1)}{2(1 - \rho)} + \frac{R''(1)}{2R'(1)},$$

$$\text{или } ML = \rho + \frac{a^2 [Dh + (Mh)^2]}{2(1 - \rho)} (ML_{1n})^2 + \frac{DL_{1n} - ML_{1n} + (ML_{1n})^2}{2(1 - \rho) ML_{1n}} +$$

$$+ \frac{\varepsilon(a) a^2 [D\varphi + (M\varphi)^2] ML_{1n}}{2[1 - \varepsilon(a) + \varepsilon(a)aM\varphi]},$$

$$DL = a^2 Dh (ML_{1n})^2 + ML + \frac{a^3 h_3 (ML_{1n})^3 + aMh \Phi'''(1)}{3(1 - \rho)} + \frac{a^2 Dh \Phi''(1) ML_{1n} + aMh \Phi''(1)}{1 - \rho} +$$

$$+ \frac{R''(1)}{3R'(1)} - \left(\frac{R''(1)}{2R'(1)} \right)^2 + \left[\frac{a^2 [Dh + (Mh)^2] (ML_{1n})^2 + aMh \Phi''(1)}{2(1 - \rho)} \right]^2.$$

10.3.3. Характеристики для дисциплины обслуживания FIFO. Преобразование Лапласа—Стилтьеса стационарной функции распределения времени пребывания требования в системе $v(s)$ определяется соотношениями:

$$P(z) = v(a - a\Phi(z))T(\Phi(z));$$

$$T(\Phi(z)) = \frac{t(1) - t(z)}{1 - z}, \quad |z| < 1, \quad T(1) = 1, \quad zt'(z) = \Phi(z).$$

В связи с тем, что $v(s) = \omega(s)h(s)$, если обозначить через $\Phi^{-1}(y)$ функцию, обратную функции $\Phi(z)$, то для преобразования Лапласа—Стилтьеса функции распределения времени ожидания начала обслуживания в стационарном режиме справедливо выражение

$$\omega(s) = \frac{1 - \rho}{R'(1)} \frac{1 - R_0\left(1 - \frac{s}{a}\right)}{\left[h(s) - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{s}{a}\right)\right] T\left(1 - \frac{s}{a}\right)},$$

или

$$\omega(s) = \frac{(1 - \rho) \{[1 - \varepsilon(a)]s + a\varepsilon(a)[1 - \varphi(s)]\}}{ML_{1n}(s - s\varepsilon(a) + s\varepsilon(a)aM\varphi) \left[h(s) - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{s}{a}\right)\right] T\left(1 - \frac{s}{a}\right)}.$$

Между математическими ожиданиями и дисперсиями случайных величин v , ω , h , L и L_{1n} существуют зависимости:

$$Mv = M\omega + Mh; \quad Dv = D\omega + Dh;$$

$$ML = aMvML_{1n} + [\Phi'(1) - 1/2];$$

$$DL = a^2 Dv (ML_{1n})^2 + \frac{DL_{1n}}{3} + \frac{(ML_{1n})^2 - 1}{12} + (aMv \cdot ML_{1n})^2 + aMv \cdot \Phi''(1).$$

Непосредственно для $M\omega$ и $D\omega$ получаем:

$$aM\omega ML_{in} = ML - aMh ML_{in} + \frac{1 - ML_{in}}{2},$$

$$\text{или } M\omega = \frac{ML}{aML_{in}} - Mh + \frac{1}{2aML_{in}} - \frac{1}{2a};$$

$$a^2 D\omega (ML_{in})^2 = DL - a^2 Dh (ML_{in})^2 - \frac{DL_{in}}{3} + \frac{1 - (ML_{in})^2}{12} - (aMv \cdot ML_{in})^2 - aMv\Phi''(1).$$

$$\text{или } D\omega = \frac{DL}{a^2 (ML_{in})^2} - Dh - \frac{DL_{in}}{3a^2 (ML_{in})^2} + \frac{1}{12a^2 (ML_{in})^2} - \frac{1}{12a^2} - (Mv)^2 - \frac{Mv\Phi''(1)}{a (ML_{in})^2}.$$

10.3.4. Характеристики для дисциплины обслуживания LIFO. Для преобразования Лапласа—Стилтьеса стационарной функции распределения времени ожидания начала обслуживания справедливо представление

$$\begin{aligned} \omega^L(s) = & \frac{(1-\rho)[1-\varepsilon(a)]}{1-\varepsilon(a)+\varepsilon(a)aM\varphi} + aML_{in} \frac{1-h(s+a-a\mu(s))}{s+a-a\mu(s)} T_0(\mu(s)) + \\ & + \frac{(1-\rho)\varepsilon(a)a}{1-\varepsilon(a)+\varepsilon(a)aM\varphi} \frac{1-\varphi(s+a-a\mu(s))}{s+a-a\mu(s)} T_0(\mu(s)) \end{aligned}$$

и установлены выражения:

$$\mu(s) = \Phi(h(s+a-a\mu(s))); \quad \operatorname{Re} s > 0; \quad |\mu(s)| \leq 1; \quad \mu(0) = 1$$

и

$$T_0(z) = \frac{t(1)-t(z)}{1-z}, \quad |z| < 1, \quad T_0(1) = 1; \quad zT'(z) = \Phi(z);$$

$$M\omega^L = -[\omega^L(s)]'|_{s=0}; \quad D\omega^L = [\omega^L(s)]''|_{s=0} - (M\omega^L)^2.$$

Так же как и для дисциплины обслуживания FIFO, преобразование Лапласа—Стилтьеса времени пребывания требования в системе связано простой зависимостью с распределением времени ожидания начала обслуживания:

$$v^L(s) = \omega^L(s)h(s)$$

со всеми вытекающими отсюда последствиями:

$$Mv^L = M\omega^L + Mh; \quad Dv^L = D\omega^L + Dh.$$

Заметим, что здесь предполагается, что прерывание обслуживания требования при выходе из строя прибора не дает права обслужиться до него тем требованиям, которые поступили в систему перед прерыванием.

10.3.5. Период занятости системы. По форме записи преобразование Лапласа—Стилтьеса периода занятости СМО совпадает с соответствующим выражением в п. 10.2.5:

$$\pi(s) = \frac{1-\varepsilon(a)}{1-\varepsilon(a)\varphi(a)} \mu(s) + \frac{\varepsilon(a)a}{1-\varepsilon(a)\varphi(a)} \frac{\varphi(s+a-a\mu(s))-\varphi(a)}{a\mu(s)-s} \mu(s),$$

где функция $\mu(s)$ определяется уравнением

$$\mu(s) = \Phi(h(s+a-a\mu(s))); \quad \operatorname{Re} s > 0; \quad |\mu(s)| \leq 1, \quad \mu(0) = 1.$$

Математическое ожидание и дисперсия периода занятости системы требованиями имеют вид:

$$aM\pi = \frac{1-\varepsilon(a)+\varepsilon(a)aM\varphi}{(1-\rho)[1-\varepsilon(a)\varphi(a)]}-1;$$

$$D\pi = \frac{DhML_{in}}{(1-\rho)^3} + \frac{DL_{in}(Mh)^2}{(1-\rho)^3} + \frac{\rho^3}{a^2(1-\rho)^3} + \frac{\varepsilon(a)[1-\varphi(a)]}{1-\varepsilon(a)\varphi(a)} \times$$

$$\times \left[\left(\frac{DhML_{in}+DL_{in}(Mh)^2}{(1-\rho)^3} + \frac{\rho^3}{a^2(1-\rho)^3} \right) \left(\frac{aM\varphi}{1-\varphi(a)} - 1 \right) + \frac{D\varphi}{(1-\rho)^2(1-\varphi(a))} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a^2(1-\rho)^2} - \frac{\varphi(a)(M\varphi)^2}{(1-\rho)^2(1-\varphi(a))^2} + \frac{1-\varepsilon(a)}{1-\varepsilon(a)\varphi(a)} \frac{1}{(1-\rho)^2} \left(\frac{aM\varphi}{1-\varphi(a)} - 1 \right)^2 \right].$$

10.4. СИСТЕМА С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

10.4.1. Описание системы. Отличие от стандартной СМО (см. § 10.2) состоит в том, что после окончания обслуживания каждого требования возникает случайное число L_{out} дополнительных требований. Производящая функция распределения L_{out} задана

$$Mz^{L_{out}} = F(z).$$

Здесь предполагается, что дополнительные требования всегда обслуживаются сразу после требования их породившего; кроме того, нет никаких отличий между основными и дополнительными требованиями.

Выражение для загрузки системы имеет вид

$$\rho = aMh / (1 - ML_{out}).$$

10.4.2. Число требований в системе. Стационарное распределение числа требований, находящихся в системе в произвольно взятый момент времени установившегося режима ($L = (L_0, L_1)$, где L_0 — число требований основного потока и L_1 — дополнительных требований), будем задавать производящей функцией

$$P(z_0, z_1) = M(z_0^{L_0} z_1^{L_1}).$$

Имеет место следующее представление:

$$P(z_0, z_2) = P(0) \frac{1}{1-\varepsilon(a)\varphi(a)} \left[1 - \varepsilon(a) + \varepsilon(a) \frac{1-\varphi(a-az_0)}{1-z_0} \right] +$$

$$+ \left\{ \frac{P(z_0) - P(0)}{z_0(1-z_0)} + P(0) \frac{\varepsilon(a)[\varphi(a-az_0) - \varphi(a)]}{z_0^2[1-\varepsilon(a)\varphi(a)](1-z_0)} \right\} [h(a-az_0)g(a-az_0, z_1) +$$

$$+ z_0(1-h(a-az_0))],$$

где

$$P(z) = P(0) \frac{1-R(z)}{g(a-az)-z};$$

$$R(z) = R_0(z) = \frac{1-\varepsilon(a)}{1-\varepsilon(a)\varphi(a)} z + \frac{\varepsilon(a)}{1-\varepsilon(a)\varphi(a)} [\varphi(a-az) - \varphi(a)];$$

$$P(0) = \frac{1-\rho}{R'(1)} = \frac{(1-\rho)[1-\varepsilon(a)\varphi(a)]}{1-\varepsilon(a)+\varepsilon(a)aM\varphi};$$

$$g(s, z) = z \left[\frac{1}{h(s)} - 1 \right] \left[\frac{z[g(s)-z]}{h(s)[g(s)F(z)-F(0)h(s)[g(s)-z]-z^2-1} \right],$$

а функция $g(s)$ удовлетворяет уравнению

$$g(s) = h(s)F(g(s)), \quad \operatorname{Re} s > 0, \quad |g(s)| \leq 1, \quad g(0) = 1. \quad (10.2)$$

10.4.3. Дисциплина FIFO: время ожидания начала обслуживания и время пребывания требования в системе. Для требований основного потока преобразование Лапласа—Стилтьеса времени ожидания начала обслуживания определяется из соотношения

$$P(z) = \omega(a - az)g(a - az),$$

т. е.

$$\omega(s) = \frac{1-\rho}{1-\varepsilon(a) + \varepsilon(a) a M\varphi} \frac{[1-\varepsilon(a)]s + \varepsilon(a) a [1-\varphi(s)]}{s - a + ag(s)},$$

где, как и ранее, $g(s)$ определяется уравнением (10.2).

Математическое ожидание и дисперсия времени ожидания начала обслуживания требованием основного потока имеют вид:

$$M\omega = \frac{aDh}{2(1-\rho)(1-ML_{out})} + \frac{[M(h)]^2}{2(1-\rho)} \left[\frac{DL_{out}}{(1-ML_{out})^3} + \frac{1}{(1-ML_{out})^2} \right] + \\ + \frac{\varepsilon(a) a [D\varphi + (M\varphi)^2]}{2(1-\varepsilon(a) + \varepsilon(a) a M\varphi)}; \quad D\omega = \omega''(s)|_{s=0} - (M\omega)^2.$$

Для дополнительных требований преобразование Лапласа—Стилтьеса времени ожидания начала обслуживания

$$\omega_1(s) = T(g(s)),$$

где функция $g(s)$ определяется уравнением (10.2), а функция $T(z)$ — уравнениями

$$T(z) = \frac{t(1) - t(z)}{1-z}, \quad |z| < 1, \quad T(1) = 1, \quad zt'(z) = F(z).$$

Поэтому для математического ожидания и дисперсии времени ожидания начала обслуживания дополнительного требования справедливы выражения:

$$M\omega_1 = \frac{Mh}{2}; \quad D\omega_1 = \frac{Dh}{2} + \frac{(Mh)^2}{12} \left[\frac{2DL_{out}}{(1-ML_{out})^2} + \frac{1+ML_{out}}{1-ML_{out}} \right].$$

Для времени пребывания требования в системе выполняются стандартные связи с временем начала обслуживания:

$$v(s) = \omega(s)h(s);$$

$$Mv = M\omega + Mh; \quad Dv = D\omega + Dh.$$

10.4.4. Дисциплина LIFO: время ожидания начала обслуживания. Преобразование Лапласа—Стилтьеса времени ожидания начала обслуживания требования основного потока в стационарном режиме определяется соотношением

$$\omega^L(s) = \frac{(1-\rho)[1-\varepsilon(a)]}{1-\varepsilon(a) + \varepsilon(a) a M\varphi} + \frac{a[1-\mu(s)]}{s + a - a\mu(s)} + \\ + \frac{(1-\rho)\varepsilon(a)a}{1-\varepsilon(a) + \varepsilon(a) a M\varphi} \frac{1-\varphi(s + a - a\mu(s))}{s + a - a\mu(s)},$$

где $\mu(s)$ определяется уравнениями

$$\mu(s) = g(s + a - a\mu(s)), \quad \operatorname{Re} s > 0, \quad |\mu(s)| \leq 1, \quad \mu(0) = 1, \quad (10.3)$$

а $g(s)$, как и ранее, определяется из (10.2).

Математическое ожидание и дисперсия времени ожидания начала обслуживания требования основного потока при дисциплине LIFO имеют вид:

$$M\omega^L = \frac{aDh}{2(1-\rho)(1-ML_{out})} \frac{1}{1-\varepsilon(a) + \varepsilon(a) a M\varphi} + \\ + \frac{a(Mh)^2}{2(1-\rho)} \frac{DL_{out} + 1 - ML_{out}}{(1-ML_{out})^3 [1-\varepsilon(a) + \varepsilon(a) a M\varphi]} + \frac{\varepsilon(a) a [D\varphi + (M\varphi)^2]}{2[1-\varepsilon(a) + \varepsilon(a) a M\varphi]}; \\ D\omega^L = [\omega^L(s)]''|_{s=0} - (M\omega^L)^2.$$

Для дополнительных требований (ввиду обусловленного при описании системы порядка их обслуживания) нет разницы в дисциплинах обслуживания FIFO и LIFO.

10.4.5. Период занятости системы. Преобразование Лапласа—Стилтьеса периода занятости системы требованиями по форме записи имеет то же представление, что и в 10.2.5, 10.3.5. Соответствующая функция $\mu(s)$ определяется уравнениями (10.3).

Для математического ожидания и дисперсии периода занятости системы справедливы выражения:

$$\begin{aligned} aM\pi &= \frac{1 - \varepsilon(a) + \varepsilon(a) aM\varphi}{(1 - \rho) [1 - \varepsilon(a) \varphi(a)]} - 1; \\ D\pi &= \frac{Dg}{(1 - \rho)^3} + \frac{\rho^3}{a^2 (1 - \rho)^3} + \frac{\varepsilon(a) [1 - \varphi(a)]}{1 - \varepsilon(a) \varphi(a)} \left\{ \left(\frac{Dg}{(1 - \rho)^3} + \frac{\rho^2}{a^2 (1 - \rho)^3} \right) \times \right. \\ &\times \left(\frac{aM\varphi}{1 - \varphi(a)} - 1 \right) + \frac{D\varphi}{(1 - \rho)^2 [1 - \varphi(a)]} + \frac{1}{a^2 (1 - \rho)^2} - \frac{\varphi(a) (M\varphi)^2}{(1 - \rho)^2 [1 - \varphi(a)]^2} + \\ &\left. + \frac{1 - \varepsilon(a)}{1 - \varepsilon(a) \varphi(a)} \frac{1}{(1 - \rho)^2} \left(\frac{aM\varphi}{1 - \varphi(a)} - 1 \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

10.5. СИСТЕМА С «РАЗОГРЕВОМ»

10.5.1. Описание системы. Отличие от стандартной СМО (см. § 10.2) состоит в том, что требование, поступившее в систему, свободную от вызовов, перед началом обслуживания вынуждено ожидать, пока произойдет «настройка» или «разогрев» работоспособного прибора на режим обслуживания. Преобразование Лапласа—Стилтьеса времени «разогрева» прибора задано

$$k(s) = M \exp(-sk), \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Предполагается, что при «поломке» прибора во время «разогрева» после ремонта происходит «доразогрев». При этом длительность полной занятости прибора «разогревом» с учетом возможных восстановлений работоспособности прибора κ задается преобразованием Лапласа—Стилтьеса

$$\kappa(s) = k(s + c - c\delta(s))$$

(наработка до отказа прибора при «разогреве» имеет функцию распределения $C(t) = 1 - \exp(-ct)$, $c > 0$, $t \geq 0$, и преобразование Лапласа—Стилтьеса времени восстановления прибора так же, как и в случае обслуживания $\delta(s)$). По аналогии с п. 10.1.3

$$M\kappa = Mk(1 + cM\delta); D\kappa = Dk(1 + cM\delta)^2 + cMk[D\delta + (M\delta)^2].$$

Выражение для загрузки системы сохраняет вид

$$\rho = aMh.$$

10.5.2. Число требований в системе. Производящая функция стационарного распределения числа требований в системе L имеет вид

$$P(z) = P(0) \frac{1 - R(z) \kappa(a - az)}{h(a - az) - z} h(a - az),$$

где

$$\begin{aligned} R(z) = R_0(z) &= \frac{1 - \varepsilon(a)}{1 - \varepsilon(a) \varphi(a)} z + \frac{\varepsilon(a)}{1 - \varepsilon(a) \varphi(a)} [\varphi(a - az) - \varphi(a)]; \\ P(0) &= \frac{1 - \rho}{R'(1) + aM\kappa}. \end{aligned}$$

Для математического ожидания и дисперсии L справедливы соотношения:

$$ML = \rho + \frac{a^2 h_2}{2(1-\rho)} + \frac{R''(1) + 2R'(1) aM\kappa + a^2 \kappa_2}{2[R'(1) + aM\kappa]},$$

или

$$ML = \rho + \frac{a^2 [Dh + (Mh)^2]}{2(1-\rho)} + \frac{a^2 [D\kappa + (M\kappa)^2]}{2[R'(1) + aM\kappa]} + \frac{R''(1) + 2R'(1) aM\kappa}{2[R'(1) + aM\kappa]},$$

$$DL = P''(1) + P'(1) - [P'(1)]^2.$$

10.5.3. Дисциплина FIFO: время ожидания начала обслуживания и время пребывания требования в системе. Так же как в § 2.3, преобразование Лапласа—Стилтьеса функции распределения времени ожидания начала обслуживания требования определяется из уравнения

$$P(z) = \omega(a - az)h(a - az)$$

и имеет вид

$$\omega(s) = \frac{1-\rho}{1-\varepsilon(a) + \varepsilon(a)a(M\varphi + M\kappa)} \frac{[1-\varepsilon(a)]s + \varepsilon(a)a[1-\varphi(s)]}{s - a + ah(s)}.$$

Математическое ожидание и дисперсия L

$$aM\omega = ML - aMh; \quad a^2 D\omega = DL - a^2 Dh - ML.$$

Как обычно, $v(s) = \omega(s)h(s)$.

10.5.4. Дисциплина LIFO: время ожидания требованием начала обслуживания и время пребывания в системе. Для преобразования Лапласа—Стилтьеса стационарной функции распределения времени ожидания начала обслуживания при дисциплине LIFO справедливо представление

$$\omega^L(s) = \frac{(1-\varepsilon(a))(1-\rho)\kappa(s+a-a\mu(s))}{1-\varepsilon(a) + \varepsilon(a)aM\varphi + \varepsilon(a)aM\varphi} + \frac{a[1-h(s+a-a\mu(s))]}{s+a-a\mu(s)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon(a)a(1-\rho)[1-\varphi(s+a-a\mu(s))]\kappa(s+a-a\mu(s))}{[1-\varepsilon(a) + \varepsilon(a)aM\varphi + \varepsilon(a)aM\kappa][s+a-a\mu(s)]} +$$

$$+ \frac{[1-\varepsilon(a)\varphi(a)]a(1-\rho)[1-\kappa(s+a-a\mu(s))]}{[1-\varepsilon(a) + \varepsilon(a)aM\varphi + \varepsilon(a)aM\kappa][s+a-a\mu(s)]},$$

где функция $\mu(s)$ та же, что и в п. 10.2.4. Она определяется уравнением

$$\mu(s) = h(s+a-a\mu(s)), \quad \operatorname{Re} s > 0, \quad |\mu(s)| \leq 1, \quad \mu(0) = 1. \quad (10.4)$$

Математические ожидания времен ожидания начала обслуживания совпадают для дисциплин FIFO и LIFO: $M\omega = M\omega^L$. Дисперсия времени ожидания при дисциплине LIFO имеет вид

$$D\omega^L = [\omega^L(s)]'_s|_{s=0} - (M\omega)^2.$$

Как обычно, $v^L(s) = \omega^L(s)h(s)$.

10.5.5. Период занятости системы. Преобразование Лапласа—Стилтьеса периода занятости системы требованиями определяется зависимостями

$$\pi(s) = \frac{1-\varepsilon(a)}{1-\varepsilon(a)\varphi(a)} \mu(s) + \frac{\varepsilon(a)a}{1-\varepsilon(a)\varphi(a)} \frac{\varphi(s+a-a\mu(s)) - \varphi(a)}{a\mu(s) - s} \kappa(s+a-a\mu(s)) \mu(s).$$

где $\mu(s)$ — указанная в п. 10.5.4 функция (10.4).

Для математического ожидания и дисперсии периода занятости системы требованиями справедливы выражения:

$$aM\pi = \frac{1-\varepsilon(a) + \varepsilon(a)aM\varphi + \varepsilon(a)aM\kappa}{(1-\rho)[1-\varepsilon(a)\varphi(a)]} - 1;$$

$$D\pi = \pi''(0) - (M\pi)^2.$$

10.6.1. Описание системы. Рассматриваются одновременно все дополнения, введенные в § 10.3, 10.4 и 10.5 к стандартной СМО, описанной в § 10.2: случайное число требований n в поступающей в систему группе L_{in} задается производящей функцией $\Phi(z)$, число дополнительных требований L_{out} , выявленных после обслуживания некоторого требования, — производящей функцией $F(z)$, а время «разогрева» прибора k , свободного от требований, — преобразованием Лапласа—Стилтьеса $k(s)$.

Дополнительные требования обслуживаются сразу после их породившего. При «доразогреве» длительность полной занятости прибора «разогревом» с учетом возможных восстановлений работоспособности прибора κ задается преобразованием Лапласа—Стилтьеса

$$\kappa(s) = k(s + c - c\delta(s))$$

(наработка до отказа прибора при «разогреве» имеет функцию распределения $C(t) = 1 - \exp(-ct)$, $c > 0$, $t \geq 0$, и преобразование Лапласа—Стилтьеса времени восстановления работоспособности прибора $\delta(s)$). По аналогии с п. 10.1.3

$$M\kappa = Mk(1 + cM\delta);$$

$$D\kappa = Dk(1 + cM\delta)^2 + cMk[D\delta + (M\delta)^2].$$

Выражение для загрузки системы имеет вид

$$\rho = aMhML_{in}/(1 - ML_{out}).$$

10.6.2. Число требований в системе. Производящая функция стационарного распределения числа требований, находящихся в системе ($L = (L_0, L_1, \dots)$), где L_0 соответствует требованиям основного потока, а L_1 — дополнительным требованиям), имеет вид:

$$P(z_0, z_1) = \{ [1 - \varepsilon(a)\varphi(a)] [1 - \Phi(z_0)] z_0 \}^{-1} \times \\ \times \{ [1 - \varepsilon(a)\varphi(a)] (P(z_0) - P(0)) + P(0) \varepsilon(a) [\varphi(a - a\Phi(z_0)) - \varphi(a)] z_0^{-1} \} \times \\ \times [h(a - a\Phi(z_0)) g(a - a\Phi(z_0), z_1) + z_0 (1 - h(a - a\Phi(z)))] + P(0) z_0 \times \\ \times [1 - \varepsilon(a)\varphi(a - a\Phi(z))] \},$$

где

$$P(z) = P(0) \frac{1 - R(\Phi(z)) \kappa(a - a\Phi(z))}{g(a - a\Phi(z)) - z} g(a - a\Phi(z));$$

$$P(0) = \frac{(1 - \rho)}{[R'(1) + aM\kappa] ML_{in}};$$

$$R(z) = R_0(z) = \frac{1 - \varepsilon(a)}{1 - \varepsilon(a)\varphi(a)} z + \frac{\varepsilon(a)}{1 - \varepsilon(a)\varphi(a)} [\varphi(a - az) - \varphi(a)];$$

$R(\Phi(z))$ — производящая функция распределения случайного числа R требований, поступивших в систему к началу «разогрева» прибора, при этом

$$MR = \frac{1 - \varepsilon(a) + \varepsilon(a) aM\varphi}{1 - \varepsilon(a)\varphi(a)} ML_{in};$$

функция $g(s, z)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{g(s, z)}{[1 - h(s)]} \left\{ 1 - \frac{g(s) [z - h(s)F(z)]}{z[g(s) - z]} - \frac{h(s)F(0)}{z} \right\} = \frac{g(s) [z - h(s)F(z)]}{h(s)[g(s) - z]} + F(0),$$

а $g(s)$, определяемая уравнением

$$g(s) = h(s)F(g(s)), \quad \operatorname{Re} s > 0, \quad |g(s)| \leq 1, \quad g(0) = 1, \quad (10.5)$$

является преобразованием Лапласа—Стилтьеса случайной величины g — времени блокировки прибора требованием основного потока, для которой:

$$Mg = \frac{Mh}{1 - ML_{out}}; \quad Dg = \frac{Dh}{1 - ML_{out}} + \frac{DL_{out} (Mh)^2}{(1 - ML_{out})^3}.$$

Математические ожидания и дисперсии для числа основных и дополнительных требований в системе в стационарном режиме определяются соотношениями:

$$ML_0 = \frac{\partial P(z_0, 1)}{\partial z_0} \Big|_{z_0=1}, \quad DL_0 = \frac{\partial^2 P(z_0, 1)}{\partial z_0^2} \Big|_{z_0=1} + ML_0(1 - ML_0);$$

$$ML_1 = \frac{\partial P(1, z_1)}{\partial z_1} \Big|_{z_1=1}, \quad DL_1 = \frac{\partial^2 P(1, z_1)}{\partial z_1^2} \Big|_{z_1=1} + ML_1(1 - ML_1).$$

10.6.3. Дисциплина FIFO: время ожидания начала обслуживания и время пребывания требования в системе. Для требований основного потока преобразование Лапласа—Стилтьеса времени ожидания начала обслуживания определяется из уравнения

$$P(z) = \omega(a - a\Phi(z))g(a - a\Phi(z))T(z),$$

где $g(s)$ — функция, определяемая функциональным уравнением (10.5), а $T(z)$ — уравнениями

$$T(z) = \frac{t(1) - t(z)}{1 - z}, \quad |z| < 1, \quad T(1) = 1, \quad zt'(z) = \Phi(z). \quad (10.6)$$

Математическое ожидание и дисперсия времени ожидания начала обслуживания требования основного потока:

$$M\omega = \frac{ML_0}{aML_{in}} + \frac{1 - ML_{in}}{2aML_{in}} - \frac{Mh}{1 - ML_{out}};$$

$$a^2 D\omega (ML_{in})^2 = DL_0 - a^2 \frac{Dh (ML_{in})^2}{1 - ML_{out}} - \frac{a^2 DL_{out} (Mh)^2 (ML_{in})^2}{(1 - ML_{out})^3} + \frac{1 - (ML_{in})^2}{12} -$$

$$- \frac{DL_{in}}{3} - \left(aM\omega + \frac{aMh}{1 - ML_{out}} \right) (DL_{in} + (ML_{in})^2).$$

Для дополнительных требований преобразование Лапласа—Стилтьеса времени ожидания начала обслуживания имеет вид

$$\omega_1(s) = T_F(g(s)),$$

где функция $g(s)$ определяется уравнением (10.5), а $T_F(z)$ — уравнением, аналогичным (10.6), с заменой $\Phi(z)$ на $F(z)$.

Математическое ожидание и дисперсия времени ожидания начала обслуживания дополнительным требованием:

$$M\omega_1 = \frac{Mh}{1 - ML_{out}} \frac{1 - F'(1)}{2} = \frac{Mh}{2};$$

$$D\omega_1 = \frac{Dh}{2} + \frac{(Mh)^2}{12} \left[\frac{2DL_{out}}{(1 - ML_{out})^2} + \frac{1 + ML_{out}}{1 - ML_{out}} \right].$$

Как обычно, для времени пребывания требования в системе справедлива связь с временем ожидания. Для требований основного потока $v(s) = \omega(s)h(s)$, и для дополнительных требований $v_1(s) = \omega_1(s)h(s)$.

10.6.4. Дисциплина LIFO: время ожидания начала обслуживания. Преобразование Лапласа—Стилтьеса времени ожидания начала обслуживания требования основного потока в стационарном режиме при дисциплине LIFO определяется соотношением

$$\omega^L(s) = \frac{(1-\varepsilon(a))(1-\rho) \kappa(s+a-a\mu(s))}{1-\varepsilon(a)+\varepsilon(a) a (M\varphi+M\kappa)} + \frac{aML_{in}(1-g(s+a-a\mu(s)))}{s+a-a\mu(s)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon(a) a (1-\rho) [1-\varphi(s+a-a\mu(s))] \kappa(s+a-a\mu(s)) + (1-\varepsilon(a)) \varphi(a) a (1-\rho) [1-\kappa(s+a-a\mu(s))]}{[1-\varepsilon(a)+\varepsilon(a) a M\varphi + \varepsilon(a) a M\kappa] [s+a-a\mu(s)]}.$$

где

$$\mu(s) = \Phi(g(s+a-a\mu(s))), \quad \operatorname{Re} s > 0, \quad |\mu(s)| \leq 1, \quad \mu(0) = 1, \quad (10.7)$$

а $g(s)$, как и ранее, определяется из (10.5).

Математическое ожидание и дисперсия времени ожидания начала обслуживания требования основного потока при дисциплине LIFO имеют вид:

$$M\omega^L = \frac{[1-\varepsilon(a)+\varepsilon(a) a M\varphi] M\kappa}{1-\varepsilon(a)+\varepsilon(a) a (M\varphi+M\kappa)} + \frac{\varepsilon(a) a \varphi_2 + [1-\varepsilon(a) \varphi(a)] a \kappa_2}{2 [1-\varepsilon(a)+\varepsilon(a) a (M\varphi+M\kappa)]} +$$

$$+ \frac{a M L_{in} [Dg + (Mg)^2]}{2 (1-\rho) [1-\varepsilon(a)+\varepsilon(a) a (M\varphi+M\kappa)]};$$

$$D\omega^L = \omega_2^L - (M\omega^L)^2;$$

$$\omega_2^L = \left\{ (1-\varepsilon(a)) \left[\frac{a g_2 M L_{in} M\kappa + (Mg)^2 \Phi''(1) a M\kappa}{(1-\rho)^2} + \frac{\kappa_2}{1-\rho} \right] + \right.$$

$$\left. + \varepsilon(a) a \left[\frac{Dg M L_{in} + (Mg)^2 (\Phi''(1) + M L_{in})}{2 (1-\rho)^2} (\varphi_2 + 2a M\varphi \cdot M\kappa) + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{\kappa_2 M\varphi + \varphi_2 M\kappa + \varphi_3 3^{-1}}{(1-\rho)} + (1-\varepsilon(a) \varphi(a)) a \left[\frac{\kappa_3}{3 (1-\rho)} + \frac{Dg M L_{in} + (Mg)^2 (\Phi''(1))}{2 (1-\rho)^2} + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{(Mg)^2 M L_{in}}{2 (1-\rho)^2} \right] \kappa_2 \left. \right] + \frac{a M L_{in}}{6 (1-\rho)^3} [g_3 (1-\rho) 2 + 3a g_2 (Dg M L_{in} + (Mg)^2 (\Phi''(1) +$$

$$+ M L_{in}))] [1-\varepsilon(a)+\varepsilon(a) a (M\varphi+M\kappa)] \left. \right\} [1-\varepsilon(a)+\varepsilon(a) a (M\varphi+M\kappa)]^{-1}.$$

Для дополнительных требований (ввиду определенного порядка обслуживания) дисциплины FIFO и LIFO никак не сказываются.

10.6.5. Период занятости системы. Преобразование Лапласа—Стилтьеса периода занятости системы требованиями имеет вид

$$\pi(s) = \frac{1-\varepsilon(a)}{1-\varepsilon(a) \varphi(a)} \mu(s) + \frac{\varepsilon(a) a}{1-\varepsilon(a) \varphi(a)} \frac{\varphi(s+a-a\mu(s))-\varphi(a)}{a\mu(s)-s} \kappa(s+a-a\mu(s)) \mu(s),$$

где функции $g(s)$ и $\mu(s)$ определяются уравнениями (10.5) и (10.7) соответственно.

Для математического ожидания и дисперсии периода занятости системы справедливы выражения:

$$a M \pi = \frac{1-\varepsilon(a)+\varepsilon(a) a M\varphi + \varepsilon(a) a M\kappa}{(1-\rho) [1-\varepsilon(a) \varphi(a)]} - 1;$$

$$D \pi = \frac{Dg M L_{in}}{(1-\rho)^3} + \frac{D L_{in} (Mg)^2}{(1-\rho)^3} + \frac{\rho^3}{a^2 (1-\rho)^3} + \frac{\varepsilon(a) [1-\varphi(a)]}{1-\varepsilon(a) \varphi(a)} \times$$

$$\times \left\{ \left[\frac{Dg M L_{in} + D L_{in} (Mg)^2}{(1-\rho)^3} + \frac{\rho^2}{a^2 (1-\rho)^3} \right] \left[\frac{a M \varphi}{1-\varphi(a)} + a M \kappa - 1 \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{D \kappa}{(1-\rho)^2} + \frac{D \varphi}{(1-\rho)^2 [1-\varphi(a)]} + \frac{1}{a^2 (1-\rho)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\varphi(a) (M \varphi)^2}{(1-\rho)^2 [1-\varphi(a)]^2} + \frac{1-\varepsilon(a)}{1-\varepsilon(a) \varphi(a)} \frac{1}{(1-\rho)^2} \left[\frac{a M \varphi + a M \kappa}{1-\varphi(a)} - 1 \right]^2 \right\}.$$

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ЭВМ

Глава 11

МЕТОДОЛОГИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ

11.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В тех случаях, когда невозможно получить аналитическое решение задач теории надежности, в качестве метода исследования применяют машинное моделирование. Основными этапами такого исследования являются: построение формальной модели, программное обеспечение процесса имитации траекторий модели, имитационные эксперименты.

Динамические модели надежности, как правило, характеризуются *определяющей последовательностью* некоторых событий (отказы, восстановления, переключения и т. п.). Такие модели называются дискретными.

Этап *построения формальной модели* сводится к составлению алгоритма формирования определяющей последовательности, а также к определению траектории, получению на основе ее необходимых характеристик.

Этап *организации программного обеспечения* заключается в создании машинной программы, позволяющей воспроизвести (имитировать) траекторию модели в соответствии с найденными закономерности и найти соответствующие показатели работы модели, а также в создании программ, обеспечивающих работу с моделью.

Этап *организации имитационных экспериментов* — это работа с моделью. На этом этапе осуществляется выбор модели из имеющихся альтернативных вариантов и способов обработки выходной информации для эффективного получения необходимых результатов.

Рассмотрим разнообразные программные средства и математические методы, относящиеся к названным этапам, а также перечислим некоторые проблемы, возникающие на данных этапах.

11.2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ И ПРОЦЕДУРЫ ИМИТАЦИИ

Обычно дискретная модель представляется в виде совокупности взаимодействующих *объектов*, которые обозначим $A_1, A_2, \dots$. Каждый объект A_j полностью характеризуется набором *признаков* s_j . Этими признаками могут быть как *состояния* объектов z_j (величины, полностью определяющие динамику системы), так и различные служебные величины π_j , т. е. $s_j = (z_j, \pi_j)$. В объекте A_j могут происходить некоторые *события* e_j , время наступления которых определяется состоянием z_j , а их содержание — признаком s_j . В результате наступления событий e_j могут меняться признаки некоторых объектов (перечень этих объектов зависит от содержания события e_j).

Обычно данная модель реализуется следующим образом. В состав признаков s_j объекта A_j вводится еще одна величина τ_j (которую естественно считать частью состояния), равная *остаточному времени* до наступления очередного события e_j ; в этом объекте при условии, что другие события в системе не мешают его на-

ступлению). В начальный момент времени $t = 0$ для каждого объекта A_j величина $\tau_j = \tau_j^0$ определяется начальным состоянием $z_j = z_j^0$. Первое событие в системе наступит через время $\theta_1 = \min_j \tau_j$, и если $\tau_{j_1} = \theta_1$, то это событие происходит в объекте A_{j_1} (возможной неоднозначностью номера j_1 будем пренебрегать). Поскольку эти события полностью определяют динамику модели, то естественно рассматривать лишь моменты наступления событий. Наступление события e_{j_1} в момент $t_1 = \theta_1$ вызывает в модели изменение признаков некоторых объектов A_j , и в зависимости от значений новых состояний для них формируются новые значения остаточных времен τ_j^1 . В остальных объектах также пересчитываются остаточные времена: значения τ_j^0 заменяются на $\tau_j^1 = \tau_j^0 - \theta_1$. Затем вновь отыскивается $\theta_2 = \min_j \tau_j^1 = \tau_{j_2}^1$, т. е. вторым определяющим событием является e_{j_2} , и момент его наступления $t_2 = t_1 + \theta_2$. Вновь происходит изменение признаков ряда объектов, зависящих от события e_{j_2} , и для них формируются новые значения остаточных времен, а для остальных объектов полагается $\tau_j^2 = \tau_j^1 - \theta_2$. Далее процедура продолжается аналогично.

Данная схема несколько упрощена. Например, в ней не учитывается возможная «цепная реакция» событий. Тем не менее основные ее черты реализованы практически во всех средствах моделирования (возможно лишь с использованием других терминов вместо «объект», «событие», «признак», «состояние»). В результате работы этой схемы выдается определяющая последовательность $(t_1, e_{j_1}), (t_2, e_{j_2}), \dots$ и значения величин $(z_{j_1}^k, \pi_{j_1}^k, \tau_{j_1}^k)$, по которым однозначно восстанавливается вся траектория системы.

Как правило, для дискретных моделей происходящие события связываются с признаками s_j . Однако иногда рассматривают модель через равные промежутки времени длиной Δt . В этом случае полагают, что в момент t_k все $\tau_i^k = \Delta t$ (при этом и $t_k = k\Delta t$). Поскольку такая дискретная модель, как правило, малоэффективна и в настоящее время используется редко, мы ее рассматривать не будем.

Пример 11.1. Рассмотрим резервированную систему, состоящую из m основных и n ненагруженных резервных элементов. Пусть, кроме того, есть l ремонтных мест ($l < m + n$). Предположим, что наработка до отказа каждого элемента имеет функцию распределения $F(x)$, а время восстановления $G(x)$.

Приведем несколько вариантов модели данной системы.

1. Модель состоит из $m + n$ объектов $A_1, \dots, A_{m+n}$, соответствующих элементам системы. Каждый объект A_i характеризуется признаком $s_i = (z_i, \pi_i)$. Состояние z_i может принимать целые значения $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$. Если $z_i < 0$, то это означает, что объект (элемент) A_i находится в резерве; если $z_i = -k$, то элемент A_i будет взят из резерва k -м по счету (предполагается, что «очередь» в резерве устанавливается в порядке поступления элементов из ремонта). Состояние $z_i = 0$ соответствует работе элемента A_i . Если $z_i = 1$, то элемент A_i восстанавливается. Если же $z_i = s + 1$, $s \geq 1$, то это означает, что элемент A_i стоит s -м по счету в очереди на ремонт (предполагается, что элементы восстанавливаются в порядке поступления). Для определенности будем считать значением служебного признака π_i количество отказов, которое «испытал» к текущему моменту времени элемент A_i . Время τ_i определим лишь в состояниях $z_i = 0$, $z_i = 1$ (в остальных — будем формально считать $\tau_i = \infty$), где τ_i — остаточное время до отказа элемента A_i и до окончания его восстановления соответственно. В соответствии с этим событие e_i принимает два значения: $e_i = 0$ соответствует отказу элемента A_i , а $e_i = 1$ — его восстановлению.

Итак, пусть в некоторый момент t_k модель описывается вектором $l(z_1^k, \pi_1^k, \tau_1^k), (z_2^k, \pi_2^k, \tau_2^k), \dots, (z_{m+n}^k, \pi_{m+n}^k, \tau_{m+n}^k)$. Тогда следующим «особым» моментом будет $t_{k+1} = t_k + \theta$, где $\theta = \min_{1 \leq i \leq m+n} \tau_i^k$. Пусть при этом $\theta = \tau_{j_1}^k$, т. е. в момент t_{k+1} произошло событие e_{j_1} .

а. Пусть $e_r = 0$ (автоматически следует, что $z_\alpha^k = 0$). В этом случае для всех резервных элементов A_α (определяемых условием $z_\alpha^k < 0$) полагаем:

$$(z_\alpha^{k+1}, \pi_\alpha^{k+1}, \tau_\alpha^{k+1}) = \begin{cases} (z_\alpha^k + 1, \pi_\alpha^k, \infty), & \text{если } z_\alpha^k < -1, \\ (0, \pi_\alpha^k, \xi_k), & \text{если } z_\alpha^k = -1, \end{cases}$$

т. е. один из резервных элементов (если такие вообще есть) становится основным, а остальные — продвигаются по очереди на единицу. Здесь $\{\xi_k\}$ — независимые одинаково распределенные по закону F случайные величины (ξ_k — наработка до отказа элемента A_α). Пусть δ^k — количество ремонтных мест, занятых в момент t_k (а следовательно, и в момент t_{k+1} , так как ни одна из ремонтных единиц за это время не освободилась), т. е. количество элементов A_j , имеющих $z_j^k = 1$. Если $\delta^k < l$ (т. е. имеется хотя бы одна свободная ремонтная единица), то полагаем

$$(z_r^{k+1}, \pi_r^{k+1}, \tau_r^{k+1}) = (1, \pi_r^k + 1, \eta_k),$$

где $\{\eta_k\}$ — независимые одинаково распределенные по закону G случайные величины (η_k — длительность восстановления элемента A_r); увеличение признака π_r на единицу фиксирует очередной отказ элемента A_r . Если же $\delta^k = l$, то полагаем

$$(z_r^{k+1}, \pi_r^{k+1}, \tau_r^{k+1}) = \left(\max_{1 \leq i \leq m+n} z_i^k + 1, \pi_r^k + 1, \infty \right),$$

что соответствует установке в очередь на восстановление элемента A_r на место с номером $\max_{1 \leq i \leq m+n} z_i^k$. Для элементов A_β ($\beta \neq r$), находящихся в отказовом состоянии, и основных (у которых $z_\beta^k \geq 0$), производятся следующие изменения:

$$(z_\beta^{k+1}, \pi_\beta^{k+1}, \tau_\beta^{k+1}) = (z_\beta^k, \pi_\beta^k, \tau_\beta^k - \theta).$$

Здесь считается, что $\infty - \theta = \infty$ (для элементов A_β , стоящих в очереди на восстановление, т. е. у которых $z_\beta^k > 1$).

б. Пусть $e_r = 1$ (следовательно, элемент A_r окончил восстанавливаться и $z_r^k = 1$).

В этом случае на освободившееся ремонтное место поступает элемент, стоящий первым в очереди (если она существует), остальные элементы продвигаются по очереди, а элементы, уже находящиеся на восстановлении, продолжают восстанавливаться, но их оставшееся время уменьшается на θ . Это соответствует переходу:

$$(z_\alpha^{k+1}, \pi_\alpha^{k+1}, \tau_\alpha^{k+1}) = \begin{cases} (z_\alpha^k - 1, \pi_\alpha^k, \infty), & \text{если } z_\alpha^k > 2, \\ (1, \pi_\alpha^k, \eta_k), & \text{если } z_\alpha^k = 2, \\ (z_\alpha^k, \pi_\alpha^k, \tau_\alpha^k - \theta), & \text{если } z_\alpha^k = 1. \end{cases}$$

Пусть φ^k — количество основных элементов в момент t_k (т. е. количество элементов A_j , у которых $z_j^k \leq 0$). Если $\varphi^k < m$, то восстановленный элемент становится на свободное место основного:

$$(z_r^{k+1}, \pi_r^{k+1}, \tau_r^{k+1}) = (0, \pi_r^k, \xi_k).$$

Если же $\varphi^k = m$, то восстановленный элемент поступает в резерв на последнее место в очереди:

$$(z_r^{k+1}, \pi_r^{k+1}, \tau_r^{k+1}) = \left(\min_{1 \leq i \leq m+n} z_i^k - 1, \pi_r^k, \infty \right).$$

Все работоспособные (основные и резервные) элементы остаются на своих местах; только наработка до отказа основных элементов уменьшается на величину θ :

$$(z_\beta^{k+1}, \pi_\beta^{k+1}, \tau_\beta^{k+1}) = (z_\beta^k, \pi_\beta^k, \tau_\beta^k - \theta) \text{ для } z_\beta^k \leq 0.$$

Приведенными соотношениями полностью описано функционирование модели.

2. В этом варианте модели не будем фиксировать количество отказов каждого элемента и вводить служебные признаки. Введем четыре объекта: A_1, A_2, A_3, A_4 . Пусть A_1 соответствует основным элементам, A_2 — резервным, A_3 — очереди на ремонт, A_4 — ремонтным единицам. Объект A_1 будем характеризовать состоянием $z_1 = (\kappa, z_{11}, \dots, z_{1\kappa})$, где κ — число рабочих элементов в рассматриваемый момент времени ($\kappa = 0, 1, \dots, m$), z_{1i} — оставшееся время работы i -го из основных элементов. Время $\tau_1 = \min_{1 \leq i \leq \kappa} z_{1i}$. Отметим, что если $\kappa = 0$ (работоспособ-

ных основных элементов нет), то $z_{11}, z_{12}, \dots$ не определяются и принимается $\tau_1 = \infty$. Объект A_2 будем характеризовать состоянием z_2 , которое принимает значения $0, 1, \dots, n$ и соответствует текущему числу резервных элементов. Поскольку резервные элементы из строя не выходят, полагаем $\tau_2 = \infty$. Аналогично объект A_3 будем характеризовать состоянием z_3 , принимающим значения $0, 1, \dots, m+n$ и равным длине очереди на восстановление. Состояние объекта A_4 имеет вид: $z_4 = (v, z_{41}, \dots, z_{4v})$, где v — количество занятых ремонтных единиц ($\theta = 0, 1, \dots, l$); z_{4i} — остаточное время восстановления на i -м из них; $\tau_4 = \min_{1 \leq i \leq v} z_{4i}$. В этом

случае вновь полагаем $\tau_4 = \infty$, если $v = 0$. В данной модели могут происходить лишь два события: e_1 и e_4 . Первое из них соответствует отказу какого-либо элемента, второе — его восстановлению. Приведем лишь формулы пересчета состояний без комментариев.

Пусть в момент t_k система характеризуется набором

$$[(z_1^k, \tau_1^k), (z_2^k, \tau_2^k = \infty), (z_3^k, \tau_3^k = \infty), (z_4^k, \tau_4^k)] = [(\kappa^k, z_{11}^k, \dots, z_{1\kappa^k}^k, \tau_1^k), (z_2^k, \infty), (z_3^k, \infty), (v, z_{41}^k, \dots, z_{4v^k}^k, \tau_4^k)] \text{ и } \theta = \min(\tau_1^k, \tau_4^k).$$

Тогда $t_{k+1} = t_k + \theta$.

а. Если $\tau_1^k \leq \tau_4^k$, то в момент t_{k+1} происходит событие e_1 . Пусть при этом $\tau_1^k = z_{1r}^k$. Тогда:

$$(z^{k+1}, \tau^{k+1}) = \begin{cases} (\kappa^k, z_{11}^k - \theta, \dots, z_{1, r-1}^k - \theta, \xi_k, z_{1, r+1}^k - \theta, \dots, z_{1\kappa^k}^k - \theta), & \text{если } z_2^k > 0, \\ (\kappa^k - 1, z_{11}^k - \theta, \dots, z_{1, r-1}^k - \theta, z_{1, r+1}^k - \theta, \dots, z_{1\kappa^k}^k - \theta), & \text{если } z_2^k = 0; \end{cases}$$

$$z_2^{k+1} = \max(0, z_2^k - 1);$$

$$z_3^{k+1} = \begin{cases} z_3^k + 1, & \text{если } v^k = l, \\ 0, & \text{если } v^k < l; \end{cases}$$

$$(v^{k+1}, z_{41}^{k+1}, \dots, z_{4v^{k+1}}^{k+1}) = \begin{cases} (v^k, z_{41}^k - \theta, \dots, z_{4v^k}^k - \theta), & \text{если } v^k = l, \\ (v^k, z_{41}^k - \theta, \dots, z_{4v^k}^k - \theta, \eta_k), & \text{если } v^k < l. \end{cases}$$

б. Если $\tau_1^k > \tau_4^k$, то в момент t_{k+1} происходит событие e_4 . Пусть при этом $\tau_4^k = z_{4r}^k$. Тогда:

$$(\kappa^{k+1}, z_{11}^{k+1}, \dots, z_{1\kappa^k+1}^{k+1}) = \begin{cases} (\kappa^k, z_{11}^k - \theta, \dots, z_{1, \kappa^k}^k - \theta), & \text{если } \kappa^k = m, \\ (\kappa^k + 1, z_{11}^k - \theta, \dots, z_{1, \kappa^k}^k - \theta, \xi_k), & \text{если } \kappa^k < m; \end{cases}$$

$$z_2^{k+1} = \begin{cases} z_2^k + 1, & \text{если } \kappa^k = m, \\ 0, & \text{если } \kappa^k < m; \end{cases}$$

$$z_3^{k+1} = \max(0, z_3^k - 1);$$

$$(v^{k+1}, z_{41}^{k+1}, \dots, z_{4v^k+1}^{k+1}) = \begin{cases} (v^k, z_{41}^k - \theta, \dots, z_{4, r-1}^k - \theta, \eta_k, z_{4, r+1}^k - \theta, \dots, z_{4, v^k}^k - \theta), & \text{если } z_3^k > 0, \\ (v^k - 1, z_{41}^k - \theta, \dots, z_{4, r-1}^k - \theta, z_{4, r+1}^k - \theta, \dots, z_{4, v^k}^k - \theta), & \text{если } z_3^k = 0. \end{cases}$$

3. Пусть у нас есть основания считать, что наработка до отказа элемента имеет показательное распределение, т. е. $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. В этом случае можно упростить предыдущую модель, вернее, объект A_1 в ней. Положим z_1 равным текущему числу работоспособных основных элементов, а оставшееся время τ_1 каждый раз будем полагать равным случайной величине с распределением $1 - \exp \times \times (-\lambda z_1 x)$. Формулы пересчета состояний сохраняются из предыдущей модели, с той лишь разницей, что из них исключаются все преобразования, связанные с координатами $z_{11}, z_{12}, \dots$

Все три варианта модели имеют одинаковую структуру в том смысле, что представляются в виде взаимодействующих объектов, характеризующих различными признаками. Модели эти не эквивалентны. Например, для их описания требуется различное количество признаков и, следовательно, различная емкость памяти. Однако основное различие этих моделей заключается в возможности получения тех или иных характеристик. Отметим, что до сих пор ни о каких характеристиках речи не шло, а модель описывалась лишь как некоторый математический образ реальной системы. Траектории модели, воспроизводимые на ЭВМ, обрабатываются статистическими методами, как и всякий случайный процесс. Такие имитационные эксперименты, сводящиеся к воспроизведению траекторий и их последующей статистической обработке, во многом подобны натурным экспериментам. Отличие заключается в большой гибкости модели по сравнению с реальным объектом.

Обратимся к первой модели. В ней объекты соответствуют реальным элементам. Поэтому принципиально возможно фиксировать любые вероятностно-временные характеристики, относящиеся как к поведению групп элементов, так и отдельных элементов. Можно фиксировать также, например, суммарные длительности ремонта. Однако модель не дает возможности получать характеристики, относящиеся к отдельным ремонтным местам (например, коэффициенты их загруженности). Это объясняется тем, что в модели отсутствуют объекты, соответствующие ремонтным местам. Их присутствие обеспечило бы полное структурное сходство модели с реальной системой и позволило бы снимать любые интересные исследователя характеристики. Обычно при моделировании стремятся к такому структурному подобию (*имитации структуры*), ибо оно обеспечивает возможность фиксировать произвольные выходные данные, состав которых обычно либо заранее неизвестен, либо меняется в процессе исследования.

Вместе с тем полная имитация структуры может потребовать непомерных затрат вычислительных ресурсов. Поэтому этап *упрощения модели* является не-

вание ими содержательного описания моделируемой системы, которое в процессе трансляции переводится в машинную модель описанного выше типа. Для сравнения отметим, что математической моделью «непрерывных» языков являются дифференциальные уравнения. Указанное содержательное описание существенно облегчает пользователю общение с программой, позволяя составлять модель с применением понятий из хорошо известной ему предметной области. Но такая концептуальность может служить препятствием для расширения класса моделируемых задач и для исследования моделей математических методов, требующих знания именно математической модели (остающейся неизвестной пользователю или требующей для своего выявления значительных дополнительных усилий).

Отметим различия между существующими языками. Во-первых, это чисто терминологические отличия (например, в обозначениях объектов, признаков, состояний, событий и т. д.). Во-вторых, отличия в способах обработки последовательности определяющих событий. Третьим и, пожалуй, наиболее существенным отличием является степень гибкости языка. Так, одним из «жестких» языков является язык *GPSS*, где пользователю представлена лишь возможность формировать свою модель с помощью четко оговоренного набора блоков. Это существенно упрощает процесс составления программы, но снижает ее эффективность. Представителями «гибких» языков являются, например, *SIMULA* и *SIMSCRIPT*. В них требуется дополнительная работа по учету последствий событий, происходящих в системе.

Следует отметить, что перечисленные языки хорошо приспособлены для описания систем, изучаемых в теории надежности. Практический выбор того или иного языка чаще диктуется наличием соответствующих трансляторов и подготовкой программистов, нежели их сравнительными качествами.

11.4. ОРГАНИЗАЦИЯ ИМИТАЦИОННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Процесс машинной имитации, осуществляемый с помощью любого программного средства, можно представить как преобразование некоторого набора исходных данных X в набор выходных данных Y . В приведенном примере набором X может служить последовательность $X = \{\xi_k, \eta_k\}_{k \geq 1}$.

Состав выходных данных Y в значительной степени определяется целями моделирования и обычно представляет собой некоторые стандартные показатели надежности (коэффициент готовности, вероятность безотказной работы на заданном промежутке времени, коэффициент загрузки ремонтного оборудования и т. д.) либо распределения соответствующих случайных величин. Однако в качестве Y могут выбираться и случайные последовательности (или распределения их характеристик) в случае, например, изучения неуставившегося режима. Поскольку обычно в имитационном эксперименте интерес представляет не один показатель, а некоторый набор, то и выходные данные, как правило, представляют собой большие массивы информации. Их статистическая обработка с целью получения искомых усредненных характеристик вполне аналогична обычной статистической обработке случайных величин или процессов.

Следует, однако, помнить, что традиционно большинство статистических процедур использует предположения о независимости и нормальности случайных величин. Оба эти предположения обычно не выполняются в имитационных экспериментах. Например, последовательные длительности ожидания начала восстановления в приведенном выше примере являются зависимыми и заведомо негауссовскими. Поэтому многие процедуры, применяемые для обработки результатов имитационных экспериментов, имеют недостаточное математическое обоснование. В связи с этим при моделировании стремятся так преобразовать наборы данных, чтобы можно было воспользоваться хорошо обоснованными и хорошо за-

рекомендованными себя методами. В отличие от натурального эксперимента, здесь имеется дополнительная возможность для повышения точности и достоверности оценок — генерация специальным образом подобранной последовательности случайных чисел, определяющей динамику модели. Так, широко используются *методы понижения дисперсии*, позволяющие повышать точность оценок. Объясним идею этих методов на одном примере — *методе дополняющих переменных*.

Пусть искомым показателем является среднее «выходной» случайной величины Y , зависящей от генерируемых в процессе имитации независимых случайных величин $\theta_1, \theta_2, \dots$ монотонным образом, т. е. увеличение любого из аргументов θ_i функции $Y = Y(\theta_1, \theta_2, \dots)$ приводит к увеличению значения функции. Пусть $F_i(x)$ — функция распределения случайной величины θ_i . Сформируем новую последовательность $\{\theta'_i\}$: $\theta'_i = F_i^{-1}(1 - F_i(\theta_i))$. Легко показать, что случайная величина θ'_i распределена так же, как и θ_i . При генерации случайные величины θ_i и θ'_i удобнее получать с помощью одного и того же числа ω_i , равномерно распределенного на $(0, 1)$ и реализуемого с помощью датчика случайных чисел: $\theta_i = F_i^{-1}(\omega_i)$; $\theta'_i = F_i^{-1}(1 - \omega_i)$. Ясно, что величины θ_i и θ'_i связаны антимонотонной зависимостью: при увеличении θ_i величина θ'_i убывает. Отсюда и из монотонности функции Y следует, что случайные величины $Y = Y(\theta_1, \theta_2, \dots)$ и $Y' = Y(\theta'_1, \theta'_2, \dots)$ имеют отрицательный коэффициент ковариации r . В то же время эти величины имеют одинаковые среднее μ и дисперсию σ^2 . Поэтому оценка $(Y + Y')/2$, является несмещенной оценкой μ с дисперсией $\sigma_1^2 = (\sigma^2 + r)/2$, меньшей, чем $\sigma^2/2$, которая получилась бы при независимых реализациях Y и Y' . Следовательно, можно повысить точность оценок, если добиться монотонной зависимости выхода от генерируемых в процессе моделирования случайных величин. В ряде систем обслуживания такая монотонность имеет место. Например, время ожидания возрастает с ростом времени обслуживания и убывает с ростом интервалов между заявками.

В общем случае для применения метода дополняющих переменных необходимо исследование монотонности. Этот метод представляет собой одну из разновидностей *метода зависимых испытаний*. В самом деле, его эффективность обуславливается статистической зависимостью величин Y и Y' . Другое применение метод зависимых испытаний находит при вычислении коэффициентов чувствительности модели относительно вариаций ее параметров, организации поиска экстремума и других ситуациях, когда требуется сравнивать значения некоторого показателя при различных значениях исходных параметров. Так, предположим, что при одном значении исходных параметров искомым показателем является случайной величиной Y , а при другом Y' . Требуется оценить $E(Y' - Y)$. Поскольку дисперсия величины $Y' - Y$ равна $\sigma^2(Y' - Y) = \sigma^2(Y') + \sigma^2(Y) - 2r(Y', Y)$, где $r(Y', Y)$ — коэффициент ковариации величин Y' и Y , то для повышения точности оценки [т. е. для уменьшения дисперсии оценки $\sigma^2(Y' - Y)$] необходимо так организовать вычисление Y' и Y , чтобы они были положительно коррелированы. Обычно это достигается использованием одной и той же последовательности случайных (псевдослучайных) величин для формирования определяющих последовательностей при вычислениях Y' и Y соответственно. (При методе дополняющих переменных для такого формирования использовались дополняющие случайные величины.) Выигрыш в точности при этом может достигать нескольких порядков.

Одной из форм применения классических результатов математической статистики к обработке результатов моделирования может служить так называемый *регенеративный метод*. Этот метод используется, когда моделируются системы, описываемые регенерирующими процессами. В этом случае весь процесс разбивается на независимые одинаково распределенные «циклы», и это обуславливает применимость классических методов оценки стационарных характеристик. Эти же методы используются для нахождения времени моделирования при заданной точности оценок.

Здесь остановимся еще на одном аспекте, представляющем особый интерес для вопросов надежности¹. Как известно, смысл многих мероприятий, рассматриваемых в теории надежности (восстановления, резервирования, замен, профилактик и т. п.), заключается в повышении надежности изучаемых ими проектируемых систем, т. е. уменьшении вероятности их отказа. Если применять моделирование для анализа подобных систем, то непосредственная оценка указанных вероятностей p невозможна, поскольку число реализаций, требуемое для подобных оценок, имеет слишком большой порядок $(\varepsilon^2 p)^{-1}$, где ε — относительная погрешность оценки. Опишем вкратце идею двух методов, пригодных для оценивания в этой ситуации.

1. Метод взвешенных испытаний. Пусть вновь $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots)$ — случайные величины, определяющие динамику процесса. Предположим для простоты, что имеется конечное число N этих величин (отметим, что в действительности число этих величин всегда конечно). Пусть $w(x)$ — плотность случайного вектора Θ . Случай, когда Θ имеет дискретное распределение, рассматривается аналогично. Если задана конкретная реализация вектора Θ , то по ней определяется, происходит ли требуемое событие, вероятность p которого оценивается. Будем считать, что $p = P(\Theta \in B)$. Тогда

$$p = \int_B w(x) dx = \int \delta_B(x) w(x) dx,$$

где $\delta_B(x)$ — характеристическая функция (индикатор) множества B , т. е. $\delta_B(x) = 0$, если $x \notin B$, и $\delta_B(x) = 1$ при $x \in B$. Если брать независимые реализации $x_1, x_2, \dots, x_k$ вектора Θ и строить несмещенную оценку

$$\hat{p} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \delta_B(x_j),$$

то ее дисперсия равна $(1-p)/kp$ и неограниченно возрастает с уменьшением p . Это и означает, что малую вероятность точно оценить невозможно. Причина — практическая нереализуемость события $\{\Theta \in B\}$. Выберем теперь случайный вектор ξ с плотностью $v(x)$. Очевидно [при необходимых оговорках относительно обращения в нуль функции $v(x)$],

$$p = \int \delta_B(x) \frac{w(x)}{v(x)} v(x) dx = \int g(x) v(x) dx = Eg(\xi).$$

Таким образом, величина $\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k g(y_j)$ (y_j представляют собой независимые реализации случайного вектора ξ) также является несмещенной оценкой вероятности p . Однако если величина $\int_B v(x) dx$ не является малой, то событие $\{\xi \in B\}$ не является редким, и трудности, связанные с получением оценки в предыдущем случае, отпадают. В обмен, правда, должны быть известны плотности $w(x)$ и $v(x)$, но, как правило, их вычисление в точках y_j не составляет труда и получается на основе знания плотностей отдельных (обычно независимых) членов определяющей последовательности. Оптимальным выбором является

$$v(x) = \begin{cases} w(x)/p & \text{при } x \in B, \\ 0 & \text{при } x \notin B, \end{cases}$$

¹ Подробно эти вопросы рассматриваются в гл. 12.

однако нахождение его требует, в частности, знания p , да и в явном виде B также трудно получить. Поэтому довольствуются рациональным выбором $v(x)$.

2. Метод малого параметра. Если метод взвешенных испытаний использовал минимальную информацию о математической модели, то метод малого параметра рассчитан на модели специального вида — кусочно-линейные процессы, описывающие весьма широкий класс систем, изучаемых в теориях надежности и массового обслуживания.

Суть метода заключается в получении аналитическим путем зависимостей искомых вероятностей от исходных параметров. Эти зависимости представляются в виде асимптотических разложений по степеням некоторого «малого» параметра, например интенсивности отказов одного элемента. Коэффициентам разложения придается вероятностный смысл — как правило, это среднее значение некоторого функционала от процесса функционирования системы. Таким образом, задача сводится к оценке на модели указанных функционалов. Поскольку эти функционалы от «малых» параметров не зависят, их оценка не требует чрезмерных затрат времени (по сравнению с оценками, получаемыми с помощью непосредственного моделирования, экономия времени составляет десятки и сотни раз в зависимости от условий задачи). Здесь эффективность достигается за счет использования аналитических результатов и организации на их основе так называемых *направленных имитационных экспериментов* по оценке показателей, отличных от искомой величины, но связанных с ней (вид связи определяется аналитически).

11.6. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

Приведенный краткий обзор показывает, что в настоящее время развиты или развиваются методы, позволяющие решать задачи моделирования на всех трех упомянутых выше этапах (построение формальной модели, организация программного обеспечения, организация имитационных экспериментов). Вместе с тем нужно констатировать, что указанные методы развивались несистемно. Например, существующие программные средства далеко не всегда ориентированы на решение первостепенных задач моделирования (анализ адекватности, чувствительности, направленное изменение моделей и т. п.). Точно также статистические процедуры часто не имеют удовлетворительного обоснования, и потому неизвестны не только их точность, но и границы и сферы применимости. В связи с этим в последние годы значительное внимание стали уделять методологии моделирования для выработки общих требований к применяемым методам и средствам.

Эти методологические разработки содержат требования к архитектуре и структуре имитационных систем, совокупность эвристических принципов и правил работы с моделями, методы организации имитационных экспериментов.

Неопределенность границ применимости многих статистических методов (в том числе рассматривавшихся выше) связана прежде всего с тем, что модель для этих методов представляет собой «черный ящик». Допущения, например, о монотонности (в методе дополняющих переменных), положительности корреляции (в методе зависимых испытаний) носят, как правило, декларативный характер, и действенность методов проверяется фактически в процессе их реализации.

Возможный выход из этой ситуации предлагает *агрегативный подход*, разработанный Н. П. Бусленко. В нем основу модели составляет некоторая общая математическая схема (агрегативная система), сохраняющая основные особенности дискретной модели, описанной выше и являющейся моделью широкого класса реальных систем, в том числе систем, исследуемых в рамках теории надежности. Программная поддержка процесса моделирования строится в расчете на агрегативную систему. Поскольку математическая модель при этом «открыта» для исследователя, появляется возможность использования строго обоснованных математических методов для исследования структурных и динамических свойств систем.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫСОКОНАДЕЖНЫХ СИСТЕМ

12.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

К настоящему времени разработано много методов определения характеристик систем, состоящих из высоконадежных элементов. Однако часто ввиду сложной структуры исследуемой системы аналитические, и в частности асимптотические, методы, оказываются неприменимыми. В этих случаях используется наиболее универсальный метод определения характеристик сложных систем — метод статистических испытаний. Однако при исследовании высоконадежных систем данный метод имеет существенный недостаток — большую трудоемкость. Предположим, что требуется оценить вероятность p некоторого редкого события, связанного с траекторией системы в промежутке $[0, T]$ (например, p — вероятность отказа системы в $[0, T]$). Для наиболее важных в практическом отношении высокоответственных систем, надежность которых очень велика, p может принимать значения порядка 10^{-4} — 10^{-6} и ниже. Для того чтобы получить оценку для p с относительной погрешностью δ и достоверностью β , требуется число испытаний N , которое при малых $p > 0$ имеет вид

$$N \approx z^2 / (p\delta^2),$$

где z — корень уравнения

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^z \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx = \beta.$$

Следовательно, для нахождения p с заданной точностью понадобится огромное число реализаций поведения системы в интервале $[0, T]$, что может потребовать десятки часов машинного времени. Поэтому для высоконадежных систем метод непосредственного моделирования неприемлем. В этом случае, наиболее эффективными являются методы ускоренного моделирования, и в частности аналитико-статистический метод.

12.2. СУЩНОСТЬ МЕТОДА УСКОРЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Разъясним метод на примерах.

1. Рассматривается резервированная система, состоящая из одного основного и $r - 1$ резервных элементов. Система отказывает в момент ξ , когда впервые оказывается r неисправных элементов. Все элементы восстанавливаются одним оператором: время восстановления — случайная величина η с функцией распределения $H(x)$. Нарботка до отказа основного элемента — случайная величина с экспоненциальным распределением с параметром λ . Требуется оценить $P(t)$ — вероятность безотказной работы системы в течение времени t при условии абсолютной исправности в момент $t_0 = 0$. Рассматривается случай «быстрого восстановления»: за время восстановления резервного элемента основной элемент может отказаться лишь с малой вероятностью. Для исследования подобных систем давно используется метод регенерирующих процессов. Именно весь процесс проходит через моменты восстановления $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$, где t_n — n -й в порядке возрастания момент, когда система выходит из абсолютно исправного состояния, т. е. отказывает некоторый элемент. Известно, что в таком случае

$$P(t) \approx e^{-\lambda p_0 t}, \quad (12.1)$$

где p_0 — вероятность отказа в интервале восстановления, т. е. между t_n и t_{n+1}

Таким образом, для оценки надежности достаточного оценить параметр p_0 . Можно показать, что $p_0 \approx p'_0$, где p'_0 — вероятность отказа $r - 1$ элементов за время восстановления одного резервного элемента. Вероятность p'_0 определяется как

$$p'_0 = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \sum_{k=r-1}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} dH(x) \approx \frac{\lambda^{r-1}}{(r-1)!} \int_0^{\infty} x^{r-1} dH(x) = \frac{\lambda^{r-1}}{(r-1)!} M\eta^{r-1}.$$

Таким образом, в конечном счете все сводится к оценке $M\eta^{r-1}$, которая выполняется простым усреднением по множеству независимых реализаций случайной величины η^{r-1} .

2. Пусть, в отличие от примера 1, имеются два оператора, которые могут восстанавливать элементы отдельно. В этом случае формула (12.1) сохраняется; для p_0 имеет место следующее приближенное выражение:

$$p_0 \approx p''_0 = \lambda^{r-1} \int_0^{\infty} x^{r-1} f(x) dH(x),$$

где $f(x)$ — вероятность события A_x , состоящего в следующем. На отрезок $[0, x]$ по равномерному закону бросается $r - 1$ точек. Пусть $t_1 < \dots < t_{r-1}$ — координаты этих точек, расположенные в порядке возрастания. Тогда A_x состоит в том, что $t_{r-1} - t_1 < \eta_1$, где η_1 — случайная величина с функцией распределения $H(y)$.

Таким образом, алгоритм оценки p_0 методом статистических испытаний состоит в следующем. Реализуем независимые случайные величины $\eta, \eta_1, \gamma_1, \dots, \gamma_{r-1}$. две первые из которых имеют функцию распределения $H(x)$, а остальные равномерно распределены в интервале $(0, 1)$. Находим $t_1, \dots, t_{r-1}$ как упорядоченные в порядке возрастания величины $\eta\gamma_1, \dots, \eta\gamma_{r-1}$. Полагаем $\Delta = 1$, если $t_{r-1} - t_1 < \eta_1$, $\Delta = 0$ в противном случае. Наконец, полагаем $\xi = \lambda^{r-1} \eta^{r-1} \Delta$. Тогда $p''_0 = M\xi$. Следовательно, p''_0 (а вместе с ним и p_0) можно оценить, усредняя результаты независимых реализаций случайной величины ξ .

3. Поведение конечного вероятностного автомата описывается цепью Маркова $\{v_n, n \geq 0\}$ с матрицей перехода $P = P_0 + \varepsilon (P_1 - P_2)$, где P_0, P_1, P_2 — заданные матрицы с неотрицательными элементами, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Вектор начальных вероятностей есть $x = x_0 + \varepsilon (x_1 - x_2)$, где x_0, x_1, x_2 — векторы с неотрицательными элементами. Если $v_n = i, v_{n+1} = j$, то, если (i, j) -й элемент матрицы P_0 положителен, переход $i \rightarrow j$ назовем высоковероятным; если данный элемент равен нулю, но соответствующий элемент P_1 положителен, назовем переход $i \rightarrow j$ маловероятным (порядка ε). Начальное состояние $v_0 = i$ назовем высоковероятным, если i -я компонента вектора x_0 положительна, и маловероятным (порядка ε), если i -я компонента вектора x_0 равна нулю, а i -я компонента вектора x_1 положительна. Определим $r_0(v_0) = 0$, если v_0 высоковероятное, и $r_0(v_0) = 1$, если v_0 маловероятное состояние. Подобным же образом положим $r(i, j) = 0$ или $r(i, j) = 1$ для высоковероятного и соответственно маловероятного переходов $i \rightarrow j$. Наконец, положим $r_n = r_0(v_0) + r(v_0, v_1) + \dots + r(v_{n-1}, v_n)$. Назовем число $r(j)$ рангом состояния j , если существует цепочка состояний $i_0, \dots, i_n = j$ ($n \geq 0$), для которой $r_n = r_0(i_0) + r(i_0, i_1) + \dots + r(i_{n-1}, i_n) = r(j)$, и не существует подобной цепочки, для которой было бы $r_n < r(j)$. Ставится задача оценки $p^{(n)}(j) = P(v_n = j)$ для тех j , для которых $r(j) = m$.

Пусть $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ — случайная выборка, вероятности частных значений которой равны $1/C_{n+1}^m$. Если эта выборка фиксирована, реализуем неоднородную цепь Маркова $\tilde{v}_k, 0 \leq k \leq n$, закон поведения которой определяется следующим образом. Если $i_1 > 0$, то $\tilde{v}_0$ выбирается в соответствии с распределением x_0 . Если $i_1 = 0$, то v_0 может принимать лишь те значения i , для которых i -я компонента вектора x_1 положительна; вероятности различных значений i пропорциональны соответствующим компонентам x_1 . Пусть $v_{k-1} = l$. Если k совпа-

дает с некоторыми из чисел $i_1, \dots, i_m$, распределение v_k определяется l -й строкой матрицы $P_1/c(l)$, где постоянная $c(l)$ выбирается из условия равенства единице суммы всех элементов этой строки. Если k не пересекается с множеством $\{i_1, \dots, i_m\}$ в тех же условиях, распределение v_k определяется l -й строкой матрицы P_0 .

Пусть A — любое подмножество тех j , для которых $r(j) = m$. Положим: $\Delta = 1$ при $\tilde{v}_n \in A$, $\Delta = 0$, в противном случае $\xi = C_{n+1}^m \Delta \beta_1 \dots \beta_m$, где $\beta_k = c(v_{i_{k-1}})$ при $k \geq 2$ или $i_1 \geq 1$, β_1 равна сумме компонент вектора x_i при $i_1 = 0$. Тогда

$$P(v_n \in A) \approx M\xi.$$

Таким образом, и в данном случае найдена случайная величина, путем усреднения реализаций которой оценивается распределение вероятностей случайной величины v_n .

Заметим, что во всех примерах имеет место одно и то же свойство построенной статистической оценки: среднеквадратическое отклонение относительной погрешности оценки остается ограниченным при $\varepsilon \rightarrow 0$. В то же время относительная погрешность оценки, получаемой при непосредственном моделировании, неограниченно возрастает при $\varepsilon \rightarrow 0$.

12.3. МЕТОД «ВЗВЕШЕННОГО» МОДЕЛИРОВАНИЯ

Одним из способов ускорения моделирования является метод «взвешенного» моделирования, суть которого состоит в следующем. Пусть ξ и η — одномерные или многомерные случайные величины с плотностями $p(x)$ и $q(x)$, причем $q(x)$ не обращается в нуль в тех точках, где $p(x) > 0$. Предположим, что требуется вычислить $M\varphi(\xi)$, причем в силу тех или иных причин вычисление непосредственным моделированием нежелательно (например, когда $\varphi(\cdot)$ — индикатор события $\{\xi > T\}$, а $M\xi$ — мало). Тогда

$$M\varphi(\xi) = \int [\varphi(x)p(x)/q(x)]q(x)dx = M\{\varphi(\eta)p(\eta)/q(\eta)\}.$$

Таким образом, для вычисления $M\varphi(\xi)$ можно вместо ξ использовать случайную величину η . Пусть $\eta_1, \dots, \eta_n$ — независимые реализации этой величины. Тогда несмещенной оценкой $M\varphi(\xi)$ является

$$\widehat{\varphi}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(\eta_k) p(\eta_k)/q(\eta_k),$$

причем $D\widehat{\varphi}_n = \sigma^2/n$, где

$$\sigma^2 = D\{\varphi(\eta)p(\eta)/q(\eta)\} \leq \int \varphi^2(x)p^2(x)/q(x)dx = F[q].$$

Далее выберем $q(x)$ так, чтобы функционал $F[q]$ принял минимальное значение:

$$q(x) = \varphi(x)p(x)/\int \varphi(t)p(t)dt; \quad F[q] = [\int \varphi(x)p(x)dx]^2.$$

В практике моделирования случайных процессов, описывающих поведение сложных систем, получили применение различные конкретизации метода взвешенного моделирования, учитывающие специфику того или иного класса задач.

Одним из методов, хорошо зарекомендовавшим себя при решении конкретных задач теории массового обслуживания и надежности, является аналитико-статистический метод, основанный на сочетании аналитических и статистических методов. А именно, среди исходных характеристик системы выделяется та, которую можно выбрать в качестве малого параметра ε . Затем, используя различные аналитические методы, искомая характеристика системы представляется в виде ряда по степеням ε , причем коэффициенты этого ряда интерпретируются как математические ожидания функционалов от некоторых вспомогательных случайных

процессы и могут быть найдены с помощью метода статистических испытаний. С практической точки зрения зачастую достаточно построить статистическую оценку для коэффициента при главном члене ряда по ϵ , оценив остаток данного ряда.

12.4. АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕПОСРЕДСТВЕННО НА МОДЕЛИ СИСТЕМЫ

В настоящем разделе указан один из способов реализации аналитико-статистического метода непосредственно на модели системы. Предположим, что исследуемая система описывается непрерывным справа марковским процессом вида

$$z(t) = [z_1(t), \dots, z_m(t)], t \geq 0.$$

Процесс $z_i(t)$ ($1 \leq i \leq m$) принимает значения в измеримом пространстве $(Z_i, \mathfrak{Z}_i)$, а $z(t)$ — в $(Z, \mathfrak{Z})$, где $Z = Z_1 \times \dots \times Z_m$; $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 \times \dots \times \mathfrak{Z}_m$; « $\times$ » обозначает декартово произведение. Распределение процесса $z(t)$ в начальный момент считается заданным:

$$P_0(A) = P(z(0) \in A), A \in \mathfrak{Z}.$$

Пусть заданы также следующие характеристики:

$$P_j(t, x, t+v, A) = P(z_j(t+v) \in A | z(t) = x);$$

$$P_j^0(t, x, t+v, A) = P(z_j^0(t+v) \in A | z^0(t) = x),$$

$$A \in \mathfrak{Z}_j, x \in Z, j = 1, \dots, m, t \geq 0, v \geq 0,$$

где $z^0(t)$, $t \geq 0$ — марковский процесс того же вида, что и $z(t)$;

$\lambda_j(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in Z$, $j = 1, \dots, m$, — марковская функция, измеримая по t и x ; $Q_j(t, x, A)$, $t \geq 0$, $x \in Z$, $A \in \mathfrak{Z}_j$, $j = 1, \dots, m$, — вероятностная мера, зависящая от параметров t, x, j .

Предположим, что введенные величины удовлетворяют для любых $t \geq 0$, $x \in Z$, $A \in \mathfrak{Z}_j$, $j = 1, \dots, m$, соотношению

$$P_j(t, x, t + \Delta t, A) = [1 - \lambda_j(t, x)\Delta t]P_j^0(t, x, t + \Delta t, A) + \lambda_j(t, x) \times \\ \times \Delta t Q_j(t, x, A) + o(\Delta t). \quad (12.2)$$

Введенные характеристики и соотношение (12.2) можно интерпретировать следующим образом. Исследуемая система состоит из m элементов. Процесс $z_j^0(t)$ определяет режим, в котором используется j -й элемент в момент t , а $\lambda_j(t, x)$ — интенсивность отказа этого элемента при $\xi_j(t) = x$. Тогда $\lambda_j(t, z_j^0(t))dt$ — вероятность отказа j -го элемента в интервале $(t, t + dt)$ при условии, что используется режим $z_j^0(t)$. Если в момент t произошел отказ j -го элемента, то режим его использования в момент $t + 0$ пересчитывается согласно распределению $Q_j(t, x, A)$. Отметим, что описанная модель позволяет учитывать распределения, отличные от экспоненциального. Действительно, пусть $F_j(x)$ — произвольная непрерывная функция распределения, $F_j(+0) = 0$, которую интерпретируем как функцию распределения времени работы j -го элемента. Если этот элемент включен в работу в момент t_0 , то его отказ наступит в момент s , определяемый из уравнения

$$\int_{t_0}^s \lambda_j(t, z_j^0(t)) dt = \eta_j,$$

где η_j — случайная величина с функцией распределения $F_j(x)$.

В дальнейшем событие с интенсивностью $\lambda_j(t, z^0(t))$ назовем отказом j -го элемента.

Предположим, что рассматриваемая система, описываемая процессом $z(t)$, исследуется в промежутке $[0, T]$ и требуется вычислить характеристику вида

$$a = M\xi_{I_r}, r \geq 1,$$

где $\xi = \varphi(z(\cdot))$ — функционал от траекторий системы в $[0, T]$, а I_r — индикатор события $\{v = r\}$, где v — число отказов элементов системы в $[0, T]$. Предположим далее, что отказы элементов в $[0, T]$ достаточно редки в том смысле, что

$$\Delta_j[z^0] = \int_0^T \lambda_j(t, z^0(t|x)) dt, \quad 1 \leq j \leq m$$

— равномерно малая величина относительно реализаций $z^0(t)$, $0 \leq t \leq T$, и начального состояния x . Здесь $z^0(t|x)$ обозначает марковский процесс $z^0(t)$ с начальным состоянием x .

Алгоритм вычисления a в одной реализации выглядит следующим образом.

Положим $T_0 = 0$. Строим реализацию $z^{[0]}(t)$ процесса $z^0(t)$ в промежутке $[T_0, T]$ и вычисляем:

$$\sigma_i^{[0]} = \int_{T_0}^T \lambda_j(t, z^{[0]}(t)) dt, \quad 1 \leq j \leq m;$$

$$\sigma^{[0]} = \sigma_1^{[0]} + \dots + \sigma_m^{[0]}.$$

Номер i_1 элемента, который отказал первым, выбираем согласно распределению $P(i_1 = j) = \sigma_j^{[0]} / \sigma^{[0]}$, $1 \leq j \leq m$. Момент T_1 отказа i_1 -го элемента имеет плотность распределения

$$p_1(t) = \frac{1}{\sigma_{i_1}^{[0]}} \lambda_{i_1}(t, z^{[0]}(t)), \quad t \in [T_0, T].$$

Если величины i_1 и T_1 известны, то состояние i -го элемента преобразуется согласно распределению $Q_{i_1}(T_1, z^{[0]}(T_1 - 0), A)$. Итак, момент первого отказа построен. Предположим теперь, что построен момент T_n n -го отказа ($n < r$) и известно состояние системы в момент $T_n + 0$. Тогда момент T_{n+1} ($n+1$)-го отказа получается следующим образом. Строим реализацию $z^{[n]}(t)$ процесса $z^0(t)$ в промежутке $[T_n, T]$ и вычисляем:

$$\sigma_j^{[n]} = \int_{T_n}^T \lambda_j(t, z^{[n]}(t)) dt, \quad 1 \leq j \leq m;$$

$$\sigma^{[n]} = \sigma_1^{[n]} + \dots + \sigma_m^{[n]}.$$

Номер i_{n+1} элемента, который отказал ($n+1$)-м по счету в $[0, T]$, выбираем согласно распределению $P(i_{n+1} = j) = \sigma_j^{[n]} / \sigma^{[n]}$, $1 \leq j \leq m$. Момент T_{n+1} отказа этого элемента имеет плотность распределения

$$p_{n+1}(t) = \frac{1}{\sigma_{i_{n+1}}^{[n]}} \lambda_{i_{n+1}}(t, z^{[n]}(t)), \quad t \in [T_n, T].$$

Затем в момент T_{n+1} снова пересчитываем состояние i_{n+1} -го элемента.

Описанную процедуру продолжаем до тех пор, пока не будет построено r моментов отказов элементов, после чего строим последнюю реализацию $z^{[r]}(t)$ процесса $z^0(t)$ в промежутке $[T_r, T]$. Положим $z(t) = z^{[r]}(t)$. Если $T_n \leq t < T_{n+1}$, $n = 1, \dots, r$, $T_{r+1} = T$ и $\hat{\xi}_1 = \varphi(z(\cdot))$.

Тогда в качестве оценки для a , полученной в одной реализации, выбираем

$$\hat{a}_1 = \sigma^{[0]} \sigma^{[1]} \dots \sigma^{[r-1]} \hat{\xi}_1.$$

Сделав достаточное число реализаций, можно построить оценку для a с заданными точностью и достоверностью¹.

¹ В Институте кибернетики им. В. М. Глушкова АН УССР разработана система моделирования АМОС, на основании которой создан пакет, предназначенный для статистического моделирования систем массового обслуживания и надежности.

Предположение о существовании вложенного процесса восстановления существенно облегчает анализ сложных систем. В теории массового обслуживания принято считать, что такой процесс существует лишь в том случае, когда основной марковский процесс, описывающий работу системы, является линейчатым. Более общий случай, когда одновременно функционируют многие элементы с «немарковским» характером отказов, исследовать сложнее, так как непосредственно не видна вложенная цепь Маркова. Для описания широкого класса систем используется марковский процесс вида

$$\underline{\zeta}(t) = (v(t); \xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_{|v(t)|}(t)), \quad t \geq 0.$$

Здесь $v(t)$ — дискретная компонента, характеризующая «качественное» состояние системы в момент t ; $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots$ — непрерывные величины, определяющие времена до окончания «операций», происходящих в системе в момент t ; $|v(t)|$ — число таких операций при состоянии системы $v(t)$ (под операцией можно понимать, например, восстановление или работу элемента системы, ожидание поступления нового требования, обслуживание требования и т. д.). Марковский процесс $\underline{\zeta}(t)$ называется существенно многомерным процессом теории массового обслуживания, если для любого $t \geq 0$

$$P(|v(t)| \geq 2) = 1.$$

Если исследуемая система описывается существенно многомерным процессом $\underline{\zeta}(t)$, то подход, получивший название метода «искусственных» моментов регенерации, позволяет во многих практически важных случаях искусственно ввести вложенную цепь Маркова. При определенных условиях с помощью специального приема можно построить новый непрерывный справа процесс $\zeta^*(t)$, стохастически эквивалентный процессу $\underline{\zeta}(t)$, и монотонно возрастающую последовательность моментов времени $\{t_n^*, n \geq 0\}$, обладающие следующими свойствами.

1. Распределение случайной величины $\zeta^*(t_n^*)$ не зависит от n .
2. Последовательность двумерных случайных величин $\{(\zeta^*(t_n^*), t_n^* - t_{n-1}^*), n \geq 1\}$ образует однородную цепь Маркова.
3. Пусть $A_n, n \geq 1$, обозначает некоторое событие, связанное с поведением процесса $\zeta^*(t)$ в интервале (t_{n-1}^*, t_n^*) . Тогда события A_n и A_{n+1} могут быть зависимы.

4. Вероятность события A_{n+1} однозначно определяется распределением случайной величины $\zeta^*(t_{n+1}^*)$.

5. Для любых $n \geq 1$ и $k \geq 2$ события A_n и A_{n+k} независимы.

Указанные свойства процесса $\zeta^*(t), t \geq 0$, позволяют доказывать теоремы эргодичности и устойчивости, а также предельные теоремы для широкого класса систем, описываемых существенно многомерными процессами теории массового обслуживания. Наиболее эффективно метод «искусственных» моментов регенерации может быть использован при анализе высоконадежных систем.

Одной из важнейших характеристик систем является вероятность $P(T)$ отказа в заданном промежутке времени $[0, T]$. Использование метода «искусственных» моментов регенерации позволило для ряда конкретных высоконадежных систем доказать асимптотическую экспоненциальность первого момента ζ отказа систем, т. е. справедливость для любого фиксированного $T > 0$ соотношения

$$P(T) = P(\zeta < T) \approx 1 - \exp\{-T/M\zeta\}. \quad (12.3)$$

Следовательно, этот метод может быть весьма успешно использован для получения «качественных» результатов (например, для обоснования экспоненциальности распределения ζ). Однако для практического использования соотношения (12.3) необходимо найти $M\zeta$. Если стационарные вероятности состояний исследуемой системы находятся в явном виде (например, если система описывается m незави-

симыми альтернирующими процессами (восстановления), то в ряде случаев $M\xi \approx a$, где a находится в явном виде. Однако явные формулы для стационарных вероятностей состояний системы могут быть получены лишь в довольно редких случаях.

12.6. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ ВЫСОКОНАДЕЖНЫХ СИСТЕМ

В последнее время разработан численный метод нахождения $P(T)$ для широкого класса высоконадежных систем, описываемых существенно многомерными процессами теории массового обслуживания. Основные «качественные» предположения, накладываемые на систему, состоят в следующем: 1) система является высоконадежной; 2) случайные величины, определяющие работу системы, имеют функции распределения общего вида $\{H_i(x), i \in N\}$, где N — некоторое подмножество натуральных чисел; данные функции удовлетворяют условиям: а) $H_i(+0) = 0$; $i \in N$; б) существуют плотности $h_i(x) = H'_i(x)$, $x \geq 0$, $i \in N$; в) для любого $\omega \in (0, 1)$ и любого $i \in N$ существует алгоритм нахождения решения уравнения $\omega = H_i(x)$. При исследовании конкретных систем условия пункта 2) можно несколько «ослабить».

Использование этого метода для определения вероятности безотказной работы высоконадежных систем рассмотрим на примере резервированной системы с восстановлением.

Резервированная система состоит из m элементов и n ремонтных устройств ($1 \leq n < m$). Функционирование системы начинается в момент $t = 0$, в который все ее элементы исправны. Длительность безотказной работы i -го элемента ($1 \leq i \leq m$) имеет функцию распределения $F_i(x)$. Пусть $v(t)$ — число неисправных элементов в момент t . Если в момент t отказал i -й элемент ($1 \leq i \leq m$) и $v(t-0) < n$, то немедленно начинается его восстановление с функцией распределения $G_i(x)$. Если же $v(t-0) \geq n$, то элемент становится в очередь. Восстановление отказавших элементов проводится в порядке выхода их из строя. Первый момент отказа системы определим следующим образом:

$$\xi = \inf \{t \geq 0: v(t) \geq r\},$$

где $n+1 \leq r \leq m$. Требуется найти вероятность отказа системы в промежутке $[0, T]$, т. е. нужно определить $P(T) = P(\xi \leq T)$.

Предположим, что предварительное изучение системы позволяет сделать вывод о ее высокой надежности в $[0, T]$. Пусть, кроме того, функции $F_i(x)$ и $G_i(x)$, $1 \leq i \leq m$, являются абсолютно непрерывными с плотностями $f_i(x)$, $g_i(x)$:

$$F_i(x) = \int_0^x f_i(u) du; G_i(x) = \int_0^x g_i(u) du.$$

Эти функции распределения могут быть представлены в виде:

$$F_i(x) = 1 - \exp \left\{ - \int_0^x \alpha_i(u) du \right\};$$

$$G_i(x) = 1 - \exp \left\{ - \int_0^x \beta_i(u) du \right\}, i = 1, \dots, m,$$

где

$$\alpha_i(x) = \frac{f_i(x)}{1 - F_i(x)}, x \geq 0; F_i(x) < 1; \beta_i(x) = \frac{g_i(x)}{1 - G_i(x)}, x \geq 0; G_i(x) < 1.$$

Функционирование системы можно описать следующим эквивалентным образом. Для этого введем величины:

$$\gamma_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{если в момент } t \text{ } i\text{-й элемент исправен,} \\ -1, & \text{если в момент } t \text{ } i\text{-й элемент находится на восстановлении,} \\ k, & \text{если в момент } t \text{ } i\text{-й элемент находится } k\text{-м по счету в очереди на восстановление, } k=1, \dots, n-m; \end{cases}$$

$$\gamma_i(t) = \begin{cases} \sup \{x \in [0, t] : v_i(t-x) = 0\}, & \text{если } v_i(t) = 0, \\ \sup \{x \in [0, t] : v_i(t-x) = -1\}, & \text{если } v_i(t) = -1, \\ 0, & \text{если } v_i(t) \geq 1. \end{cases}$$

Случайный процесс

$$Z(t) = (v_1(t), \dots, v_m(t), \gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t))$$

является марковским. Чтобы промоделировать поведение системы в промежутке $[0, T]$, необходимо с помощью величин $\{v_i(t)\}$ и $\{\gamma_i(t)\}$ построить последовательность моментов выхода элементов из строя и окончания их восстановления. Данная последовательность строится следующим образом. Положим

$$t_0 = 0; \gamma_i(t_0 + 0) = 0; v_i(t_0 + 0) = 0, i = 1, \dots, m, v(t_0 + 0) = 0.$$

Предположим, что момент t_n построен и известны величины $\gamma_i(t_n + 0)$, $v_i(t_n + 0)$, $1 \leq i \leq m$, $v(t_n + 0)$. Реализуем теперь случайные величины $\delta_i (i : v_i(t_n + 0) \leq 0)$ с функциями распределения вида:

$$\Gamma_i(x) = \begin{cases} 1 - \exp \left\{ - \int_0^x \alpha_i(u + \gamma_i(t_n + 0)) du \right\}, & \text{если } v_i(t_n + 0) = 0, \\ 1 - \exp \left\{ - \int_0^x \beta_i(u + \gamma_i(t_n + 0)) du \right\}, & \text{если } v_i(t_n + 0) = -1 \end{cases}$$

и находим:

$$\kappa_0 = \min_{i: v_i(t_n + 0) = 0} \delta_i; \kappa_1 = \min_{i: v_i(t_n + 0) = -1} \delta_i,$$

а также i_0 и i_1 , такие, что

$$\delta_{i_0} = \kappa_0; \delta_{i_1} = \kappa_1.$$

Положим $t_{n+1} = t_n + \min(\kappa_0, \kappa_1)$.

Если $\kappa_0 < \kappa_1$, то i_0 -й элемент отказал в момент t_{n+1} , и в этом случае:

$$v(t_{n+1} + 0) = v(t_n + 0) + 1; v_i(t_{n+1} + 0) = v_i(t_n + 0), i \neq i_0;$$

$$v_{i_0}(t_{n+1} + 0) = \begin{cases} -1, & \text{если } v(t_{n+1} + 0) \leq n, \\ v(t_n + 0) - n, & \text{если } v(t_{n+1} + 0) > n; \end{cases}$$

$$\gamma_{i_0}(t_{n+1} + 0) = 0;$$

$$\gamma_i(t_{n+1} + 0) = \begin{cases} \gamma_i(t_n + 0) + \kappa_0, & \text{если } i \neq i_0 \text{ и } v_i(t_n + 0) \leq 0, \\ 0, & \text{если } v_i(t_n + 0) > 0, i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Если же $\kappa_0 > \kappa_1$, то восстановление i_1 -го элемента окончилось в момент t_{n+1} , и в этом случае:

$$\begin{aligned} v(t_{n+1} + 0) &= v(t_n + 0) - 1; \quad v_{i_1}(t_{n+1} + 0) = 0; \\ v_i(t_{n+1} + 0) &= \begin{cases} v_i(t_n + 0), & \text{если } v_i(t_n + 0) \leq 0, i \neq i_1, \\ -1, & \text{если } v_i(t_n + 0) = 1, \\ v_i(t_n + 0) - 1, & \text{если } v_i(t_n + 0) \geq 2; \end{cases} \\ v_{i_1}(t_{n+1} + 0) &= 0; \\ v_i(t_{n+1} + 0) &= \begin{cases} v_i(t_n + 0) + \kappa_1, & \text{если } i \neq i_1 \text{ и } v_i(t_n + 0) \leq 0, \\ 0, & \text{если } v_i(t_n + 0) > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Приведенный алгоритм определяет последовательность $\{t_n, n \geq 0\}$, строящуюся до первого момента $t_n \geq T$. В дальнейшем предполагается, что поведение системы моделируется согласно этому алгоритму. Введем случайные процессы вида

$$\lambda_i(t) = \begin{cases} \alpha_i(v_i(t)), & \text{если } v_i(t) = 0, \\ \beta_i(v_i(t)), & \text{если } v_i(t) = -1, 1 \leq i \leq m, t \geq 0. \end{cases}$$

Здесь $\lambda_i(t)$ — интенсивность отказа ($v_i(t) = 0$) или восстановления ($v_i(t) = -1$) i -го элемента в момент t . Пусть z — некоторое натуральное число, $0 \leq z \leq r - 1$. Интенсивности $\{\lambda_i(t)\}$ при $v(t) \leq z$ представим в виде

$$\lambda_i(t) = \lambda_i^0(t) + \lambda_i^1(t), \quad i = 1, \dots, m, t \geq 0,$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_i^0(t) &= \begin{cases} \lambda_i(t), & \text{если } v(t) = z, v_i(t) = 0, \\ 0, & \text{противном случае;} \end{cases} \\ \lambda_i^1(t) &= \begin{cases} \lambda_i(t), & \text{если } v(t) < z \text{ или } v(t) = z, v_i(t) = -1, \\ 0 & \text{противном случае.} \end{cases} \end{aligned}$$

Исходную систему, поведение которой определяют интенсивности $\{\lambda_i(t)\}$, обозначим S_1 . Наряду с этой системой рассмотрим систему с интенсивностями перехода $\{\lambda_i^1(t)\}$, которую обозначим $S_2(z)$. Ясно, что для системы $S_2(z)$ $v(t) \leq z$ с вероятностью 1 для любого $i \geq 0$. Если $z = r$, то до момента отказа поведение систем S_1 и $S_2(z)$ описывается одним и тем же марковским процессом $Z(t)$. Рассмотрим случайную величину

$$\Lambda(z) = \sum_{i=1}^m \int_0^T \lambda_i^0(t) dt,$$

являющуюся функционалом от траекторий системы $S_2(z)$. Величина $M\Lambda(z)$ является верхней оценкой вероятности того, что в интервале $[0, T]$ система S_1 хотя бы раз попадает в состояние $z + 1$ (состояние z — в системе неисправно z элементов). Можно предложить следующий алгоритм определения вероятности $P(T)$ отказа системы S_1 в интервале $[0, T]$.

1. Выбор уровня z^* . Натуральное число z^* должно удовлетворять двум основным условиям. Предположим, что в промежутке $[0, T]$ исследуется система $S_2(z^*)$. Обозначим событие

$$A(z^*) = \{\text{существует } t \in [0, T] \text{ такое, что } v(t) = z^*\}.$$

Тогда z^* должно удовлетворять условиям: а) $P(A(z^*)) \geq \delta_1$; б) $M\{\Lambda(z^*) | A(z^*)\} \leq \delta_2$, где δ_1 и δ_2 — некоторые положительные числа, характеризующие частоту попадания системы $S_2(z^*)$ на уровень z^* и вероятность того, что система S_1 в интервале $[0, T]$ хотя бы раз перейдет из состояния z^* в $z^* + 1$. Например,

в качестве δ_1 и δ_2 можно выбрать $\delta_1 = \delta_2 = 0,1$. При исследовании реальных систем выбор уровня z^* , как правило, не представляет трудностей.

2. Нахождение оценки вероятности $P(T)$ в одной реализации. Пусть уровень z^* выбран. Про моделируем поведение системы $S_2(z^*)$ в промежутке $[0, T]$. Если событие $A(z^*)$ не произошло, т. е. $v(t) < z^*$ для любого $t \in [0, T]$, то $\Lambda(z^*) = 0$ и в качестве оценки вероятности $P(T)$ отказа системы S_1 в одной реализации получим $\hat{p} = 0$.

Предположим, что $\Lambda(z^*) > 0$ и в процессе моделирования поведения системы $S_2(z^*)$ в $[0, T]$ получены следующие величины:

K — число интервалов времени из $[0, T]$, в течение которых в системе $S_2(z^*)$ было неисправно z^* элементов;

$W(k)$, $k = 1, \dots, K$ — длительность k -го интервала;

$t(k)$, $k = 1, \dots, K$ — момент начала k -го интервала;

$\gamma(i, k) = \gamma_i(t(k) + 0)$; $\chi_i(k) = v_i(t(k) + 0)$, $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, K$.

Положим $v = z^*$, $T_1 = T$. Далее вычисляем

$$\Lambda(v) = \sum_{k=1}^K \Lambda_k(v), \quad (12.4)$$

где

$$\Lambda_k(v) = \sum_{i: \chi_i(k)=0} \int_{\gamma(i, k)}^{\gamma(i, k) + W(k)} \alpha_i(u) du. \quad (12.5)$$

Рассмотрим два случая.

1. $v < r - 1$. Отказ некоторого элемента, переводящий систему S_1 из состояния v в $v + 1$, может произойти только в одном из указанных интервалов. Номер k_0 интервала, в котором произойдет этот отказ, определяется так:

$$k_0 = k \text{ с вероятностью } \Lambda_k(v)/\Lambda(v).$$

Номер i_0 этого элемента и момент τ его отказа, отсчитываемый с момента $t(k_0)$, определяется следующим образом. Положим:

$$A_i(v) = \begin{cases} \int_{\gamma(i, k_0)}^{\gamma(i, k_0) + W(k_0)} \alpha_i(u) du, & \text{если } \chi_i(k_0) = 0, \\ 0 & \text{в противном случае, } i = 1, \dots, m; \end{cases}$$

$$A(v) = \sum_{i=1}^m A_i(v).$$

Тогда $i_0 = i_0$ с вероятностью $A_i(v)/A(v)$, и отказ i_0 -го элемента произойдет в момент $t(k_0) + \tau$, где

$$\tau = \omega - \gamma(i_0, k_0)$$

— случайная величина, распределенная в $[\gamma(i_0, k_0), \gamma(i_0, k_0) + W(k_0)]$ с плотностью

$$\alpha_{i_0}(u)/A_{i_0}(v).$$

Если $v \geq N$, то положим $\chi_{i_0}(k_0) = v + 1 - N$. В противном случае $\chi_{i_0}(k_0) = -1$. Далее в качестве новых значений v и T_1 выбираем $v + 1$ и $T_1 - t(k_0) - \tau$. Затем в интервале $[0, T_1]$ моделируем поведение системы $S_2(v)$, начальное состояние которой определяется величинами:

$$v(+0) = v; \gamma_i(+0) = \gamma(i, k_0) + \tau, i \neq i_0; v_i(+0) = \chi_i(k_0), i = 1, \dots, m;$$

$$\gamma_{i_0}(+0) = 0.$$

При этом вычисляют новые значения для K (число интервалов времени из $[0, T]$, в течение которых в системе $S_2(v)$ было неисправно v элементов), а также соответствующие величины $\{W(k), t(k), \chi_i(k), \gamma(i, k), i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, K\}$. Затем находят величины $\Lambda(v)$ и $\Lambda_k(v)$, $k = 1, \dots, K$, вида (12.4), (12.5) и переходят к сравнению v с $r - 1$.

2. $v = r - 1$. Тогда оценка для $P(T)$ в одной реализации

$$\hat{p}_1 = \Lambda(z^*)\Lambda(z^* + 1) \dots \Lambda(r - 1).$$

Число реализаций N , необходимых для построения оценки вероятности $P(T)$ с заданной точностью δ и достоверностью β , определяется следующим образом:

$$N = \min \{n \geq 2 : n > x^2(\beta)D(n)/\delta^2\},$$

где $D(n)$, $n \geq 2$ — выборочная дисперсия:

$$D(n) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \hat{p}_i^2 - \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^n \hat{p}_i \right)^2;$$

$\hat{p}_i$ — оценка вероятности $P(T)$, полученная в i -й реализации, а $x(\beta)$ — решение уравнения

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt = \beta,$$

определяемое из таблиц нормального распределения. При известном N получим оценку

$$\hat{P}(T) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{p}_i.$$

Для достаточно широкого класса систем применимы как метод «искусственных» моментов регенерации, так и численный метод. Поэтому для определения приближенного значения $P(T)$ при любом $T > 0$ вполне естественно использовать оба эти метода. А именно, для некоторого T_0 , применяя численный метод, находим $P(T_0)$. Затем из уравнения

$$1 - \exp\{-T_0/M\xi\} = P(T_0)$$

получаем $M\xi$ [при малых значениях $P(T_0)$ $M\xi \approx T_0/P(T_0)$]. При известном значении $M\xi$ вероятность $P(T)$ отказа системы в $[0, T]$ определяется согласно (12.3). Численные примеры, просчитанные на ЭВМ, подтверждают эффективность предложенного подхода.

Отметим, что численный метод может быть использован для определения надежности систем, для которых метод «искусственных» моментов регенерации неприменим и соотношение (12.3) не имеет места. В частности, он может быть использован при исследовании высоконадежных систем, имеющих в своем составе невосстанавливаемые элементы.

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НАДЕЖНОСТИ

Глава 13

ОПТИМАЛЬНОЕ РЕЗЕРВИРОВАНИЕ

13.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

При резервировании возникает задача не только обеспечить заданные показатели надежности, но и произвести это как можно более экономично, с наименьшими суммарными затратами на резервные элементы для системы в целом.

В качестве подобных затрат могут быть рассмотрены такие характеристики, как стоимость, масса или габаритные размеры. Выбор характеристики определяется конкретным видом системы и ее назначением. Обычно удается выделить одну наиболее важную характеристику, которую для краткости назовем «стоимостью» вне зависимости от ее физической сущности.

Рассматриваемые системы представляют собой последовательное соединение взаимонезависимых участков. Участком системы в данном случае будем называть такую ее часть, для резервирования которой могут быть использованы однотипные элементы. Таким образом, участок системы — это не обязательно конструктивно оформленная часть системы. Например, в задачах обеспечения системы запасными элементами к одному участку могут быть отнесены условно все однотипные элементы, если даже они конструктивно разнесены и схемно не связаны между собой.

На практике возникают также ситуации, в которых требуется максимизировать надежность при нескольких ограничениях или минимизировать затраты на избыточные элементы при задании совокупности требований к надежности отдельных подсистем.

В главе используются следующие обозначения:

a — параметр пуассоновского распределения;

c_i — стоимость одного элемента i -го участка системы;

c_{ij} — затраты j -го типа, связанные с одним элементом i -го участка системы;

C_0 — заданное (допустимое) значение стоимости резерва;

C_{j0} — заданное (допустимое) значение затрат j -го типа на резерв;

$C(x_1, \dots, x_m)$ — стоимость резерва в целом для системы при условии, что на i -м участке имеется x_i резервных элементов;

$C_j(x_1, \dots, x_m)$ — затраты j -го типа на резерв в целом для системы при условии, что на i -м участке имеется x_i резервных элементов;

$C_i(x_i)$ — стоимость резерва i -го участка при условии, что на нем имеется x_i резервных элементов;

$g_i(x_i)$ — относительное приращение показателя надежности i -го участка системы на единицу затрат;

R_0 — заданное значение показателя надежности R ;

$R(x_1, \dots, x_m)$ — показатель надежности (типа $P(t_0)$; $R(t_0)$ или K) системы при условии, что на i -м участке имеется x_i резервных элементов;

$R_i(x_i)$ — показатель надежности (типа $P(t_0)$, $R(t_0)$ или K) i -го участка системы при условии, что на нем имеется x_i резервных элементов;

$L_0 = -\log R_0$;

$L(x_1, \dots, x_m) = -\log R(x_1, \dots, x_m)$;

$L_i(x_i) = -\log R_i(x_i)$;

m — число участков системы;

n_i — начальное число элементов i -го участка (начальное число элементов i -го типа);

$P_i(t|x_i)$ — вероятность безотказной работы i -го участка системы за время t при условии, что на нем имеется x_i резервных элементов;

$p_k(a)$ — вероятность появления ровно k событий для пуассоновского распределения с параметром a ;

$P_k(a)$ — вероятность появления не менее k событий для пуассоновского распределения с параметром a ;

$Q_0 = 1 - R_0$;

$Q(x_1, \dots, x_m) = 1 - R(x_1, \dots, x_m)$;

$Q_i(x_i) = 1 - R_i(x_i)$;

$T(x_1, \dots, x_m)$ — средняя наработка до отказа при условии, что на i -м участке имеется x_i резервных элементов;

T_0 — заданное значение средней наработки системы до отказа;

λ_i — интенсивность отказов одного элемента i -го участка;

ρ_i — неотрицательные весовые коэффициенты: $\sum \rho_i = 1$;

$\varphi(x)$ — плотность нормального распределения;

$\Phi(x)$ — функция нормального распределения;

$X = (x_1, \dots, x_m)$.

13.2. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РЕЗЕРВИРОВАНИЯ

13.2.1. Одно ограничение, показатель надежности типа R . Характерной особенностью этих задач является то, что показатель надежности системы выражается в виде произведения соответствующих показателей надежности отдельных участков (мультипликативная форма):

$$R(x_1, \dots, x_m) = \prod_{i=1}^m R_i(x_i)$$

или в виде суммы (аддитивная форма):

$$L(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m L_i(x_i).$$

Кроме того, если надежность системы высока, т. е. $Q(x_1, \dots, x_m) \ll 1$, то можно приближенно записать

$$Q(x_1, \dots, x_m) \approx \sum_{i=1}^m Q_i(x_i).$$

Обычно в задачах оптимального резервирования предполагается, что стоимость резерва в целом определяется как

$$C(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m C_i(x_i)$$

и, кроме того, сама стоимость резервных элементов i -го участка системы обычно определяется как

$$C_i(x_i) = c_i x_i.$$

При наличии одного ограничивающего фактора возможна постановка двух следующих задач оптимального резервирования.

1. Раздельным резервированием системы, состоящей из m участков, добиться того, чтобы показатель надежности был не менее заданного R_0 (или не более за-

данного показателя Q_0 или L_0) при минимально возможной стоимости резерва в целом:

$$\min_x \{C(x_1, \dots, x_m) \mid R(x_1, \dots, x_m) \geq R_0\}. \quad (13.1)$$

(Условие $R(X) \geq R_0$ можно заменить на $Q(X) \leq Q_0$ или $L(X) \leq L_0$.)

2. Раздельным резервированием системы, состоящей из m участков, добиться того, чтобы при максимально возможном показателе надежности системы R (или при минимально возможных показателях Q или L) стоимость всего резерва не превысила заданного значения C_0 :

$$\max_x \{R(x_1, \dots, x_m) \mid C(x_1, \dots, x_m) \leq C_0\}. \quad (13.2)$$

(Функцию $R(X)$ можно заменить на $Q(X)$ или $L(X)$, заменив при этом $\max$ на $\min$.)

В дальнейшем R будем интерпретировать в терминах вероятностей безотказной работы для невосстанавливаемых систем. Однако простой заменой этих вероятностей соответствующими коэффициентами готовности (или коэффициентами оперативной готовности) может быть решена оптимальная задача и для восстанавливаемых систем.

13.2.2. Одно ограничение, показатель надежности типа T . В этом случае показатель надежности системы

$$T(x_1, \dots, x_m) = \int_0^{\infty} P(t \mid x_1, \dots, x_m) dt = \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^m P_i(t \mid x_i) dt.$$

При этом могут быть сформулированы две следующие задачи.

1. Прямая задача. Раздельным резервированием системы, состоящей из m участков, добиться того, чтобы значение средней наработки до отказа было не менее заданного T_0 при минимальной возможной стоимости резерва в целом, т. е.

$$\min_x \{C(x_1, \dots, x_m) \mid T(x_1, \dots, x_m) \geq T_0\}.$$

2. Обратная задача. Раздельным резервированием системы, состоящей из m участков, максимизировать среднюю наработку до отказа T при условии, что стоимость резерва не превысит заданного значения C_0 :

$$\max_x \{T(x_1, \dots, x_m) \mid C(x_1, \dots, x_m) \leq C_0\}.$$

13.2.3. Несколько ограничений, показатель надежности типа R . Пусть имеется M ограничений, например: на стоимость, массу, габаритные размеры системы и т. п., которые должны быть выполнены одновременно. Используя введенные обозначения, можно сформулировать следующую задачу:

$$\max_x \{R(x_1, \dots, x_m) \mid C_j(x_1, \dots, x_m) \leq C_{j0}, j = 1, \dots, M\}.$$

(Функцию $R(X)$ можно заменить на $Q(X)$ или $L(X)$, заменив $\max$ на $\min$.)

Обычно на практике предполагают

$$C_j(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m c_{ij} x_i.$$

13.2.4. Многофункциональная система при нескольких ограничениях. Для многофункциональных систем требования к надежности задаются в виде набора значений вероятности выполнения каждой из этих функций. (Значения этих вероятностей зависят от важности и ответственности соответствующих функций.) Выполнение каждой функции зависит от работоспособности определенных элементов системы, причем в общем случае подмножества элементов, необходимые для реализации различных функций, могут иметь и общие части (пересекаться).

При этом может быть сформулирована следующая задача: раздельным резервированием системы, состоящей из m участков, добиться, чтобы вероятности выполнения системой каждой из K функций были не меньше заданных значений при минимальной общей стоимости резерва:

$$\min_x \{C(x_1, \dots, x_m) \mid \prod_{i \in G_j} R_i(x_i) \geq R_0^j, j=1, \dots, K\}, \quad (13.3)$$

где G_j — подмножество элементов, работоспособность которых необходима для выполнения j -й функции; R_0^j — требуемое значение вероятности выполнения j -й функции.

13.3. РЕШЕНИЕ ДЛЯ ПОКАЗАТЕЛЯ НАДЕЖНОСТИ ТИПА R ПРИ ОДНОМ ОГРАНИЧЕНИИ

13.3.1. Границы возможного изменения количества резервных элементов. Для практического использования различных алгоритмов решения задач оптимального резервирования удобно ввести заранее y_i и z_i , $i = 1, \dots, m$, — границы возможного изменения количества резервных элементов на i -м участке системы $y_i \leq x_i \leq z_i$. Границы y_i и z_i вводятся так, чтобы решение x_i^0 задачи оптимального резервирования заведомо попало в множество $\{x_i : y_i \leq x_i \leq z_i, i = 1, \dots, m\}$.

В прямых задачах оптимального резервирования (13.1), (13.3) значения нижних границ y_i можно получить непосредственно из следующих ограничений: в задаче (13.1)

$$y_i = \min \{x_i \mid R_i(x_i) \geq R_0\};$$

в задаче (13.3)

$$y_i = \max_{i \in G_j} \min_{1 \leq j \leq K} \{x_i \mid R_i(x_i) \geq R_j\}.$$

(Надежность любого участка системы не может быть меньше надежности всей системы.)

Нижние границы y_i в обратных задачах оптимального резервирования в общем случае полагаются равными нулю.

Для получения верхних границ z_i разумно воспользоваться следующим соображением. В практических задачах расчет показателей надежности $R_i(x_i)$ ($L_i(x_i)$, $Q_i(x_i)$) всегда производится с заданной точностью $\varepsilon > 0$. Значение ε может определяться как спецификой задачи, так и возможностями имеющихся вычислительных средств. (В практических расчетах точность ε колеблется от 10^{-2} до 10^{-10} .) Функции $R_i(x_i)$ ($L_i(x_i)$, $Q_i(x_i)$) с ростом x_i асимптотически стремятся к некоторым константам $R_i \leq 1$ ($L_i \geq 0$, $Q_i \geq 0$), поэтому, начиная с z_i , значения функций $R_i(x_i)$ ($L_i(x_i)$, $Q_i(x_i)$) в пределах заданной точности нельзя отличить от значений предельных констант R_i^* (L_i^* , Q_i^*):

$$z_i = \min \{x_i \mid R_i(x_i) \geq R_i^* - \varepsilon\};$$

$$z_i = \min \{x_i \mid L_i(x_i) \leq L_i^* + \varepsilon\};$$

$$z_i = \min \{x_i \mid Q_i(x_i) \leq Q_i^* + \varepsilon\}.$$

Для более конструктивного изложения алгоритмов решения задач оптимального резервирования введем общие границы изменения количества резервных элементов на всех участках системы:

$$Y = \min_i y_i; Z = \max_i (z_i).$$

13.3.2. Метод динамического программирования. Для того чтобы решить прямую задачу оптимального резервирования (13.1), введем функцию Беллмана $\varphi_k(r)$ — оптимальное значение целевого функционала в задаче с k переменными и правой частью ограничения, равной r :

$$\varphi_k(r) = \min \left\{ \sum_{i=1}^k c_i x_i \mid \prod_{i=1}^k R_i(x_i) \geq r \right\}.$$

Функция $\varphi_k(r)$ строится рекуррентно при $k = 1, \dots, m$ в соответствии с уравнениями:

$$\varphi_1(r) = \min_{y_1 \leq x_1 \leq z_1} \{c_1 x_1 \mid R_1(x_1) \geq r\}, r \in [R_0, 1 - \varepsilon]; \quad (13.4)$$

$$\varphi_k(r) = \min_{y_k \leq x_k \leq z_k} \{\varphi_{k-1}(r) + c_k x_k \mid r R_k(x_k) \geq R\}, r \in [R, 1 - \varepsilon]. \quad (13.5)$$

Путь $x_k^*(R)$, $k = 1, \dots, m$, — те значения x_k , на которых достигается минимум в (13.4), (13.5). Очевидно, что $\varphi_m(R_0)$ — это оптимальное значение целевого функционала задачи (13.1). Решение же этой задачи $x_1^0, \dots, x_m^0$ получается последовательно при $k = m, \dots, 1$:

$$\begin{aligned} x_m^0 &= x_m^*(R_0), R^{m-1} = R_0/R_m(x_m^0); \\ x_k^0 &= x_k^*(R^k), R^{k-1} = R^k/R_k(x_k^0). \end{aligned} \quad (13.6)$$

Для решения обратной задачи оптимального резервирования (13.2) вводится функция Беллмана

$$\psi_k(C) = \max \left\{ \prod_{i=1}^k R_i(x_i) \mid \sum_{i=1}^k c_i x_i \leq C \right\},$$

которая рекуррентно по k строится в соответствии с уравнениями:

$$\begin{aligned} \varphi_1(c) &= \max_{y_1 \leq x_1 \leq z_1} \{R_1(x_1) \mid c_1 x_1 \leq c\}, c \in [0, C_0]; \\ \psi_k(C) &= \max_{y_k \leq x_k \leq z_k} \{\psi_{k-1}(c) R_k(x_k) \mid c + c_k x_k \leq C\}, c \in [0, C]. \end{aligned} \quad (13.7)$$

При построении $\psi_k(C)$ запоминаются значения $x_k^*(C)$, на которых достигается максимум в (13.7). Решение $x_1^0, \dots, x_m^0$ задачи (13.2) затем определяется как

$$\begin{aligned} x_m^0 &= x_m^*(C_0), C^{m-1} = C_0 - c_m x_m^0; \\ x_k^0 &= x_k^*(C^k), C^{k-1} = C^k - c_k x_k^0, k = m-1, \dots, 1. \end{aligned}$$

Пример 13.1. Рассматривается последовательная система из трех независимых элементов с характеристиками: $r_1 = 0,7$; $c_1 = 1$; $r_2 = 0,5$; $c_2 = 3$; $r_3 = 0,5$; $c_3 = 1$. Требуется найти такие значения x_1 , x_2 и x_3 , которые обеспечивают вероятность безотказной работы системы не ниже 0,9 при минимальных затратах. Используется поэлементное нагруженное резервирование без восстановления: $R_i(x_i) = 1 - (1 - r_i)^{x_i+1}$. Значения показателей надежности $R_i(x_i)$ будем вычислять с точностью $\varepsilon = 0,001$.

Решение. Определяем границы возможного изменения величин x_i : для нижних границ y_i воспользуемся правилом (3.1) — получаем $y_1 = 1$; $y_2 = y_3 = 3$; для верхних границ z_i воспользуемся правилом, описанным в п. 13.3.1, — получаем $z_1 = 5$; $z_2 = z_3 = 9$.

Для удобства дальнейших вычислений предварительно рассчитываем значения функций $R_i(x_i)$ и заполняем табл. 13.1.

По правилу (13.4) строим функцию Беллмана $\varphi_k(R_j)$, $k = 1, 2, 3$, в точках: $R_0 = 0,9$; $R_1 = 0,91$; $R_2 = 0,92$; $R_3 = 0,93$; $R_4 = 0,94$; $R_5 = 0,95$; $R_6 = 0,96$; результаты заносим в табл. 13.2; одновременно значения x_i , на которых достига-

Таблица 13.1

Значения функций

x_1	$R_1(x_1)$	$x_2 x_3$	$R_1(x_2), R_3(x_3)$
1	0,910	3	0,937
2	0,973	4	0,969
3	0,992	5	0,984
4	0,998	6	0,992
5	0,999	7	0,996
		8	0,998
		9	0,999

ется минимум, заносим в табл. 13.3. (Для построения решения по правилу (13.6) нас интересует лишь одно значение функции $\varphi_m(r)$: при $r = R_0$, поэтому в последней строке табл. 13.2 и 13.3 достаточно заполнить только крайнюю левую клетку.)

По правилу (13.6), пользуясь табл. 13.3, строим решение исходной задачи: $x_3 = 4$; $x_2 = 4$; $x_1 = 2$.

Это решение не является оптимальным из-за слишком крупного шага значений R_j в табл. 13.2. Необходимость сравнительно мелкого и обычно неизвестного заранее шага для значений R_j делает этот метод неудобным для решения прямой задачи оптимального резервирования.

13.3.3. Модифицированный метод динамического программирования. Если хорошо известны статистические характеристики надежности отдельных элементов системы и характер зависимости показателей надежности от количества резервных элементов, целесообразно использовать методику точного определения оптимального количества резервных элементов, основанную на модифицированном методе динамического программирования. Методика состоит в следующем.

Таблица 13.2

Значения функции Беллмана

R_j	0,9	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96
i							
1	1	1	2	2	2	2	2
2	14	14	14	14	17	20	29
3	16						

Таблица 13.3

Оптимальные значения аргументов

R_j	0,9	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96
i							
1	1	1	2	2	2	2	2
2	4	4	4	4	5	6	9
3	4						

1. Для каждого i -го участка резервирования при различном числе резервных элементов x_i вычисляются значения показателя надежности $R_i(x_i)$, $x_i = 0, 1, 2, \dots$

2. Для удобства составляется сводная таблица значений $R_i(x_i)$ при различных x_i (табл. 13.4).

3. Для двух участков системы, например для m -го и $(m - 1)$ -го, составляется таблица (табл. 13.5).

Таблица 13.4

Сводная таблица значений $R_i(x_i)$

x_i	$R_1(x_1)$	$R_2(x_2)$	...	$R_i(x_i)$	...	$R_m(x_m)$
0	$R_1(0)$	$R_2(0)$	...	$R_i(0)$	...	$R_m(0)$
1	$R_1(1)$	$R_2(1)$	...	$R_i(1)$	...	$R_m(1)$
2	$R_1(2)$	$R_2(2)$	...	$R_i(2)$	...	$R_m(2)$
...	...	...	...	...	...	...
x	$R_1(x)$	$R_2(x)$	...	$R_i(x)$	...	$R_m(x)$
...	...	...	...	...	...	...

Композиция $(m-1)$ го и m -го участков системы

$x_m \backslash x_{m-1}$	0	1	2	...
0	$R_{m-1}^* (0,0)$ $C_{m-1}^* (0,0)$	$R_{m-1}^* (0,1)$ $C_{m-1}^* (0,1)$	$R_{m-1}^* (0,2)$ $C_{m-1}^* (0,2)$	...
1	$R_{m-1}^* (1,0)$ $C_{m-1}^* (1,0)$	$R_{m-1}^* (1,1)$ $C_{m-1}^* (1,1)$	$R_{m-1}^* (1,2)$ $C_{m-1}^* (1,2)$	...
2	$R_{m-1}^* (2,0)$ $C_{m-1}^* (2,0)$	$R_{m-1}^* (2,1)$ $C_{m-1}^* (2,1)$	$R_{m-1}^* (2,2)$ $C_{m-1}^* (2,2)$	...
...	...	...	...	...

В клетке на пересечении x_m -го столбца и x_{m-1} -й строки записываются значения:

$$R_{m-1}^* (x_{m-1}, x_m) = R_{m-1} (x_{m-1}) R_m (x_m);$$

$$C_{m-1}^* (x_{m-1}, x_m) = c_{m-1} (x_{m-1}) + c_m (x_m).$$

4. Значения $C_{m-1}^* (x_{m-1}, x_m)$ и соответствующие им значения $R_{m-1}^* (x_{m-1}, x_m)$ располагаются в табл. 13.6 в порядке возрастания величин $C_{m-1}^* (x_{m-1}, x_m)$. Величины x_{m-1} и x_m нумеруются соответствующими верхними индексами.

Таблица 13.6

Упорядоченные пары

C_{m-1}^*	$C_{m-1}^* (0,0)$	$C_{m-1}^* (x_{m-1}^1, x_m^1)$	$C_{m-1}^* (x_{m-1}^2, x_m^2)$	...
R_{m-1}^*	$R_{m-1}^* (0,0)$	$R_{m-1}^* (x_{m-1}^1, x_m^1)$	$R_{m-1}^* (x_{m-1}^2, x_m^2)$	...

5. Из табл. 13.6 исключаются все пары, которые содержат значения R_{m-1}^* , не превышающие соседних с ними слева.

6. Оставшаяся в результате указанной процедуры последовательность, называемая доминирующей, заносится в табл. 13.7. Здесь y_{m-1} — номер члена доминирующей последовательности. Оставшимся величинам x_m и x_{m-1} придается,

Таблица 13.7

 $(m-1)^*$ -я доминирующая последовательность

y_{m-1}	1	2	...
$C_{m-1}^* (y_{m-1})$	$C_{m-1}^* (\tilde{x}_{m-1}^1, \tilde{x}_m^1)$	$C_{m-1}^* (\tilde{x}_{m-1}^2, \tilde{x}_m^2)$	...
$R_{m-1}^* (y_{m-1})$	$R_{m-1}^* (\tilde{x}_{m-1}^1, \tilde{x}_m^1)$	$R_{m-1}^* (\tilde{x}_{m-1}^2, \tilde{x}_m^2)$	...

Композиция приведенного $(m-1)$ -го и $(m-2)$ -го участков системы

$y_{m-1} \backslash x_{m-2}$	1	2	3	...
0	$R_{m-2}^*(0,1),$ $C_{m-2}^*(0,1)$	$R_{m-2}^*(0,2),$ $C_{m-2}^*(0,2)$	$R_{m-2}^*(0,3),$ $C_{m-2}^*(0,3)$	...
1	$R_{m-2}^*(1,1),$ $C_{m-2}^*(1,1)$	$R_{m-2}^*(1,2),$ $C_{m-2}^*(1,2)$	$R_{m-2}^*(1,3),$ $C_{m-2}^*(1,3)$	...
2	$R_{m-2}^*(2,1),$ $C_{m-2}^*(2,1)$	$R_{m-2}^*(2,2),$ $C_{m-2}^*(2,2)$	$R_{m-2}^*(2,3),$ $C_{m-2}^*(2,3)$	...
...	...	...	...	...

для того чтобы их отличить, символ «тильда», и они заново нумеруются верхними индексами, значения которых совпадают с номером соответствующего члена доминирующей последовательности. При $y_{m-1} = 1$ в системе имеется $\tilde{x}_{m-1}^1$ резервных элементов на $(m-1)$ -м участке и $\tilde{x}_m^1$ — на m -м; при $y_{m-1} = 2$ в системе имеется $\tilde{x}_{m-1}^2$ резервных элементов на $(m-1)$ -м участке и $\tilde{x}_m^2$ — на m -м и т. д. Иначе говоря, $y_{m-1} = k$ есть вектор с компонентами $\tilde{x}_{m-1}^k$ и $\tilde{x}_m^k$.

Таким образом, в результате соединения двух участков в один в рассматриваемой системе стало $m-1$ участков, а не m , как было сначала, причем последний участок является приведенным, объединяющим m -й и $(m-1)$ -й.

7. Полученные значения $R_{m-1}^*(y_{m-1})$ используются при составлении табл. 13.8, аналогичной табл. 13.5. Здесь в клетке на пересечении y_{m-1} -го столбца и x_{m-2} -й строки записываются значения:

$$R_{m-2}^*(x_{m-2}, y_{m-1}) = R_{m-2}(x_{m-2}) R_{m-1}^*(y_{m-1});$$

$$C_{m-2}^*(x_{m-2}, y_{m-1}) = C_{m-2}(x_{m-2}) + C_{m-1}^*(y_{m-1}).$$

8. Как описано в пп. 4—6, строится новая доминирующая последовательность, которая заносится в табл. 13.9, для приведенного $(m-2)$ -го элемента. Здесь y_{m-2} — номер члена данной доминирующей последовательности и $y_{m-2} = k$ означает, что на $(m-2)$ -м участке системы имеется $\tilde{x}_{m-2}^k$ резервных элементов, а на эквивалентном $(m-1)$ -м участке используется k -й член доминирующей последовательности $\tilde{y}_{m-1}^k$, который, в свою очередь, находится по правилу, описанному в п. 6.

Таблица 13.9

 $(m-2)$ -я доминирующая последовательность

y_{m-2}	1	2	...
$C_{m-2}^*(y_{m-2})$	$C_{m-2}^*(\tilde{x}_{m-2}^1, \tilde{y}_{m-1}^1)$	$C_{m-2}^*(\tilde{x}_{m-2}^2, \tilde{y}_{m-1}^2)$	...
$R_{m-2}^*(y_{m-2})$	$R_{m-2}^*(\tilde{x}_{m-2}^1, \tilde{y}_{m-1}^1)$	$R_{m-2}^*(\tilde{x}_{m-2}^2, \tilde{y}_{m-1}^2)$	...

9. Указанная процедура продолжается до тех пор, пока через $m - 1$ шаг, наконец, не будет построена окончательная доминирующая последовательность пар $\{R_1^*(y_1), C_1^*(y_1)\}$.

10. В окончательной доминирующей последовательности отыскивается решение x_1^* , такое, что для первой задачи оптимального резервирования

$$R_1^*(x_1^* - 1) < R_0 \leq R_1^*(x_1^*)$$

и для второй задачи

$$C_1^*(x_1^*) \leq C_0 < C_1^*(x_1^* + 1).$$

11. Найденное x_1^* содержит в себе все известные оптимальные значения x_i , которые могут быть определены следующим образом:

$$x_1^* = (x_1, x_2^*),$$

т. е. на основании x_1^* можно найти x_1 и x_2^* . Далее $x_2^* = (x_2, x_3^*)$ и т. д.

Примечания. 1. Если задача рассчитывается вручную, то обычно с вычислительной точки зрения удобнее сначала произвести попарно композиции всех m участков системы, затем попарно композиции полученных участков и т. д., т. е. способ композиции по схеме на рис. 13.1, б может оказаться менее предпочтителен способа композиции по схеме на рис. 13.1, а. Если задача рассчитывается на ЭВМ, то практически применима только схема на рис. 13.1, б.

2. При расчетах следует иметь в виду, что табл. 13.4 можно заполнять постепенно по мере развития процесса решения.

3. При проведении практических расчетов часто оказывается полезным для сокращения объема последующих вычислений исключать из рассмотрения некоторые члены доминирующих последовательностей. Если, например, стоимости двух соседних членов отличаются незначительно, то можно пренебречь тем членом, который характеризуется меньшим показателем надежности. Аналогично, если наблюдается незначительное различие в показателях надежности двух соседних членов доминирующей последовательности, то можно пренебречь тем из них, у которого больше стоимости.

Пример 13.2. Пусть система состоит из элементов с разными показателями надежности, причем для повышения надежности применяются различные способы резервирования на различных участках (рис. 13.2). Общая стоимость системы без резерва 22 ед.

Требуется определить оптимальный резерв на каждом участке для двух случаев: 1) общая стоимость системы должна быть не более 50 ед.; 2) вероятность безотказной работы системы должна быть не менее 0,45.

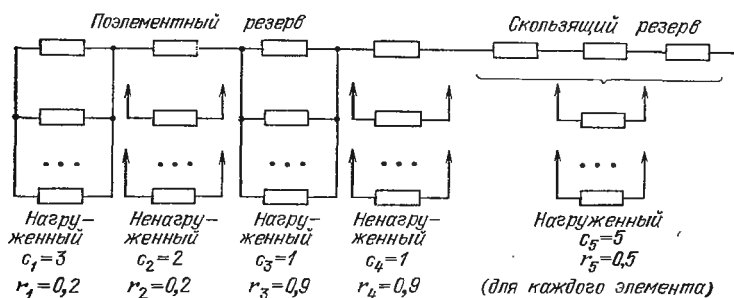


Рис. 13.2. Структурная схема системы в примере 13.2

Значения $R_i(x_i)$ для различных участков

$\begin{matrix} i \\ x_i \end{matrix}$	1	2	3	4	5
0	0,2000	0,2000	0,9000	0,9000	0,1250
1	0,3600	0,5219	0,9900	0,9948	0,3125
2	0,4880	0,7809	0,9990	0,9998	0,5000
3	0,5904	0,9199	0,9999	1	0,6563
4	0,6723	0,9758	1	—	0,7734
5	0,7379	0,9938	—	—	0,8555
6	0,7903	0,9986	—	—	0,9102
7	0,8322	0,9997	—	—	0,9453
8	0,8658	0,9999	—	—	0,9673
9	0,8926	1	—	—	0,9807
10	0,9141	—	—	—	0,9888

Р е ш е н и е. В табл. 13.10 представлены значения $R_i(x_i)$ для различных x_i .

Для 1-го и 3-го участков

$$R_i(x_i) = 1 - q_i^{x_i+1};$$

для 2-го и 4-го участков

$$R_i(x_i) = e^{-\lambda_i t} \sum_{j=0}^{x_i} \frac{(\lambda_i t)^j}{j!}$$

и для 5-го участка

$$R_5(x_5) = \sum_{j=3}^{3+x_5} C_{3+x_5}^j r_5^j q_5^{3+x_5-j}.$$

В табл. 13.11 и 13.12 приведена композиция 2-го с 3-м и 4-го с 5-м участком соответственно. В каждой клетке таблицы приведены значения вероятности безотказной работы и стоимости. Цифры в правых нижних углах клеток таблицы указывают порядковый номер данного элемента на начальном участке доминирующей последовательности.

В табл. 13.13 дается композиция двух вновь образованных участков, а в табл. 13.14 приводится окончательная доминирующая последовательность.

Обозначим условно для нашего примера:

$$y_1 = (x_4, x_5); y_2 = (x_2, x_3); y_3 = (y_1, y_2); y_4 = (x_1, y_3).$$

Таким образом, номера в правых нижних углах клеток табл. 13.12 есть y_1 , табл. 13.11 — y_2 , табл. 13.13 — y_3 и табл. 13.14 — y_4 .

П р и м е ч а н и е. Для удобства контроля процесса вычислений в табл. 13.13 и 13.14 приведены не только номера y_1 , y_2 и y_3 , но и соответствующие им значения вероятности безотказной работы и стоимости.

По табл. 13.14 находим, что решением для первой задачи (стоимость системы не должна превышать 50 ед.) является $y_4 = 5$, $x_1 = 3$ и $y_3 = 8$. Затем по табл. 13.13 находим значение $y_3 = 8$ и сразу определяем $y_1 = 12$ и $y_2 = 9$. Взяв $y_1 = 12$, по табл. 13.12 имеем $x_4 = 1$ и $x_5 = 2$, а взяв $y_2 = 9$, по табл. 13.11 находим $x_2 = 3$ и $x_3 = 2$. При этом вероятность безотказной работы системы составляет 0,2699.

Композиция 2-го и 3-го участков системы

$x_3 \backslash x_2$	0	1	2	3	4
0	0,1800 3 № 1	0,1980 4 № 2	0,1998 5	0,2000 6	0,2000 7
1	0,4697 5 № 3	0,5166 6 № 4	0,5214 7	0,5218 8	0,5219 9
2	0,7028 7 № 5	0,7731 8 № 6	0,7801 9	0,7808 10	0,7809 11
3	0,8279 9 № 7	0,9107 10 № 8	0,9190 11 № 9	0,9198 12	0,9199 13
4	0,8782 11	0,9660 12 № 10	0,9748 13 № 11	0,9757 14	0,9758 15
5	0,8944 13	0,9839 14 № 12	0,9928 15 № 13	0,9937 16 № 14	0,9938 17
6	0,8988 15	0,9886 16	0,9976 17 № 15	0,9985 18 № 16	0,9986 19 № 17
7	0,8998 17	0,9897 18	0,9987 19	0,9996 20	0,9997 21
8	0,9000 19	0,9899 20	0,9990 21	0,9999 22	0,9999 23

Таблица 13.12

Композиция 4-го и 5-го участков системы

$x_5 \backslash x_4$	0	1	2	3	4	5	6
0	0,1125 16 № 1	0,2812 21 № 6	0,4500 26 № 11	0,5906 31 № 16	0,6961 36 № 21	0,7699 41	0,8191 46
1	0,1244 17 № 2	0,3109 22 № 7	0,4974 27 № 12	0,6529 32 № 17	0,7694 37 № 22	0,8510 42 № 27	0,9054 47 № 32
2	0,1250 18 № 3	0,3124 23 № 8	0,4999 28 № 13	0,6561 33 № 18	0,7733 38 № 23	0,8553 43 № 28	0,9100 48
3	0,1250 19 № 4	0,3125 24 № 9	0,5000 29 № 14	0,6562 34 № 19	0,7734 39 № 24	0,8555 44 № 29	0,9102 49
4	0,1250 20 № 5	0,3125 25 № 10	0,5000 30 № 15	0,6562 35 № 20	0,7734 40 № 25	0,8555 45 № 30	0,9102 50
5	0,1250 21	0,3125 26	0,5000 31	0,6562 36	0,7734 41 № 26	0,8555 46 № 31	0,9102 51
6	0,1250 22	0,3125 27	0,5000 32	0,6562 37	0,7734 42	0,8555 47	0,9102 52

Композиция двух вновь образованных участков системы

$y_1 \backslash y_2$		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
		0,4697 5	0,5166 6	0,7028 7	0,7731 8	0,8279 9	0,9107 10	0,9190 11	0,9660 12	0,9748 13	0,9839 14	0,9928 15	0,8937 16
11	0,4500 26	0,2114 31 № 1	0,2320 32	0,3163 33 № 3	0,3479 34	0,7326 35 № 5	0,4098 36	0,4136 37	0,4347 38	0,4387 39	0,4428 40	0,4468 42	0,4472 42
12	0,4974 27	0,2336 32 № 2	0,2570 33	0,3496 34 № 4	0,3845 35	0,4118 36 № 6	0,4530 37 № 7	0,4571 38 № 8	0,4805 39 № 9	0,4849 40	0,4894 41	0,4938 42	0,4942 43
13	0,4999 28	0,2348 33	0,2582 34	0,3513 35	0,3845 36	0,4139 37	0,3553 38	0,4594 39	0,4829 40	0,4873 41	0,4919 42	0,4963 43	0,4968 44
16	0,5906 31	0,2774 36	0,3051 37	0,4151 38	0,4566 39	0,4890 40	0,5379 41	0,5428 42	0,5705 43	0,5757 44	0,5811 45	0,5863 46	0,5869 47
17	0,6529 32	0,3067 37	0,3373 39	0,4589 40 № 10	0,5048 40 № 11	0,5405 42 № 12	0,5946 43 № 13	0,6001 44 № 14	0,6307 45 № 15	0,6364 46 № 16	0,6424 47	0,6481 47	0,6488 48
18	0,6561 33	0,3081 38	0,3389 39	0,4611 40	0,5072 41	0,5432 42	0,5975 43	0,6029 44	0,6338 45	0,6396 46	0,6455 47	0,6482 48	0,6520 49
21	0,6961 36	0,3270 41	0,3596 42	0,4892 43	0,5382 44	0,5763 45	0,6339 46	0,6397 47	0,6724 48	0,6786 49	0,6849 50	0,6911 51	0,6917 52
22	0,7694 48	0,3613 42	0,3975 43	0,5407 44	0,5948 45	0,6370 46	0,7007 47 № 17	0,7071 48 № 18	0,7432 49 № 19	0,7500 50 № 20	0,7570 51	0,7639 52	0,7646 53
23	0,7733 38	0,3632 43	0,3995 44	0,5435 45	0,5978 46	0,6402 47	0,7042 48	0,7107 49	0,7470 50	0,7539 51	0,7608 52	0,7677 53	0,7684 54
27	0,8510 42	0,3997 47	0,4396 48	0,5981 49	0,6579 50	0,7045 51	0,7750 52	0,7821 53	0,8220 54	0,8296 55	0,8373 56	0,8449 57	0,8456 58

Окончательная доминирующая последовательность

$\begin{matrix} y_3 \\ x_1 \end{matrix}$	7 0,4530 37	8 0,4571 38	9 0,4805 30	10 0,5048 40	11 0,5405 41	12 0,5946 42	13 0,6001 43	14 0,6307 44	15 0,6364 45	16 0,6424 46	17 0,7007 47
2 0,4880 9	0, 2211 46 № 1	0,2230 47 № 2	0,2345 48 № 3	0,2463 49	0,2637 50	0,2902 51 № 6	0,2928 52	0,3078 53	0,3106 54	0,3135 55	0,3419 56
3 0,5904 12	0,2674 49 № 4	0,2699 50 № 5	0,2837 51	0,2980 52 № 7	0,3191 53 № 8	0,3511 54 № 9	0,3543 55 № 10	0,3724 56 № 11	0,3757 57	0,3793 58	0,4137 59
4 0,6723 15	0,3046 52	0,3073 53	0,3280 54	0,3394 55	0,3634 56	0,3997 57 № 12	0,4034 58 № 13	0,4240 59 № 14	0,4279 60	0,4319 61	0,4711 62 № 17
5 0,7379 18	0,3343 55	0,3373 56	0,3546 57	0,3725 58	0,3988 59	0,4388 60 № 15	0,4428 61 № 16	0,4654 62	0,4636 63	0,4740 64	0,5170 65
6 0,7903 61	0,3580 58	0,3612 59	0,3797 60	0,3998 61	0,4272 62	0,4699 63	0,4742 64	0,4984 65	0,5029 66	0,5077 67	0,5538 68

Значения функции ψ_i

Значения функции Беллмана

$t \backslash x_i$	y	$y+1$	...	$z-1$	z
1	$\psi_1(y)$	$\psi_1(y+1)$	...	$\psi_1(z-1)$	$\psi_1(z)$
2	$\psi_2(y)$	$\psi_2(y+1)$	...	$\psi_2(z-1)$	$\psi_2(z)$
...	...	...	...	...	...
m	$\psi_m(y)$	$\psi_m(y+1)$	...	$\psi_m(z-1)$	$\psi_m(z)$

k	1	2	...	$M = \left\lceil \frac{m}{\delta} \right\rceil$
$G(h)$	$G(1)$	$G(2)$	...	$G(M)$

Аналогичным образом по табл. 13.14 определяем, что решением для второй задачи (вероятность безотказной работы должна быть не ниже 0,45) является $y_4 = 17$. Также последовательно находим, что $y_4 = 17$ соответствуют значения $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$ и $x_5 = 4$. При этом стоимость системы составляет 62 ед.

13.3.4. Методика отыскания решения с заданной относительной точностью. Для задач (13.1), (13.2) большой размерности ($m \approx 1000$), решение которых требуется получить с заданной относительной точностью, можно воспользоваться следующим алгоритмом, основанным на схеме динамического программирования. (Алгоритм излагается для задачи (13.1).)

1. Вычисляем $\Delta = \delta L_0/m$, $M = \lceil m/\delta \rceil$, где δ — заданная требуемая относительная точность.

2. Определяем Y, Z — границы возможного изменения количества резервных элементов на всех участках системы (см. п. 13.3.1).

3. Заполняем табл. 13.15 значениями целочисленной функции: $\psi_i(x_i) = \lfloor L_i(x_i)/\Delta \rfloor$, $i = 1, \dots, m$, $x_i = Y, Y+1, \dots, z-1, Z$ (знак $\lfloor \cdot \rfloor$ означает, как всегда, целую часть числа).

4. Заполняем однострочную табл. 13.16 значениями функции Беллмана при $i = 1$:

$$G(k) = c_1 \min \{x_1 | \psi_1(x_1) \leq k\}, \quad k = 1, \dots, M,$$

одновременно заполняем первую строку табл. 13.17:

$$x_1^*(k) = \min \{x_1 | \psi_1(x_1) \leq k\} = G(k)/c_1.$$

5. Последовательно при $i = 2, \dots, m$ выполняем действия п. 4.

6. Последовательно при $k = M, M-1, \dots, 1$ изменяем значения функции $G(k)$ в табл. 13.16:

$$G(k) = \min_{x_i=Y, Z} \{G(k - \psi_i(x_i)) + c_i x_i | \psi_i(x_i) < k\}, \quad (13.8)$$

одновременно заполняем i -ю строку табл. 13.17 теми значениями $x_i^*(k)$, на которых достигается минимум в (13.8).

7. По табл. 13.17 определяем $x_m^0 = x_m^*(m, M)$, затем последовательно от $i = m-1$ до $i = 1$ вычисляем $k^i = k^{i+1} - \psi_{i+1}(x_{i+1}^0)$, $k^m = M$ и по табл. 13.17 находим $x_i^0 = x_i^*(k^i)$.

Найденный набор $x_1^0, \dots, x_m^0$ представляет собой приближенное решение задачи (13.1) с заданной относительной точностью δ .

Алгоритм можно использовать только для решения задач с помощью ЭВМ, причем при решении задачи размерности m потребуется $2m$ обращений к внешним носителям памяти.

Таблица 13.17

Значения x_i^* , минимизирующие $G(k)$

$k \backslash i$	1	2	...	M
1	$x_1^*(1)$	$x_1^*(2)$	...	$x_1^*(M)$
2	$x_2^*(1)$	$x_2^*(2)$	...	$x_2^*(M)$
...	...	...	...	...
m	$x_m^*(1)$	$x_m^*(2)$	...	$x_m^*(M)$

Промежуточные вычисления для алгоритма наискорейшего спуска

i	x_i	$L_i(x_i)$	$L_i(x_i+1)$	Δ_i	g_i
1	x_1	$L_1(x_1)$	$L_1(x_1+1)$	Δ_1	g_1
...	...	...	...	...	...
m	x_m	$L_m(x_m)$	$L_m(x_m+1)$	Δ_m	g_m

13.3.5. Метод наискорейшего покоординатного спуска. Этот метод значительно меньшей трудоемкости, чем метод динамического программирования. Он позволяет построить подпоследовательность окончательной доминирующей последовательности, полученной в п. 13.3.3, причем разница в значениях $C(x)$ для соседних членов этой подпоследовательности не превышает $\max_i c_i$, т. е. в большинстве практических задач метод наискорейшего покоординатного спуска позволяет получить решение с достаточной точностью.

1. Заполняется табл. 13.18 (m строк, 6 столбцов): 1-й столбец i — номер участка системы; 2-й $x_i^{(0)} = y_i$; 3-й $L_i(x_i^{(0)})$; 4-й $L_i(x_i^{(0)} + 1)$; 5-й $\Delta_i^{(0)} = L_i(x_i^{(0)}) - L_i(x_i^{(0)} + 1)$; 6-й $g_i^{(0)} = \Delta_i^{(0)}/c_i$. (В процессе работы алгоритма числа в табл. 13.18 изменяются, поэтому при использовании алгоритма вручную все столбцы, кроме 1-го, нужно заполнять карандашом.)

2. Вычисляются: $L^{(0)} = \sum_{i=1}^m L_i(x_i^{(0)})$ — сумма чисел, стоящих в 3-м столбце, и $C^{(0)} = \sum_{i=1}^m c_i x_i^{(0)}$.

Далее переходим к последовательному выполнению шагов алгоритма. Описывается k -й шаг.

3. В 6-м столбце табл. 13.18 отыскивается максимальное число и фиксируется j — номер строки, в которой оно стоит.

4. Вычисляются: $L^{(k)} = L^{(k-1)} - \Delta_j^{(k-1)}$; $C^{(k)} = C^{(k-1)} + C_j$ — и проверяются выполнения неравенств: для задачи (13.1) $L^{(k)} \leq L_0$, для задачи (13.2) $C^{(k)} \geq C_0$.

Если соответствующее неравенство выполнено, то работа алгоритма заканчивается, а решение задачи выдается в виде: для задачи (13.1) $x_1^{(k-1)}, \dots, x_{j-1}^{(k-1)}, x_j^{(k-1)} + 1, x_{j+1}^{(k-1)}, \dots, x_m^{(k-1)}$; для задачи (13.2) $x_1^{(k-1)}, \dots, x_m^{(k-1)}$.

В противном случае числа в j -й строке табл. 12.18 изменяются по следующему правилу: 2-й столбец $x_j^{(k)} = x_j^{(k-1)} + 1$ — число увеличивается на 1; 3-й столбец $L_j(x_j^{(k)})$ — переносится число из четвертого столбца; 4-й столбец $L_j(x_j^{(k)} + 1)$; 5-й столбец $\Delta_j^{(k)} = L_j(x_j^{(k)}) - L_j(x_j^{(k)} + 1)$; 6-й столбец $g_j^{(k)} = \Delta_j^{(k)}/c_j$.

После этого переходим к следующему шагу алгоритма.

Пример 13.3. Рассмотрим ту же систему, что и в примере 13.2. Требуется определить оптимальный резерв на каждом участке для двух случаев: 1) общая стоимость резерва не более 28 ед.; 2) вероятность безотказной работы не менее 0,45 ($L_0 = 0,8$).

Решение. Выполняя 0-й шаг алгоритма для задачи (13.1), заполняем табл. 13.19; суммируя числа в 3-м столбце, получаем $L^{(0)} = 2,3256$; вычисляем $C^{(0)} = \sum_{i=1}^5 c_i x_i^{(0)} = 18$ ед.

Таблица 13.19
Промежуточные вычисления
для примера 13.3

i	x_i	$L_i(x_i)$	$L_i(x_i+1)$	Δ_i	g_i
1	2	0,7714	0,5270	0,244	0,0815
2	1	0,6503	0,2473	0,4030	0,2015
3	0	0,1054	0,0101	0,0953	0,0953
4	0	0,1054	0,0052	0,1001	0,1001

Процедура решения примера 13.3

k_1	k_2	i	$x_i^{(k)}$	$L_i(x_i^{(k)})$	$L_i(x_i^{(k)} + 1)$	$\Delta_i^{(k)}$	$g_i^{(k)}$	$L^{(k)}$	$C^{(k)}$
6	1	2	2	0,2473	0,0835	0,1638	0,0819	1,9226	20
7	2	4	1	0,0052	0,0002	0,0050	0,0050	0,8225	21
8	3	3	1	0,0101	0,0010	0,0091	0,0091	1,7272	22
9	4	2	2	0,0835	0,0245	0,0590	0,0295	1,5634	24
10	5	1	3	0,5270	0,3971	0,1299	0,0433	1,3189	27
11	6	5	3	0,4211	0,2570	0,1641	0,0328	1,0469	32
12	7	1	4	0,3971	0,3039	0,0932	0,0310	0,9170	35
13	8	5	4	0,2570	0,1561	0,1009	0,0202	0,7520	40

Переходим к последовательному выполнению шагов алгоритма. Для иллюстрации в табл. 13.20 (с 3-го по 7-й столбец) приведены последовательно изменяющиеся от шага к шагу строки табл. 13.19.

В первом столбце табл. 13.20 приведены номера шагов алгоритма при решении задачи (13.2), а во втором столбце — номера шагов алгоритма при решении задачи (13.1). При решении задачи (13.2) с $C_0 = 28$ ед. работа алгоритма заканчивается на 12-м шаге: $C^{(11)} = 27 < 28 < 32 = C^{(12)} = 32$ ед. Оптимальное решение в этом случае: $x_1 = 3$; $x_2 = 3$; $x_3 = 1$; $x_4 = 1$; $x_5 = 2$.

При решении задачи (13.1) с $L_0 = 0,8$ работа алгоритма заканчивается на 8-м шаге: $L^{(7)} = 0,9170 > 0,8$; $L^{(8)} = 0,7529 < 0,8$. Оптимальное решение в этом случае: $x_1 = 4$; $x_2 = 3$; $x_3 = 1$; $x_4 = 1$; $x_5 = 4$.

Если для повышения надежности используется нагруженное или ненагруженное резервирование элементов, то для расчетов могут применяться табулированные гамма- и бета-функции (соответственно пуассоновское и биномиальное распределения). В этом случае дополнительная операция логарифмирования бывает нежелательной, поэтому можно предложить нестрогий алгоритм с использованием в качестве целевой функции непосредственно функции $R(x_1, \dots,$

$$x_m) \text{ или } Q(x_1, \dots, x_m) \approx \sum_{i=1}^m Q_i(x_i).$$

Примечание. В ряде практических задач может возникнуть следующая ситуация: $(N-1)$ -й шаг еще не дает требуемого решения (например, еще не израсходована вся стоимость или еще не достигнуто требуемое значение вероятности безотказной работы), а N -й шаг оптимального процесса требует введения элемента с очень большой стоимостью.

Так, при решении задачи (13.1) введение оптимального элемента дает значение показателя надежности системы (например, вероятности безотказной работы) заведомо больше требуемого. В то же время резервирование других (не оптимальных на данном шаге участков системы) обеспечивает требуемое значение вероятности безотказной работы при меньших затратах.

При возникновении подобных ситуаций при решении первой задачи можно рекомендовать следующие методы распределения остатка ресурсов:

если некоторый N -й шаг оптимального процесса приводит к существенному перерасходу стоимости (или к достижению излишне высокого значения R), то на N -м шаге из рассмотрения исключается один участок с максимальным значением $g^{(N)}$. Если и в этом случае имеет место существенный перерасход стоимости или достигается излишне высокое значение R , то процедуру следует продолжить в том же направлении, т. е. на N -м шаге из рассмотрения исключаются два участка с наибольшими значениями $g^{(N)}$ и т. д.;

если некоторый N -й шаг оптимального процесса приводит к существенному перерасходу стоимости (или к достижению излишне высокого значения R), то следует «снять» резервный элемент, прибавленный на $(N-1)$ -м шаге оптимального процесса. Затем после $(N-2)$ -го шага продолжить процесс, исключив из рассмотрения один участок с максимальным значением $g^{(N-1)}$. Если и в этом случае имеет место существенный перерасход стоимости или достигается излишне высокое значение R , то процедуру следует продолжать в том же направлении, т. е. после $(N-2)$ -го шага из рассмотрения исключаются два участка с наибольшими значениями $g^{(N-1)}$ и т. д.

13.3.6. Упрощенная методика приближенного решения. Если в результате резервирования требуется добиться высокого значения вероятности безотказной работы системы, т. е.

$$1 - R_0 = Q_0 \ll 1,$$

то можно применять приближенное решение задачи оптимального резервирования.

1. Определение оптимального резерва при требуемой вероятности безотказной работы системы R_0 (или допустимого значения вероятности отказа системы Q_0):

1) находится

$$\rho = Q_0 \left(\sum_{i=1}^m c_i \right)^{-1}; \quad (13.9)$$

2) определяется

$$\gamma_i = c_i \rho = c_i Q_0 \left(\sum_{i=1}^m c_i \right)^{-1}; \quad (13.10)$$

3) из уравнения

$$Q_i(x_i) = \gamma_i \quad (13.11)$$

находится значение x_i .

П р и м е ч а н и е. Обычно значение x_i получается дробным. В этом случае при практических расчетах можно округлять найденное значение до ближайшего целого числа. В ряде случаев при ориентировочных расчетах удобнее округлять все полученные значения до ближайшего большего целого числа.

2. Определение оптимального резерва при заданной стоимости системы:

1) находится начальное значение $\rho^{(1)}$ следующим образом:

вычисляется
$$x^{(1)} = (C_0 - C^{(0)}) \left(\sum_{i=1}^m c_i \right)^{-1};$$

вычисляется
$$Q^{(1)} = \sum_{i=1}^m Q_i(x^{(1)});$$

определяется
$$\rho^{(1)} = Q^{(1)} \left(\sum_{i=1}^m c_i \right)^{-1};$$

2) для найденного значения $\rho^{(1)}$ по формулам (13.9)—(13.11) вычисляются $x_1^{(1)}, \dots, x_m^{(1)}$.

3) полученная стоимость системы контролируется по формуле

$$C^{(1)} = C^{(0)} + \sum_{i=1}^m x_i^{(1)} c_i.$$

Если $C^{(1)} > C_0$, то выбирается новое значение $\rho^{(2)} > \rho^{(1)}$ и для него, как и ранее, определяются $x_1^{(2)}, \dots, x_m^{(2)}$. Если $C^{(1)} < C_0$, то выбирается такое новое значение $\rho^{(2)}$, что $\rho^{(2)} < \rho^{(1)}$, и для него аналогичным образом находятся $x_1^{(2)}, \dots, x_m^{(2)}$.

Указанный процесс продолжается до тех пор, пока на N -м шаге процесса не будет найдена величина $C^{(N)}$, практически совпадающая с величиной C_0 .

П р и м е ч а н и е. Для ускорения процесса решения при отыскании очередного значения $C^{(k+1)}$ можно использовать метод линейной интерполяции, выбирая

$$\rho^{(k+1)} = \rho + (\rho^* - \rho) (C_0 - C) / (C^* - C),$$

где ρ и ρ^* — соответственно меньшее и большее значения $\rho^{(k)}$ и $\rho^{(k-1)}$; C и C^* — соответственно меньшее и большее значения $C^{(k)}$ и $C^{(k-1)}$.

13.4. ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПОКАЗАТЕЛЯ НАДЕЖНОСТИ ТИПА Т ПРИ ОДНОМ ОГРАНИЧЕНИИ

Точное решение этой задачи может быть получено лишь путем полного перебора. Однако для ненагруженного резерва можно найти приближенное решение, учитывая, что наработка до отказа i -го участка при достаточно большом числе x_i имеет распределение, близкое к нормальному. В этом случае для средней наработки системы до отказа можно записать верхнюю и нижнюю оценки:

$$T_n = \min_{1 \leq i \leq m} (x_i T_i - b_m \sigma_i \sqrt{x_i}) \leq T \leq \min_{1 \leq i \leq m} T_i x_i = T_n$$

где T_i — средняя наработка до отказа i -го элемента; σ_i — среднее квадратическое отклонение распределения наработки до отказа i -го элемента; x_i — число элементов i -го типа; b_m — коэффициент, зависящий от числа различных типов элементов и определяемый из уравнения

$$\Phi(b_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{b_m}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = 1 - \sqrt{0,5}^m,$$

где $\Phi(x)$ — нормированная функция нормального распределения.

Нижняя оценка дает лучшее приближение для больших, а верхняя для малых коэффициентов вариации распределения времени безотказной работы элементов.

Примечание. При рассмотрении данной задачи оптимального резервирования однотипные компоненты, стоящие на различных схемных позициях, не объединяются в один условный участок резервирования, как это было в случае оптимального резервирования по критерию вероятности безотказной работы (или коэффициента готовности).

Методика решения задачи оптимального резервирования в этом случае выглядит следующим образом:

1) по табл. П2.3 находим значение коэффициента b_m из условия

$$\Phi(b_m) = 1 - \sqrt{0,5}^m;$$

2) вычисляем

$$T_i(x_i^{(1)}) = x_i^{(1)} T_i - b_m \sigma_i \sqrt{x_i^{(1)}}, \quad x_i^{(1)} = 1, 2, \dots, i = 1, \dots, m,$$

и результаты заносим в табл. 13.21;

3) на первом шаге процесса решения среди величин $T_i(x_i^{(1)})$ находим наименьшую (пусть ее номер j):

$$T^{(1)} = T_j(x_j^{(1)}) = \min_{1 \leq i \leq n} T_i(x_i^{(1)});$$

4) в табл. 13.22 заносим итоговые значения $x_i^{(1)}$ для всех $i = 1, \dots, m$, $C^{(1)} = \sum_{i=1}^m c_i x_i^{(1)}$, а также $T_j(x_j^{(1)})$;

Т а б л и ц а 13.21

Значения $T_i(x)$

x	$T_1(x)$	...	$T_i(x)$	...	$T_n(x)$
1	$T_1(1)$	...	$T_i(1)$	...	$T_n(1)$
2	$T_1(2)$	...	$T_i(2)$	...	$T_n(2)$
3	$T_1(3)$	...	$T_i(3)$	...	$T_n(3)$

Итоговая таблица значений $x_i^{(N)}$, $C^{(N)}$ и $T^{(N)}$

Номер шага N	$x_1^{(N)}$	...	$x_i^{(N)}$	...	$x_n^{(N)}$	$C^{(N)}$	$T^{(N)}$
1	1	...	1	...	1	$C^{(1)} = \sum_{i=1}^n c_i (x_i^{(1)})$	$\min T_i (x_i^{(1)})$
2	1	...	2	...	1	$C^{(2)} = C^{(1)} + c_j$	$\min T_i (x_i^{(2)})$

5) находим новые значения $x_i^{(2)}$ по правилу

$$x_i^{(2)} = \begin{cases} x_i^{(1)}, & \text{если } i \neq j, \\ x_i^{(1)} + 1, & \text{если } i = j; \end{cases}$$

6) вычисляем

$$T_i (x_i^{(2)}) = x_i^{(2)} T_i - b_m \sigma_i \sqrt{x_i^{(2)}}, i = 1, \dots, m,$$

и продолжаем процедуру с п. 3.

Примечание. Естественно, что все $T_i (x_i^{(2)})$ для $i \neq j$ равны соответствующим $T_i (x_i^{(1)})$.

Пример 13.4. Рассмотрим систему, представляющую собой последовательное соединение десяти элементов, характеристики которых приведены в табл. 13.23. Требуется найти такой оптимальный состав резервных элементов для системы, чтобы средняя наработка системы до отказа была не менее 100 ч.

Решение. Из условия $\Phi (b_{10}) = 1 - \sqrt[10]{0,5}$, используя табл. П2.3, предварительно получаем $b_{10} \approx 1,5$. В данном случае начинать пошаговый процесс со значений $x_i = 1$ нецелесообразно, так как ясно, что для элементов с $T_i = 10$ ч необходимо не менее 10 резервных элементов, а для элементов с $T_i = 30$ ч — не менее четырех. Приняв это во внимание, запишем:

$$x_1 = x_2 = 10, T_1^\Sigma = T_2^\Sigma = 100 - 1,5 \cdot \sqrt{10} \approx 95;$$

$$x_1 = x_2 = 11, T_1^\Sigma = T_2^\Sigma = 110 - 1,5 \cdot \sqrt{11} \approx 105;$$

$$x_3 = x_4 = 10, T_3^\Sigma = T_4^\Sigma = 100 - 1,5 \cdot 3\sqrt{10} \approx 86;$$

$$x_3 = x_4 = 11, T_3^\Sigma = T_4^\Sigma = 110 - 1,5 \cdot 3\sqrt{11} \approx 95;$$

$$x_3 = x_4 = 12, T_3^\Sigma = T_4^\Sigma = 120 - 1,5 \cdot 3\sqrt{12} \approx 104;$$

$$x_5 = x_6 = 4, T_5^\Sigma = T_6^\Sigma = 120 - 1,5 \cdot \sqrt{4} \approx 117;$$

$$x_7 = x_8 = 4, T_7^\Sigma = T_8^\Sigma = 120 - 1,5 \cdot 3\sqrt{4} \approx 111;$$

$$x_9 = x_{10} = 4, T_9^\Sigma = T_{10}^\Sigma = 120 - 1,5 \cdot 10\sqrt{4} \approx 90;$$

$$x_9 = x_{10} = 5, T_9^\Sigma = T_{10}^\Sigma = 150 - 1,5 \cdot 10\sqrt{5} \approx 116.$$

Итак, решением задачи являются набор следующих значений: $x_1 = x_2 = 11$; $x_3 = x_4 = 12$; $x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 4$; $x_9 = x_{10} = 5$.

В случае M ограничений принцип решения не меняется: выбираются соответствующие коэффициенты $\alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, M$, такие, что $\sum_{j=1}^M \alpha_j = 1$, и составляются возможные наборы этих коэффициентов, с учетом которых вычисляются «приведенные» затраты. Иными словами, задача остается той же, что и в двумерном случае, увеличивается лишь объем вычислительных работ.

Пример 13.5. Рассматривается та же система, что и в примере 13.2. Стоимости элементов различных участков системы в условных единицах равны соответственно: $c_{11} = 3; c_{21} = 2; c_{31} = 1; c_{41} = 5; c_{51} = 5$, а общая стоимость системы без резерва $C_0^1 = 22$. Пусть дополнительно известны значения веса (также в некоторых условных единицах) этих элементов: $c_{12} = 1; c_{22} = 3; c_{32} = 5; c_{42} = 5; c_{52} = 1$, а общий вес системы без резерва $C_0^2 = 17$. Требуется определить оптимальный резерв на каждом участке системы для трех случаев: а) допустимая стоимость системы 55 ед., а допустимый вес системы 45 ед.; б) допустимая стоимость системы 55 ед., а допустимый вес системы 40 ед.; в) допустимая стоимость системы 55 ед., а допустимый вес системы 30 ед.

Решение. Решение проведем с использованием метода наискорейшего спуска. (Это объясняется лишь соображениями простоты изложения.)

Выберем для коэффициентов α_1 и α_2 шаг изменения, равный 0,25. В этом случае «приведенные» затраты для каждого из типов элементов равны:

$$\begin{aligned} c_1^{(1)} &= 3, c_2^{(1)} = 2, c_3^{(1)} = 1, c_4^{(1)} = 1, c_5^{(1)} = 5; \\ c_1^{(2)} &= 2,5, c_2^{(2)} = 2,25, c_3^{(2)} = 2, c_4^{(2)} = 2, c_5^{(2)} = 4; \\ c_1^{(3)} &= 2, c_2^{(3)} = 2,5, c_3^{(3)} = 3, c_4^{(3)} = 3, c_5^{(3)} = 3; \\ c_1^{(4)} &= 2, c_2^{(4)} = 2,75, c_3^{(4)} = 4, c_4^{(4)} = 4, c_5^{(4)} = 2; \\ c_1^{(5)} &= 1, c_2^{(5)} = 3, c_3^{(5)} = 5, c_4^{(5)} = 5, c_5^{(5)} = 1. \end{aligned}$$

Для $\alpha_2^{(1)} = 0$ задача сводится к одномерной, и можно, не вычисляя значений $g_i^{(1)}(x_i)$, воспользоваться табл. 13.20. Для остальных $\alpha_2^{(i)}$ составлены специальные таблицы значений $g_i^{(i)}(x_i)$ (табл. 13.24—13.27). В этих таблицах в скобках после соответствующих значений $g_i^{(i)}(x_i)$ поставлены номера шагов процесса оптимального решения.

Результирующая табл. 13.28 составлена в компактной форме: на основании табл. 13.20 и 13.24—13.27 и заданных величин c_{i1} и c_{i2} для каждого значения $\alpha_2^{(i)}$ приводятся величины C_1 и C_2 (стоимости и веса) на каждом шаге. По этой таблице можно определить для любого $\alpha_2^{(i)}$ номер шага, на котором произошло нарушение

Таблица 13.24

Значения $g_i^{(2)}(x_i)$ для различных участков при $\alpha_2^{(2)} = 0,25$

$x_i^{(2)}$	$g_1^{(2)}(x_1)$	$g_2^{(2)}(x_2)$	$g_3^{(2)}(x_3)$	$g_4^{(2)}(x_4)$	$g_5^{(2)}(x_5)$
0	—	—	—	—	—
1	0,2351 (2)	0,4230 (1)	0,0474 (12)	0,0500 (11)	0,2290 (3)
2	0,1288 (5)	0,1790 (4)	0,0045	0,0025	0,1175 (6)
3	0,0762 (7)	0,0727 (8)	0,0005	0,0001	0,0679 (9)
4	0,0527 (10)	0,0262 (16)	0	0	0,0412 (13)
5	0,0372 (14)	0,0081	—	—	0,0252 (17)
6	0,0275 (15)	0,0021	—	—	0,0155 (20)
7	0,0206 (18)	0,0005	—	—	0,0095 (22)
8	0,0158 (19)	0,0001	—	—	0,0058
9	0,0123 (21)	0	—	—	0,0035
10	0,0095 (23)	—	—	—	0,0020

Значения $g_i^{(3)}(x_i)$ для различных участков при $\alpha_2^{(3)} = 0,5$

$x_i^{(3)}$	$g_1^{(3)}(x_1)$	$g_2^{(3)}(x_2)$	$g_3^{(3)}(x_3)$	$g_4^{(3)}(x_4)$	$g_5^{(3)}(x_5)$
0	—	—	—	—	—
1	0,2940(4)	0,3818(1)	0,0318(16)	0,3333(2)	0,3060(3)
2	0,1520(7)	0,1622(5)	0,0032	0,0017	0,1568(6)
3	0,0953(8)	0,0655(10)	0,0003	0,0001	0,0910(9)
4	0,0650(11)	0,0236(18)	0	0	0,0548(12)
5	0,0465(13)	0,0073	—	—	0,0357(14)
6	0,0344(15)	0,0019	—	—	0,0207(19)
7	0,0258(17)	0,0005	—	—	0,0127(22)
8	0,0198(20)	0,0001	—	—	0,0077
9	0,0153(21)	0	—	—	0,0047
10	0,0118(23)	—	—	—	0,0027

Таблица 13.26

Значения $g_i^{(4)}(x_i)$ для различных участков при $\alpha_2^{(4)} = 0,75$

$x_i^{(4)}$	$g_1^{(4)}(x_1)$	$g_2^{(4)}(x_2)$	$g_3^{(4)}(x_3)$	$g_4^{(4)}(x_4)$	$g_5^{(4)}(x_5)$
0	—	—	—	—	—
1	0,3918(2)	0,3490(3)	0,0240(19)	0,0250(18)	0,4580(1)
2	0,2028(5)	0,1475(6)	0,0022	0,0013	0,2350(4)
3	0,1270(8)	0,0595(12)	0,0002	0,0001	0,1358(7)
4	0,0866(9)	0,0214(20)	0	0	0,0820(10)
5	0,0620(11)	0,0066	—	—	0,0508(13)
6	0,0458(14)	0,0017	—	—	0,0310(16)
7	0,0344(15)	0,0004	—	—	0,0190(22)
8	0,0264(17)	0,0001	—	—	0,0115
9	0,0204(21)	0	—	—	0,0070
10	0,0158(23)	—	—	—	0,0040

Таблица 13.27

Значения $g_i^{(5)}(x_i)$ для различных участков при $\alpha_2^{(5)} = 1$

$x_i^{(5)}$	$g_1^{(5)}(x_1)$	$g_2^{(5)}(x_2)$	$g_3^{(5)}(x_3)$	$g_4^{(5)}(x_4)$	$g_5^{(5)}(x_5)$
0	—	—	—	—	—
1	0,5870(2)	0,3200(4)	0,0191	0,0200	0,9150(1)
2	0,3042(5)	0,1350(9)	0,0018	0,0010	0,4700(3)
3	0,1900(7)	0,0547(15)	0,0002	0	0,2720(6)
4	0,1300(10)	0,0197	0	—	0,1645(8)
5	0,0930(12)	0,0061	—	—	0,1010(11)
6	0,0687(13)	0,0016	—	—	0,0620(14)
7	0,0516(16)	0,0004	—	—	0,0380(18)
8	0,0396(17)	0	—	—	0,0230(21)
9	0,0306(19)	—	—	—	0,0140
10	0,0237(20)	—	—	—	0,0080

Пошаговые изменения стоимости и веса системы
для различных случаев «приведенных затрат»

Номер шага	$\alpha_2^{(1)}=0$		$\alpha_2^{(2)}=0,25$		$\alpha_2^{(3)}=0,5$		$\alpha_2^{(4)}=0,75$		$\alpha_2^{(5)}=1$		Номер шага	$\alpha_2^{(1)}=0$		$\alpha_2^{(2)}=0,25$		$\alpha_2^{(3)}=0,5$		$\alpha_2^{(4)}=0,75$		$\alpha_2^{(5)}=1$	
	C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2		C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2
0	22	17	22	17	22	17	22	17	22	17	11	54	42	56	38	56	38	61	32	63	32
1	24	20	24	20	24	20	27	18	27	18	12	57	43	57	43	61	39	63	35	66	33
2	26	23	27	21	25	25	30	19	30	19	13	62	44	62	44	64	40	68	36	69	34
3	29	24	32	22	30	26	32	22	35	20	14	65	45	65	45	69	41	71	37	74	35
4	34	25	34	25	33	27	37	23	37	23	15	67	48	68	46	72	42	74	38	76	38
5	37	26	37	26	35	30	40	24	40	24	16	70	49	70	49	73	47	79	39	79	39
6	38	31	42	27	40	31	42	27	45	25	17	75	50	75	50	76	48	82	40	82	40
7	39	36	45	28	43	32	47	28	48	26	18	78	51	78	51	78	51	83	45	87	41
8	44	37	47	31	46	33	50	29	53	27	19	81	52	81	52	83	52	84	50	90	42
9	46	40	52	32	51	34	53	30	55	30	20	86	53	86	53	86	53	86	53	93	43
10	49	41	55	33	53	37	58	31	58	31											

одного из заданных ограничений C_{10} или C_{20} , затем по соответствующей таблице значений $g_i^{(j)}(x_i)$ определяются величины $x_i^{(j)}$.

Для случая а) по табл. 13.28 находим, что ограничение по весу не является критическим, так как даже при $\alpha_2^{(1)}=0$ впервые ограничение нарушается по C_0 , т. е. по тому виду ресурса, который расходовался оптимальным образом. Нарушение ограничения по стоимости происходит на 12-м шаге (см. табл. 13.28). Решением для этого случая является набор чисел: $x_1=3$; $x_2=3$; $x_3=1$; $x_4=1$; $x_5=3$.

Для случая в) по табл. 13.28 находим, что ограничение по стоимости не является критическим, так как даже при $\alpha_2^{(5)}=1$ впервые ограничение нарушается по весу C_0 , т. е. опять по тому виду ресурса, который расходуется оптимальным образом. Решение для этого случая находим из табл. 13.27. Нарушение ограничения происходит на 10-м шаге, т. е. за 9 шагов процесса решения система будет иметь: $x_1=3$; $x_2=2$; $x_3=0$; $x_4=0$; $x_5=4$.

Наиболее сложный случай — случай б), для которого по табл. 13.28 находим условные оптимальные решения для всех значений $\alpha_2^{(j)}$ и сравниваем их.

Далее составим итоговую табл. 13.29, в которой запишем для различных значений $\alpha_2^{(j)}$ номера шагов остановки процесса, израсходованные к этому шагу ресурсы и найденные из табл. 13.18 и 13.24—13.27 условно оптимальные значения $x_i^{(j)}$.

По значениям $x_i^{(j)}$ из табл. 13.27 нетрудно для каждого условно оптимального решения вычислить величину $L = - \sum_{i=1}^m \ln R_i(x_i)$, которая заносится в последний столбец табл. 13.29. По результатам сравнения значений L в качестве решения следует выбрать: $x_1=4$; $x_2=3$; $x_3=0$; $x_4=0$; $x_5=3$.

Т а б л и ц а 13.29

Итоговая таблица значений x_i и L

$\alpha_2^{(j)}$	Номер шага остановки процесса	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	L
0	9	2	3	1	1	2	1,509
0,25	10	4	3	0	0	3	2,112
0,50	10	3	3	0	1	3	1,142
0,75	9	4	2	0	0	3	1,275
1,00	9	3	2	0	0	4	1,241

Вообще говоря, это решение может и не быть оптимальным, так как выбранная серия значений $\alpha_2^{(j)}$ достаточно груба. Для уточнения решения можно взять значения $\alpha_2=0,2$ и $\alpha_2=0,3$. Однако следует иметь в виду, что небольшие изменения α_2 могут привести к прежнему решению из-за целочисленности переменных x_i .

13.5.2. Эвристические решения. Точные способы решения задачи оптимального резервирования при наличии нескольких ограничивающих факторов весьма трудоемки, поэтому ниже приводится несколько простых эвристических алгоритмов, дающих на практике достаточно хорошие результаты.

1. Метод частной оптимизации с контролем ограничений. Выбирается j -й фактор и производится оптимизация с его учетом при пошаговом выполнении всех остальных ограничений, причем останов процесса производится при нарушении хотя бы одного из ограничений. Полученное в результате решения $R(X_j^*)$ и само решение X_j^* запоминаются. Процедура повторяется для всех $j = 1, \dots, M$. В качестве квазиоптимального решения принимается

$$R = \max_{1 \leq j \leq M} R(X_j^*).$$

Заметим, что если в процессе решения задачи частная оптимизация проводилась по некоторому j -му параметру и ограничение превышалось именно по C_{j0} , то полученное решение является оптимальным, так как это означает, что остальные ограничения не являются критическими.

2. Метод «отражающего экрана». Существо метода сводится к следующему: если на некотором N -м шаге процесса частной оптимизации по j -му параметру имеет место нарушение условия $C_j^{(N)} < C_{j0}$, то из решения исключают самые «дорогие» элементы этого j -го типа, пока не образуется некоторый запас по параметру C_j . Далее в качестве параметра для частной оптимизации выбирается именно j -й параметр. Этот процесс смены параметров частной оптимизации повторяют до тех пор, пока не будет получено удовлетворительное решение.

3. Метод выбора наиболее «жесткого» ограничения. В этом случае на N -м шаге процесса дополнительно формируется коэффициент жесткости ограничения по правилу

$$k_j^{(N)} = (C_j^0 - C_j^{(N)}) / \Delta_j.$$

В качестве величины Δ_j можно выбирать среднее значение j -го параметра элемента: $\Delta_j = m^{-1} (c_{j1} + \dots + c_{jm})$ или величину $\Delta_j = 0,5 (\max_{1 \leq i \leq m} c_{ji} + \min_{1 \leq i \leq m} c_{ji})$, или какую-либо другую близкую по смыслу величину. Иными словами, этот коэффициент показывает в некотором смысле «среднее» оставшееся число шагов до исчерпания данного типа ресурса, если процесс проводить, не обращая внимания на специальную экономию этого ресурса за счет организации процедуры оптимизации.

Выбор параметра оптимизации на каждом шаге осуществляется в направлении, характеризуемом наименьшим значением величины $k_j^{(N)}$.

13.6. МНОГОФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА ПРИ ОДНОМ ОГРАНИЧЕНИИ

Точное решение этой задачи может быть получено введением «приведенного» показателя надежности

$$\tilde{R}(\alpha) = \sum_{j=1}^k R_j(x_1, \dots, x_n) \alpha_j,$$

где $0 \leq \alpha_j \leq 1$; $\sum_{j=1}^k \alpha_j = 1$.

Для решения этой задачи может быть предложен также алгоритм приближенного решения, который дает точные результаты в двух предельных случаях: когда каждая из функций выполняется при работоспособности всех m элементов системы и когда для выполнения каждой функции требуется работоспособность совершенно различных (непересекающихся) подмножеств элементов. Для промежуточных случаев точность алгоритма оценить не удастся.

Приближенное решение можно записать следующим образом:

а) решается k задач вида

$$\min \left\{ \sum_{i \in G_j} c_i x_i \mid \prod_{i \in G_j} R_i(x_i) \geq R_j^0; j=1, \dots, k \right\};$$

находятся соответствующие оптимальные значения $x_1^j, \dots, x_m^j$ для каждой j -й задачи любым из методов, описанных выше;

б) для каждого i -го элемента находятся наибольшие значения

$$x_i^* = \max_{1 \leq j \leq k} x_i^j;$$

в) для каждого подмножества элементов G_j находится часть (обозначим ее через G_j^{**}), которая нужна только для выполнения именно j -й функции. Через G_j^* обозначим оставшуюся часть подмножества G_j ;

г) для каждого подмножества G_j^* находится значение

$$\prod_{i \in G_j^*} R_i(x_i^*) = R_j^*.$$

П р и м е ч а н и е. Если в подмножество G_j^* не входит ни один элемент, т. е. если j -я функция выполняется при помощи независимой группы элементов, то положим $R_j^* = 1$;

д) для каждого множества G_j вычисляется значение

$$R_j^{**} = R_j / R_j^*,$$

которое представляет собой требование к вероятности безотказной работы элементов, принадлежащих подмножеству G_j ;

е) решается дополнительно k задач вида

$$\min \left\{ \sum_{i \in G_j^{**}} c_i x_i \mid \prod_{i \in G_j^{**}} R_i(x_i) \geq R_j^{**}, j=1, \dots, k \right\}.$$

Найденные значения оставшихся x_j^{**} принимаются в качестве решения.

Таким образом, в качестве решения принимаются значения x_i^* , найденные в п. б), и значения x_i^{**} , найденные в п. е).

13.7. ПОЛУЧЕНИЕ ОЦЕНОК СВЕРХУ В ЗАДАЧАХ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

13.7.1. Предварительные замечания. Задачу оптимального резервирования можно рассматривать как задачу математического программирования. В теории математического программирования для получения условий оптимальности решений некоторой исходной задачи и для построения алгоритмов ее решения часто строится некоторая другая задача, которую обычно называют «двойственной к исходной». При построении двойственной задачи используются множители Лагранжа. Решение двойственной задачи позволяет находить оценки сверху для труднорешаемых задач большой размерности.

13.7.2. Метод множителей Лагранжа. Запишем задачу (13.2) как задачу математического программирования:

$$\max_{x \in X} \left\{ \sum_{j=1}^n \ln R_j(x_j) \mid c_i - \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j \geq 0, i=1, 2, \dots, m \right\}, \quad (13.12)$$

где $X = \{x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \mid M \geq x_j \geq 0, j=1, 2, \dots, n, x_j \text{ — целые}\}$ (M — столь большое положительное число, что для любого x , удовлетворяющего «стоимостным» ограничениям задачи (13.12), выполняется условие $M \geq x \geq 0$).

Обозначим оптимальное решение задачи (13.12) через x^0 , и пусть $W^0 = \sum_{j=1}^n \ln R_j(x_j^0)$. Здесь и далее будем предполагать, что $x^0 \neq 0$.

Введем функцию Лагранжа для задачи (13.12):

$$F(x, y) = \sum_{j=1}^n \ln R_j(x_j) + \sum_{i=1}^m y_i \left(c_i - \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j \right), \quad (13.13)$$

где $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ — m -мерный вектор-строка (множители Лагранжа). Рассмотрим для задачи (13.12) двойственную задачу, которая состоит в нахождении

$$\omega^* = \min_{y \geq 0} \max_{x \in X} F(x, y). \quad (13.14)$$

Из теории математического программирования известно, что

$$W^0 \leq \omega^*.$$

Следовательно, решение задачи (13.14) позволило бы найти оценку сверху для оптимального значения функционала исходной задачи (13.12).

Для решения задачи введем функцию

$$\psi(y) = \max_{x \in X} F(x, y). \quad (13.15)$$

Можно показать, что $\psi(y)$ — кусочно-линейная, выпуклая вниз функция.

13.7.3. Алгоритм решения. Возьмем некоторый вектор $\tilde{y} \geq 0$ и обозначим соответствующее ему решение задачи (13.15) через $\tilde{x}$, т. е.

$$F(\tilde{x}, \tilde{y}) = \max_{y \in X} F(x, \tilde{y}) = \psi(\tilde{y}).$$

Возьмем любой другой вектор $y \geq 0$ и рассмотрим

$$\begin{aligned} \psi(y) - \psi(\tilde{y}) &= \max_{x \in X} F(x, y) - \max_{x \in X} F(x, \tilde{y}) = \\ &= \max_{x \in X} F(x, y) - F(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq F(\tilde{x}, y) - F(\tilde{x}, \tilde{y}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\psi(y) \geq F(\tilde{x}, y) \quad (13.16)$$

для любого $\tilde{x} \in \{x \in X | F(x, \tilde{y}) = \max_{x \in X} F(x, \tilde{y})\}$.

В силу определения (13.13) неравенство (13.16) означает, что гиперплоскость

$$z = \sum_{j=1}^n \ln R_j(\tilde{x}_j) + \sum_{i=1}^m y_i \left(c_i - \sum_{j=1}^n c_{ij} \tilde{x}_j \right)$$

является опорной к поверхности функции $\psi(y)$ в точке $\tilde{y}$. Неравенство (13.16) было положено в основу следующего алгоритма решения задачи (13.14).

13.7.4. Описание алгоритма. Предположим, что проведено k итераций алгоритма, рассмотрим $(k+1)$ -ю итерацию.

Шаг 1. Решаем задачу линейного программирования $L(k)$:

$$\begin{aligned} \min_{\omega, y} \left\{ \omega \mid \omega \geq \sum_{j=1}^n \ln R_j(x_j^s) + \sum_{i=1}^m y_i \left(c_i - \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j^s \right), y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, s = \right. \\ \left. = 1, 2, \dots, k \right\}. \end{aligned}$$

Здесь x_j^s — точки, полученные на предыдущих k итерациях алгоритма. Обозначим через ω^{k+1}, y^{k+1} решение задачи $L(k)$.

Следует отметить, что каждая строка — ограничение в задаче $L(k)$ — определяет опорную гиперплоскость к поверхности функции $\psi(y)$ (см. (13.16)). Таким образом, алгоритм можно рассматривать как применение метода касательных для поиска экстремума недифференцируемой функции $\psi(y)$.

Шаг 2. Найдем очередное x^{k+1} как решение задачи:

$$\begin{aligned} F(x^{k+1}, y^{k+1}) &= \max_{x \in X} F(x, y^{k+1}) = \max_{x \in X} \left\{ \sum_{j=1}^n \ln R_j(x_j) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^m y_i^{k+1} \left(c_i - \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j^{k+1} \right) \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^m y_i^{k+1} c_i + \sum_{j=1}^n \max \left\{ \ln R_j(x_j^{k+1}) - \sum_{i=1}^m y_i^{k+1} c_{ij} x_j \right\}. \end{aligned} \quad (13.17)$$

Введем обозначения $\Delta \ln R_j(x_j) = \ln R_j(x_j + 1) - \ln R_j(x_j)$, а через x^{k+1} будем обозначать решение задачи (13.17), соответствующее заданному y^{k+1} . Тогда

$$x_j^{k+1} = \begin{cases} 0, & \text{если } \Delta \ln R_j(0) < \sum_{i=1}^m y_i^{k+1} c_{ij}, \\ x_j + 1, & \text{если } \Delta \ln R_j(x_j + 1) < \sum_{i=1}^m y_i^{k+1} c_{ij} \leq \Delta \ln R_j(x_j) \text{ для } x_j \leq M-1, \\ M, & \text{если } \sum_{i=1}^m y_i^{k+1} c_{ij} \leq \Delta \ln R_j(M). \end{cases}$$

Шаг 3. При выполнении условия $\omega^{k+1} = F(x^{k+1}, y^{k+1})$ в работе алгоритма происходит останов, при этом полагаем $\omega^* := \omega^{k+1}$; если же $\omega^{k+1} < F(x^{k+1}, y^{k+1})$, то добавляем к условиям задачи $L(k)$ новую строку-ограничение, которая соответствует вновь найденному вектору x^{k+2} . После этого начинается $(k+2)$ -я итерация алгоритма, т. е. происходит возвращение на шаг 1, и т. д.

Функция $\psi(y)$ — кусочно-линейная, поэтому за конечное число шагов будет решена задача (13.14) и найдена оценка сверху ω^* .

Напомним, что методы, описанные в предыдущих параграфах, позволяют находить допустимые решения, близкие к оптимальному, т. е. позволяют получить оценку снизу для оптимального значения функционала. Пусть для некоторой конкретной задачи (13.12), имеющей неизвестное оптимальное значение функционала W^0 , получена верхняя оценка ω^* и найдено некоторое допустимое решение x_n и $W_n = \sum_{j=1}^n \ln R_j(x_{jn})$. Тогда имеем $\omega^* \geq W^0 \geq W_n$, а величину $\delta = (\omega^* - W_n)/W_n$ можно использовать для оценки погрешности найденного решения x_n .

При практическом решении задач, содержащих от двух до четырех ограничений и до 3000 переменных, δ не превышала $3 \cdot 10^{-2}$. В ряде задач было получено точное решение.

13.8. ПРИБЛИЖЕННЫЙ АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО ВВЕДЕНИЯ ИЗБЫТОЧНОСТИ В СИСТЕМЫ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ

Рассмотрим некоторую систему, состоящую из n элементов. Допустим, что каждый i -й элемент может находиться всего в двух состояниях: в состоянии работоспособности ($S_i = 1$) и в состоянии отказа ($S_i = 0$). Тогда в произвольный фиксированный момент времени система может находиться в одном из 2^n различ-

ных состояний $S = (S_1, S_2, \dots, S_n)$, где S_i принимают значения 0 или 1. Показатель эффективности E сложной системы (см. гл. 8) определяется по формуле

$$E = \sum_S H_S \Phi_S, \quad (13.18)$$

где H_S — вероятность S -го состояния системы; Φ_S — показатель условной эффективности системы в S -м состоянии, суммирование производится по всем индексам S .

Вероятность H_S может быть легко вычислена в предположении независимости отдельных элементов:

$$H_S = \prod_{i=1}^n r_i^{S_i} (1-r_i)^{1-S_i}, \quad (13.19)$$

где r_i — вероятность работоспособного состояния i -го элемента в фиксированный момент времени.

Будем рассматривать систему, элементы которой могут быть выполнены в нескольких различных вариантах; например, i -й элемент может иметь варианты $i_1, i_2, \dots, i_j, \dots$. Каждый j -й вариант i -го элемента характеризуется двумя показателями: надежностью $r_i(i_j)$ и стоимостью $c_i(i_j)$. Предполагается, что для каждого элемента варианты образуют выпуклую вверх доминирующую последовательность.

Рассматривается задача оптимального распределения имеющейся стоимости между элементами системы с тем, чтобы добиться максимального показателя эффективности E .

Предварительно определим зависимость показателя E от надежности каждого из элементов системы. Используя (13.19), выражение (13.18) нетрудно привести к виду

$$E = r_i \left(\sum_{S^*} H_{S^*} (\Phi_{S^*, 1} - \Phi_{S^*, 0}) \right) + \sum_{S^*} H_{S^*} \Phi_{S^*, 0}, \quad (13.20)$$

где S^* — состояние системы без учета i -го элемента; $S^*, 0$ и $S^*, 1$ — состояния системы, когда все элементы, исключая i -й, находятся в состоянии S^* , а i -й находится в состоянии $S_i = 0$ или $S_i = 1$ соответственно. Понятно, что величины H_{S^*} не зависят от r_i .

Таким образом, из (13.20) видно, что показатель эффективности E является линейной функцией r_i .

Решение задачи оптимального повышения надежности элементов для увеличения показателя эффективности E системы при ограничениях на суммарные затраты C^0 (или для решения обратной задачи: минимизации суммарных затрат на систему при ограничении на показатель E^0) предполагается осуществить методом наискорейшего спуска. Процедура почти полностью совпадает с той, которая описана при решении задачи оптимального резервирования. Для определения элемента, надежность которого целесообразнее всего повышать с точки зрения оптимизации показателя эффективности системы в целом, вычисляем величины

$$\gamma = (E_i^{(1)} - E^{(0)}) / (C_i^{(1)} - C^0), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где $E_i^{(1)}$ и $C_i^{(1)}$ — соответственно значения показателя эффективности и стоимости системы на первом шаге оптимального процесса при условии, что с целью повышения надежности вариант i_0 заменен вариантом i_1 , $i = 1, 2, \dots, n$.

Далее определяется номер элемента k , соответствующий величине $\gamma_k = \max_{1 \leq i \leq n} \gamma_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. У данного элемента и производится замена варианта k_0 на k_1 и считается, что начальное состояние перед вторым шагом характеризуется $E^1 = E_k^1$ и $C^1 = C_k^1$. Подобный процесс продолжается далее, т. е. составляются

$$\gamma_i^{(2)} = (E_i^{(2)} - E^{(1)}) / (C_i^{(2)} - C^1), \quad i = 1, 2, \dots, n, \text{ и т. д.}$$

На N -м шаге процесса система состоит из следующих вариантов элементов: $1_{j_1(N)}, 2_{j_2(N)}, \dots, n_{j_n(N)}$ (здесь $j_i(N)$ — индекс, означающий порядковый номер варианта i -го элемента на N -м шаге процесса), а стоимость ее

$$C^{(N)} = \sum_{i=1}^n C_i(i_{j_i(N)}). \quad (13.21)$$

(Ясно, что $N = \sum_{i=1}^n j_i(N)$, так как на каждом шаге процесса один из элементов меняет номер варианта на единицу).

Значения $\gamma_i^{(N+1)}$ можно легко вычислить, используя выражения (13.20) и (13.21):

$$\gamma_i^{(N+1)} = \frac{r_i(i_{\gamma_i(N+1)}) - r_i(i_{j_i(N)})}{C_i(i_{j_i(N+1)}) - C_i(i_{j_i(N)})} \sum_{S^*} (\Phi_{S^*,1} - \Phi_{S^*,0}) H_{S^*}.$$

Если элементы системы имеют высокие показатели надежности, такие, что $1 - r_i \ll 1/n$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$, то можно записать

$$\sum_{S^*} (\Phi_{S^*,1} - \Phi_{S^*,0}) H_{S^*} \approx \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (\Phi_E - \Phi_{E^*, S_k=0}) (1 - r_k),$$

где Φ_E — условный показатель эффективности системы при условии, что все элементы ее работоспособны, т. е. при $S_1 = 1, S_2 = 1, \dots, S_n = 1$; $\Phi_{E^*, S_k=0}$ — условный показатель эффективности системы при условии, что все элементы ее, кроме k -го, работоспособны, т. е. при $S_1 = 1, S_2 = 1, \dots, S_{k-1} = 1, S_k = 0, S_{k+1} = 1, \dots, S_n = 1$.

Процесс продолжается до тех пор, пока либо не будет достигнуто требуемое значение E^0 , либо не будет превышено допустимое значение C^0 .

Глава 14

ОБЕСПЕЧЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ЗАПАСНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

14.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

14.1.1. Постановка задачи. Для обеспечения высокой эксплуатационной надежности объектам (здесь и далее в этой главе под объектом понимается сложная радиоэлектронная система) придается система обеспечения их работоспособности, которая включает диагностические и ремонтные средства, комплекты запасных элементов, средства доставки запасных элементов и т. д. Условно назовем совокупность всех запасов конструктивных элементов, входящих в систему обеспечения работоспособности объекта, системой ЗИП.

Возможная нехватка запасных элементов увеличивает среднее время замены отказавшего элемента исправным запасным (среднее время ремонта изделия), причем ограниченность объема системы ЗИП может весьма существенно сказаться на значении показателя надежности объекта, и ее нельзя не учитывать при расчетах надежности.

Практика показывает, что затраты на систему ЗИП сравнимы с затратами на сам объект, поэтому возникает задача проектирования системы ЗИП, обеспечивающей заданный уровень надежности объекта при минимальных затратах.

14.1.2. Структура системы ЗИП. В практике обеспечения объектов запасными элементами используются разнообразные и сложные структуры систем ЗИП,

но, как правило, любую практическую используемую систему ЗИП можно построить из следующих комплектов.

Одиночный комплект ЗИП придается непосредственно объекту с целью обеспечения его надежности при длительном использовании.

Групповой комплект ЗИП придается группе объектов для пополнения одиночных комплектов по мере их расходования или для обеспечения надежности изделий по тем типам элементов, которые отсутствуют в номенклатуре одиночных комплектов ЗИП.

Ремонтный комплект ЗИП (комплект ЗИП ремонтного органа) придается ремонтному органу (РО) с целью обеспечения его работоспособности. Функционирование РО заключается в устранении отказов в неисправных элементах за счет выявления и замены в них отказавших более мелких конструктивных элементов.

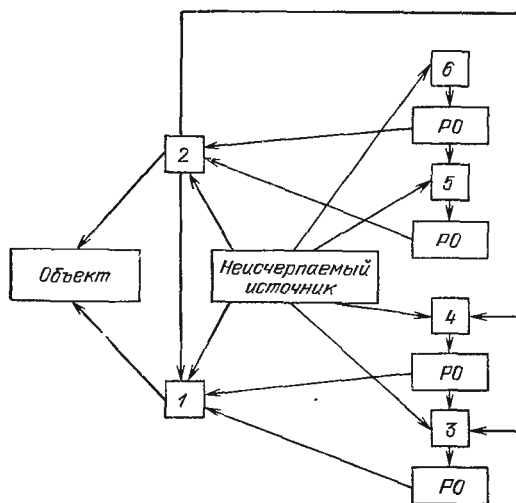


Рис. 14.1. Общая структура системы ЗИП

Рис. 14.2. Система ЗИП, состоящая только из одиночного комплекта



Для технологической базы современных объектов характерно наличие трех уровней сложности элементов: ТЭЗ1 (ТЭЗ — типовой элемент замены) — самый мелкий конструктивный элемент, ремонту не подлежит; ТЭЗ2 состоит из ТЭЗ1, ремонтируется за счет замены отказавшего ТЭЗ1; ТЭЗ3 — состоит из ТЭЗ2, ремонтируется за счет замены ТЭЗ2. Соответственно РО для ремонта ТЭЗ3 должен быть снабжен запасом ТЭЗ2, а РО для ремонта ТЭЗ2 — запасом ТЭЗ1.

Поскольку мы ограничиваемся тремя уровнями сложности элементов и двумя уровнями в иерархии системы ЗИП (одиночный, групповой), можно построить общую структуру системы ЗИП (рис. 14.1). Такая структура включает 6 комплектов: одиночный (1), групповой (2) и 4 ремонтных, из которых 2 (3, 4) придаются РО, совмещенным с изделием, а 2 других (5, 6) — РО, совмещенным с групповым комплектом. Одиночный и групповой комплекты в общем случае содержат запасы ТЭЗ1, ТЭЗ2 и ТЭЗ3, причем некоторые запасные элементы отсутствуют в одиночном комплекте и поставляются объекту непосредственно из группового комплекта. Ремонтные комплекты 3, 5 содержат запасы ТЭЗ2, которые могут пополняться за счет ремонтных комплектов 4, 6, а также за счет неисчерпаемого источника. Ремонтные комплекты 4, 6 содержат запасы ТЭЗ1, которые пополняются за счет неисчерпаемого источника (запасы в комплектах 3, 4 могут также пополняться за счет группового). Запасы элементов в одиночном комплекте могут пополняться за счет комплектов 2, 3, 4 и неисчерпаемого источника. На рис. 14.1 стрелками указаны возможные направления движения запасных элементов.

Практически реализованные структуры систем ЗИП являются частными случаями этой общей структуры. Рассмотрим несколько типичных структур системы ЗИП.

1. Система ЗИП, обеспечивающая надежность объекта, состоит только из одиночного комплекта. В этом случае предполагается, что по мере своего расходования одиночный комплект (ОК) ЗИП пополняется из неисчерпаемого источника (рис. 14.2).

2. Система диагностики определяет неисправность объекта с точностью до ТЭЗ3. Запас ТЭЗ по всей номенклатуре объекта составляет одиночный комплект ЗИП. При объекте имеются два РО: РО1 позволяет ремонтировать ТЭЗ3 путем замены в них отказавших ТЭЗ2, а РО2 — ТЭЗ2 путем замены в них отказавших ТЭЗ1. Такая система ЗИП состоит из трех комплектов: запас ТЭЗ3 — одиночный комплект (ОК); запас ТЭЗ2 — первый ремонтный комплект (РК1); запас ТЭЗ1 — второй ремонтный комплект (РК2) (рис. 14.3).

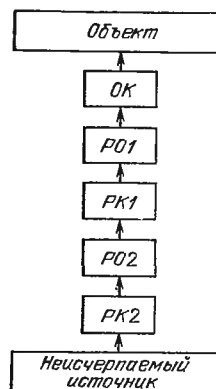


Рис. 14.3

Рис. 14.3. Структура системы ЗИП объекта, совмещенного с двумя ремонтными органами

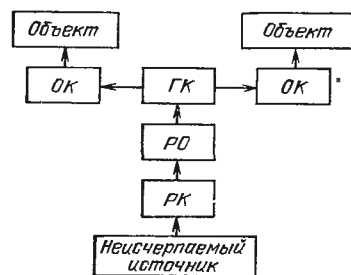


Рис. 14.4

Рис. 14.4. Структура системы ЗИП группы объектов

3. Объект ремонтируется за счет замены в нем отказавших ТЭЗ2. Одиночный комплект ЗИП — запас ТЭЗ2 по части номенклатуры объекта — непрерывно пополняется из группового комплекта ЗИП. Групповой комплект ЗИП содержит запасы ТЭЗ2 по всей номенклатуре объекта и поставляет непосредственно объектам те элементы, запасы которых отсутствуют в одиночных комплектах. Групповой комплект совмещен с РО, позволяющим ремонтировать ТЭЗ2 путем замены в них неисправных ТЭЗ1. В этом случае система ЗИП, приданная группе из S идентичных объектов, состоит из $S+2$ комплектов ЗИП: S идентичных одиночных комплектов — запасы ТЭЗ2 на всех объектах группы; групповой комплект (ГК) — обменный фонд для непрерывного пополнения S одиночных комплектов и восстановления работоспособности объектов; ремонтный комплект (РК) — запас ТЭЗ1 для ремонта ТЭЗ2 (рис. 14.4).

14.1.3. Показатели достаточности системы ЗИП. Если объект в ходе эксплуатации предполагает использование системы ЗИП, то имеет смысл говорить не о показателе надежности самого объекта, а о показателе надежности пары «объект—система ЗИП». Однако существующая практика проектирования надежных объектов предполагает раздельное проектирование объекта и приданной ему системы ЗИП. Поэтому вводится показатель достаточности системы ЗИП, характеризующий снижение надежности пары «объект—конкретная система ЗИП» по сравнению с надежностью пары «объект—бесконечная система ЗИП».

Показателем достаточности системы ЗИП может являться среднее время задержки Δ^* в исполнении заявки на запасной элемент; задержка вызывается возможным отсутствием необходимого запасного элемента в системе ЗИП.

Из всех параметров, определяющих надежность объекта, ограниченность системы ЗИП сказывается только на времени ремонта объекта. Время ремонта объекта увеличивается при отсутствии в системе ЗИП необходимого запасного элемента в тот момент, когда он понадобился. Среднее время ремонта объекта, снабженного конкретной системой ЗИП, $\tau = \tau_{\infty} + \Delta^*$, где τ_{∞} — среднее время ремонта при наличии запасного элемента; Δ^* — среднее время задержки в исполнении заявки на запасной элемент. Время τ_{∞} не зависит от системы ЗИП, оно определено к этапу проектирования системы ЗИП, Δ^* , являющееся показателем достаточности системы ЗИП, определяется параметрами функционирования и структурой системы ЗИП.

При проектировании объекта требования к его надежности выражаются заданием R_0 требуемого значения показателя надежности.

После того как закончено проектирование собственно объекта, можно считать известными расчетные значения функции $R(\tau)$ — показателя надежности объекта в зависимости от среднего времени ремонта при условии, что необходимый запасной элемент всегда имеется.

Тогда требования к системе ЗИП, обеспечивающей заданную надежность объекта, выражаются ограничением на показатель достаточности системы ЗИП:

$$\Delta^* \leq \Delta_0 = \tilde{\tau} - \tau_{\infty}, \quad (14.1)$$

где $\tilde{\tau}$ — корень уравнения $R(\tau) = R_0$; τ_{∞} — заданное среднее время замены отказавшего элемента объекта исправным запасным.

Задача проектирования системы ЗИП сводится к отысканию такой системы ЗИП, показатель достаточности которой будет не больше Δ_0 .

Пример 14.1. Объект представляет собой резервную группу идентичных элементов, содержащую m основных и один резервный элемент. Будем считать, что элементы не отказывают, находясь в резерве, что контроль неисправностей полный, а переключение на резерв, если он есть, мгновенное. Будем также предполагать, что восстановление отказавших элементов неограниченное. Пусть показателем надежности объекта выбрано T — средняя наработка между отказами и требования к надежности объекта выражены неравенством $T \geq T_0$. Необходимо определить требования к достаточности ЗИП.

Решение. Зависимость показателя надежности объекта от среднего времени его ремонта в этом случае $T(\tau) = (m\lambda\tau + 1)/\tau m^2\lambda^2$, где λ — интенсивность отказов одного работающего элемента; τ — среднее время замены отказавшего элемента резервной группы запасным.

Пусть τ_{∞} — среднее время замены отказавшего элемента запасным при условии, что запасной имеется. Тогда требования к системе ЗИП, обеспечивающей заданную надежность объекта, выражаются неравенством $\Delta^* \leq \Delta^0 = \tilde{\tau} - \tau_{\infty} = 1/T_0 (m\lambda)^2 - \tau_{\infty}$, поскольку $\tilde{\tau} = 1/T_0 (m\lambda)^2$ — корень уравнения $T(\tau) = T_0$.

Таким образом, какой бы показатель надежности объекта не был выбран, удастся выделить требования к системе ЗИП из требований к надежности пары «объект—система ЗИП». Однако здесь возникает некоторая вычислительная трудность, связанная с необходимостью решать уравнение $R(\tau) = R_0$. В частном случае, когда показателем надежности объекта выбран коэффициент готовности, эту трудность удастся преодолеть, введя другой показатель достаточности системы ЗИП — коэффициент готовности системы ЗИП.

Коэффициентом готовности системы ЗИП называется средняя по времени вероятность того, что система ЗИП не находится в состоянии отказа:

$$K^* = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P^*(t) dt = \frac{T^*}{T^* + \tau^*},$$

где $P^*(t)$ — вероятность того, что в момент t система ЗИП не находится в состоянии отказа; T^* — среднее время между отказами системы ЗИП; τ^* — средняя продолжительность одного отказа системы ЗИП. (Здесь индексом * отмечены показатели системы ЗИП.)

Отказом системы ЗИП условно называется такое состояние пары «объект—система ЗИП», при котором объект полностью или частично потерял работоспособность из-за отказа одного из составляющих его элементов, а система ЗИП не может предоставить нужного запасного элемента. Из определения следует, что отказ системы ЗИП не обязательно совпадает с отказом выполнить требование на элемент, а лишь с таким отказом в выполнении требования, который ведет к простоя объекта.

Пусть показателем надежности пары «объект—система ЗИП» выбран результирующий коэффициент готовности $K_{\Sigma} \approx K_{\infty} K^*$, где K_{∞} — коэффициент готовности объекта при бесконечной системе ЗИП.

Задание требований к системе ЗИП в этом случае сводится к неравенству

$$K^* \geq K_0^* = R_0/K_{\infty}, \quad (14.2)$$

где R_0 — требуемое значение коэффициента готовности объекта с учетом реальной системы ЗИП.

Простота, а также практическая важность этого случая заставляет рассматривать коэффициент готовности системы ЗИП как второй показатель достаточности системы ЗИП.

14.1.4. Дополнительные обозначения.

M — число разных комплектов в системе ЗИП заданной структуры;

$N_j, j = 1, \dots, M$ — количество типов элементов в j -м комплекте;

N — количество типов элементов в данном комплекте;

Δ^*, K^* — показатели достаточности системы ЗИП;

Δ_j^* — показатель достаточности j -го комплекта;

Δ_{ij}^* — показатель достаточности запаса элементов i -го типа в j -м комплекте;

P_{ij} — средние по времени значения вероятностей наличия в данном комплекте очереди из j неудовлетворенных заявок на элементы i -го типа;

Λ — среднее количество заявок, поступающих в данный комплект в единицу времени;

Λ_i — среднее количество заявок на элементы i -го типа, поступающих в данный комплект в единицу времени;

Δ_0, K_0 — требуемые значения показателей достаточности ЗИП;

$$Q = \Delta^* \text{ или } Q = -\ln K^*; Q_0 = \Delta_0 \text{ или } Q_0 = -\ln K_0,$$

в зависимости от выбора показателя достаточности ЗИП в конкретной задаче;

$n_j = (n_{ij}, i = 1, \dots, N_j)n_{ij}$ — начальное количество запасных элементов i -го типа в j -м комплекте;

$n = (n_i, i = 1, \dots, N)$; n_i — начальное количество запасных элементов i -го типа в данном комплекте;

n — начальное количество запасных элементов данного типа в данном комплекте;

c_{ij} — затраты на один элемент i -го типа в номенклатуре j -го комплекта;

$m(l)$ — количество основных (резервных) элементов данного типа в объекте;

$\lambda(\lambda', \sigma)$ — интенсивность отказов основного (резервного, запасного) элемента данного типа;

α_i — тип стратегии пополнения запаса элементов i -го типа в данном комплекте;

T_{i1}, T_{i2} — числовые параметры стратегий пополнения запаса элементов i -го типа;

T_{Π} — период пополнения запаса элементов данного типа;

T_p — среднее время ремонта одного элемента данного типа;
 T_d — среднее время доставки элементов данного типа из источника пополнения;
 $T_{эд}$ — среднее время экстренной доставки элементов из источника пополнения;
 k — уровень пополнения запаса элементов данного типа;
 N_0 — количество типов элементов объекта;
 $\Lambda_0 = \sum_{i=1}^{N_0} \Lambda_{0i}$, Λ_{0i} — интенсивность отказов элементов i -го типа в объекте.

14.2. ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ ЗИП

Оптимальное проектирование системы ЗИП сводится к отысканию начальных количеств запасных элементов по всей номенклатуре всех комплектов, образующих систему ЗИП заданной структуры, с тем, чтобы в зависимости от выбранного показателя достаточности выполнялось либо неравенство (14.1), либо неравенство (14.2) при минимуме общих затрат на ЗИП.

Приведем несколько примеров постановки задачи оптимального проектирования системы ЗИП.

1. Проектирование одиночного комплекта ЗИП, минимального по общему количеству запасных элементов и обеспечивающего заданное значение коэффициента готовности пары «объект—система ЗИП». Эта задача сводится к отысканию $n_1 \geq 0, \dots, n_N > 0$, реализующих

$$\min_n \left\{ \sum_{i=1}^N n_i \mid K^*(n) \geq K_0 = R_0/K_\infty \right\}, \quad (14.3)$$

где K_∞ — коэффициент готовности объекта при бесконечном ЗИП.

2. Оптимальное проектирование группового и S пополняемых из него идентичных одиночных комплектов ЗИП. Заданная структура системы ЗИП предполагает наличие двух разных комплектов ЗИП ($M = 2$): одиночного ($j = 1$) и группового ($j = 2$). Пусть показателем затрат на систему ЗИП выбрана общая стоимость всех запасных элементов, а показателем достаточности — среднее время задержки в исполнении заявки на запасной элемент. Тогда оптимальное проектирование системы ЗИП такой структуры сводится к отысканию $n_1 > 0, n_2 > 0$, реализующих

$$\min_{n_1, n_2} \left\{ \sum_{i=1}^N c_i (n_{i2} + S n_{i1}) \mid \Delta^*(n_1, n_2) \leq \Delta_0 \right\} \quad (14.4)$$

(c_i — стоимость одного элемента i -го типа).

3. Оптимальное проектирование системы ЗИП объекта, совмещенного с РО. Заданная структура системы ЗИП включает два разных комплекта ($M = 2$): одиночный ($j = 1$), приданный объекту, и ремонтный ($j = 2$), обеспечивающий работоспособность РО. Пусть показателем затрат на систему ЗИП выбран общий объем всех запасных элементов, а показателем достаточности — коэффициент готовности системы ЗИП. Тогда задача оптимального проектирования такого двухкомплектного ЗИП сводится к отысканию $n_1 > 0, n_2 > 0$, реализующих

$$\min_{n, n_2} \left\{ \sum_{i=1}^{N_1} c_{i1} n_{i1} + \sum_{i=1}^{N_2} c_{i2} n_{i2} \mid K^*(n_1, n_2) \geq K_0 \right\}, \quad (14.5)$$

(c_{ij} — объем одного элемента i -го типа по номенклатуре j -го комплекта).

Рассмотренные примеры показывают, что задачи оптимального проектирования системы ЗИП весьма разнообразны, но в то же время ясно, что при их решении возникает две проблемы: вычисление показателей достаточности системы ЗИП K^* и Δ^* и решение целочисленных задач математического программирования типа (14.3)—(14.5).

Любой комплект ЗИП состоит из запасов элементов различных типов. Эти запасы в зависимости от типа элементов и структуры системы ЗИП изменяются по-разному: различны как потоки заявок, поступающих в комплект ЗИП на элементы различных типов, так и стратегии пополнения запасов, т. е. правила восстановления запасов по мере их расходования.

На практике в системе обеспечения объектов запасными элементами используются следующие стратегии пополнения запасов.

1. Периодическое пополнение ($\alpha = 1$). При периодическом пополнении запас элементов данного типа периодически, через заранее заданные фиксированные периоды пополнения восстанавливается до начального уровня. Периодическое пополнение является самой распространенной на практике стратегией пополнения для всех видов комплектов ЗИП. Стратегия периодического пополнения запаса элементов i -го типа характеризуется одним числовым параметром $T_{i1} = T_n$.

2. Периодическое пополнение с экстренными поставками ($\alpha = 2$). При использовании этой стратегии помимо планового периодического восстановления, происходит еще и внеплановое восстановление запаса до первоначального уровня в том случае, когда изделие простаивает из-за отсутствия запасного элемента соответствующего типа. Эта стратегия применяется только для восстановления запасов в одиночном комплекте ЗИП. Эта стратегия характеризуется двумя параметрами: $T_{i1} = T_n$; $T_{i2} = T_{\text{эк}}$.

3. Ремонт (восстановление) отказавших элементов. Одновременно с заявкой на запасной элемент сам неисправный элемент поступает в соответствующий РО, а затем после ремонта возвращается в тот запас, за счет которого удовлетворялась заявка. Роль РО следует понимать в широком смысле слова: это может быть или групповой комплект ЗИП, или неисчерпаемый источник пополнения (в этом случае временем ремонта следует считать время доставки из источника пополнения). Формулы для расчета показателей достаточности запаса восстанавливаемых элементов существенно зависят от следующих видов пропускной способности соответствующего РО: неограниченное восстановление ($\alpha = 3$) — одновременно может ремонтироваться сколько угодно элементов данного типа; полностью ограниченное восстановление ($\alpha = 4$) — одновременно ремонтируется не более одного элемента данного типа. Обе эти стратегии пополнения характеризуются одним параметром $T_{i1} = T_p$. Ремонт отказавших элементов применяется для восстановления запасов в одиночном, групповом и ремонтном комплектах ЗИП.

4. Непрерывное пополнение (пополнение по уровню запаса). При использовании этой стратегии для запаса элементов данного типа фиксируется целое число k ($0 \leq k \leq n/2 - 1$, где n — начальный уровень запаса), и, когда запас элементов данного типа исчерпывается до уровня k , посылается заявка на поставку $n - k$ элементов данного типа. Заявка удовлетворяется через случайное время t_d . При непрерывном пополнении очередная заявка может быть послана только после выполнения предыдущей, независимо от того, отказывали ли элементы данного типа в процессе удовлетворения заявки или нет. Показатели достаточности запасов элементов сильно зависят от гипотезы о распределении времени исполнения заявки на пополнение (t_d). Обычно на практике принимается один из двух вариантов распределения: t_d — распределено по экспоненциальному закону ($\alpha = 5$); t_d — фиксировано ($\alpha = 6$). Стратегия непрерывного пополнения применяется для восстановления запасов только в одиночных комплектах ЗИП и характеризуется двумя числовыми параметрами: $T_{i1} = T_d$ и $T_{i2} = k$.

14.4. РАСЧЕТ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ДОСТАТОЧНОСТИ СИСТЕМЫ ЗИП СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ

Расчет показателей достаточности системы ЗИП сложной структуры (состоящей более чем из одного комплекта) можно свести к последовательному расчету показателей по всем номенклатурам всех комплектов ЗИП.

Показателем достаточности запаса элементов i -го типа в j -м комплекте ЗИП назовем: Δ_{ij}^* — среднее время задержки в исполнении заявки на запасной элемент i -го типа, поступившей в j -й комплект ЗИП.

Для запаса элементов i -го типа в одиночном комплекте ЗИП при условии, что в нем предусмотрены запасы элементов по всей номенклатуре объекта, будем рассматривать в качестве показателя его достаточности еще и K_i^* — коэффициент готовности запаса элементов i -го типа — среднюю по времени вероятность того, что одиночный комплект не находится в состоянии отказа по элементам i -го типа.

Для любого комплекта ЗИП справедливо следующее приближенное выражение:

$$\Delta_j^*(n_j, \tau_j) \approx \frac{1}{\Lambda_j} \sum_{i=1}^{N_j} \Lambda_{ij} \Delta_{ij}^*(n_{ij}, \tau_{ij}), \quad (14.6)$$

а для одиночного комплекта — еще и выражение

$$K^*(n_1, \tau_1) = \prod_{i=1}^N K_i^*(n_{1i}, \tau_{1i}), \quad \tau_j = (\tau_{ij}, i = 1, \dots, N_j). \quad (14.7)$$

Для показателя достаточности системы ЗИП справедливо приближенное выражение

$$\Delta^* \simeq \frac{1}{\Lambda_0} \sum_{k=1}^{N_0} \Lambda_{0i} \Delta_{i(k), j(k)}^*, \quad (14.8)$$

где $j(k)$ — номер комплекта, поставляющего непосредственно изделию элементы k -го типа; $i(k)$ — номер элементов k -го типа по номенклатуре $j(k)$ -го комплекта ЗИП.

Таким образом, зная показатели достаточности запасов элементов по всей номенклатуре комплекта, можно рассчитать показатель достаточности любого комплекта ЗИП и системы ЗИП.

Пусть известны $\Delta_{ij}^*(n_{ij}, \tau_{ij})$ и $K_i^*(n_{1i}, \tau_{1i})$ — зависимости показателей достаточности запасов от n_{ij} — начального уровня запаса и τ_{ij} — числового параметра стратегии пополнения запаса (среднего времени ремонта или доставки).

Тогда с учетом ограниченности источников пополнения показатели достаточности запасов

$$\Delta_{ij}^* = \Delta_{ij}^*(n_{ij}, \tilde{\tau}_{ij}), \quad \tilde{\tau}_{ij} = \tau_{ij\infty} + \Delta_k^*,$$

где k — номер комплекта, за счет которого пополняется данный запас; $\tau_{ij\infty}$ — заданный параметр стратегии пополнения запаса из неисчерпаемого источника.

Если запас элементов пополняется из неисчерпаемого источника, то его показатель достаточности вычисляется как

$$\Delta_{ij}^*(n_{ij}, \tau_{ij\infty}), K_i^*(n_{1i}, \tau_{1i\infty}).$$

Таким образом, можно вычислять Δ_{ij}^* — показатель достаточности запаса, если известен Δ_k^* — показатель достаточности комплекта ЗИП, за счет которого пополняется данный запас.

Последовательный расчет показателей достаточности системы ЗИП основан на свойстве естественной частичной упорядоченности комплектов в системе ЗИП.

Рассмотрим общую структуру системы ЗИП (рис. 14.1). Вычисление показателя достаточности такой системы ЗИП сводится к выполнению следующей последовательности действий. Вычисляется Δ_6^* по (14.6). (Величины $\Delta_{i6}^*(n_{i6}, \tau_{i6\infty})$ можно вычислить, поскольку все запасы в комплекте 6 пополняются из неисчерпаемого источника.) Формируются $\tilde{\tau}_{i5} = \tau_{i5\infty} + \Delta_6^*$ для всех запасов 5-го комплекта, которые пополняются за счет ремонта отказавших элементов в соответст-

вующем РО. Для тех запасов 5-го комплекта, которые пополняются из неисчерпаемого источника, полагаем $\tilde{\tau}_{i5} = \tau_{i5\infty}$. Вычисляем $\Delta_{i5}^*(n_{i5}, \tilde{\tau}_{i5})$, $i = 1, \dots, N_5$, и Δ_5^* . Формируем по Δ_5^* и Δ_6^* $\tilde{\tau}_{i2} = \tau_{i2\infty} + \Delta_k^*$, где $k = 5$ ($k = 6$) для тех запасов, которые восстанавливаются за счет ремонта элементов в РОЗ (РО4); $\Delta_k^* = 0$ для тех запасов, которые пополняются из неисчерпаемого источника. Вычисляем $\Delta_{i2}^*(n_{i2}, \tilde{\tau}_{i2})$ и Δ_2^* . По Δ_2^* формируются $\tilde{\tau}_{i4} = \tau_{i4\infty} + \Delta_k^*$, где Δ_k^* равно 0 или Δ_2^* , в зависимости от источника пополнения данного запаса. Вычисляется Δ_4^* . Аналогично по Δ_4^* , Δ_2^* вычисляется Δ_3^* . По известным Δ_2^*, Δ_3^* , Δ_4^* вычисляются Δ_{i1}^* . По формуле (14.8) вычисляется Δ^* — показатель достаточности системы ЗИП.

Пример 14.2. Пусть требуется рассчитать коэффициент готовности ЗИП, состоящего из трех комплектов одиночного и двух ремонтных. Заданы n_j , $j = 1, \dots, 3$, и $\tau_{j\infty}$, $j = 1, \dots, 3$. (В данном случае $\tau_{1\infty} = (\tau_{i1\infty}, i = 1, \dots, N_1)$, $\tau_{2\infty} = (\tau_{i2\infty}, i = 1, \dots, N_2)$ — средние времена ремонта элементов в первом (втором) РО при условии, что первый (второй) ремонтный комплект неограничен, а $\tau_{i3\infty} = (\tau_{i3\infty}, i = 1, \dots, N_3)$ — параметры стратегий пополнения запасов 2-го ремонтного комплекта из неисчерпаемого источника пополнения.)

Решение. Вначале рассчитываются $\Delta_{i3}^*(n_{i3}, \tau_{i3\infty})$, $i = 1, \dots, N_3$, и Δ_3^* ; по Δ_3^* формируется $\tilde{\tau}_2 = (\tau_{i2\infty} + \Delta_3^*, i = 1, \dots, N_2)$ и рассчитываются $\Delta_{i2}^*(n_{i2}, \tilde{\tau}_{i2})$, $i = 1, \dots, N_2$, и Δ_2^* . Формируется $\tilde{\tau}_1 = (\tau_{i1\infty} + \Delta_2^*, i = 1, \dots, N_1)$, и показатель достаточности ЗИП выдается в виде $K^* = \prod_{i=1}^{N_1} K_i^*(n_{i1}, \tilde{\tau}_{i1})$.

14.5. РАСЧЕТ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ДОСТАТОЧНОСТИ ОДИНОЧНОГО КОМПЛЕКТА ЗИП

14.5.1. Предварительные замечания. Для расчета основных показателей достаточности одиночного комплекта ЗИП с высокой точностью можно использовать следующие выражения:

$$K^* = \prod_{i=1}^N (1 - P_{i, l_i+1}); K_i^* = 1 - P_{i, l_i+1}; \quad (14.9)$$

$$\Delta^* = \frac{1}{\Lambda_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{l_i+1} j P_{ij}; \Delta_i^* = \frac{1}{\Lambda_{i0}} \sum_{j=1}^{l_i+1} j P_{ij}. \quad (14.10)$$

Если объект не содержит резервных групп элементов, то для показателей достаточности одиночного комплекта ЗИП K^* и Δ^* справедливы выражения (частный случай (14.9) и (14.10) при $l_i = 0$, $i = 1, \dots, N$):

$$K^* = \prod_{i=1}^N (1 - P_{i1}); \Delta^* = \frac{1}{\Lambda_0} \sum_{i=1}^N P_{i1}. \quad (14.11)$$

Ниже приводятся формулы расчета вероятностей P_{ij} для различных стратегий пополнения запасов элементов и при различных предположениях о характере отказов элементов. Для удобства, поскольку во всех формулах все параметры относятся к одному типу элементов, индекс типа элемента (i) в номенклатуре одиночного комплекта ЗИП будет опущен.

Приняты следующие предположения: продолжительность безотказной работы (хранения) элемента данного типа распределена по экспоненциальному закону с известным параметром; все работающие (резервные, запасные) элементы отказывают независимо (λ — интенсивность отказов основного элемента данного типа); во время простоя изделия элементы не отказывают; продолжительность ремонта отказавшего элемента распределена по экспоненциальному закону с известным параметром.

Одиночный комплект. Последовательная система с неотказывающим элементом

α	P_i	Примечание
1	$\frac{1}{a} e^{-a} \sum_{j=n+2}^{\infty} (j-n-1) \frac{a^j}{j!}$	$a = m\lambda T_{II}$
2	$\frac{T_{эд}}{T_{II}} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j(n+1)}^{\infty} e^{-a} \frac{a^k}{k!}$	
3	$a^{n+1} / \left[(n+1)! \sum_{k=0}^{n+1} a^k / k! \right]$	$a = m\lambda T_p$
4	$a^{n+1} / \left(\sum_{k=0}^{n+1} a^k \right)$	
5	$a^{k+2} / [a^{k+2} + (n-k)(1+a)^{k+1}]$	$a = m\lambda T_{II}; 0 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$
6	$e^{-a} \left[\sum_{j=k+2}^{\infty} (j-k-1) \frac{a^j}{j!} \right] / \left[a + n - 2k - 1 + e^{-a} \times \right.$ $\left. \times \sum_{j=0}^k (n-k-j) \frac{a^j}{j!} \right]$	

14.5.2. Последовательная система с безотказными запасными элементами. В табл. 14.1 приведены формулы расчета вероятности для различных стратегий пополнения. Формулы позволяют (с подстановкой в (14.11)) вычислять значения показателей достаточности одиночных комплектов ЗИП объектов, не содержащих резервных групп элементов, в предположении, что запасные элементы не отказывают при хранении. (Соответствие между значениями α и стратегиями пополнения запасов см. в § 14.3).

Пример 14.3. Рассчитать коэффициент готовности одиночного комплекта ЗИП на основе начальных данных, приведенных в таблице:

i	m_i	λ_i	α_i	T_{i1}	T_{i2}	n_i
1	5	0,002	3	2		2
2	5	0,0002	1	1000		2
3	5	0,002	5	20	0	3
4	5	0,002	6	20	0	3

(α_i, T_{i1}, T_{i2} см. в § 14.3).

Решение. При каждом $i = 1-4$ по табл. 14.1, подставив $a_i = m_i \lambda_i T_{i1}$, получим значения: $P_{11} = 0,00109$; $P_{21} = 0,02337$; $P_{31} = 0,01099$; $P_{41} = 0,0063$. По формуле (14.11) находим $K^* = 0,97124$.

14.5.3. Последовательная система с отказывающими при хранении запасными элементами. Если разница между интенсивностями отказов элементов замены в рабочем режиме и при хранении не слишком велика, что характерно для со-

Одиночный комплект. Последовательная система с отказывающим запасом

α	P_1	Примечание
1	$\prod_{j=1}^n \left(\frac{m\lambda}{j\sigma} + 1 \right) \sum_{j=n}^{\infty} \frac{a_0}{(j+2)!} \sum_{k=0}^n (-1)^{j-k} C_n^k (a_k)^j$	$a_j = (m\lambda + j\sigma) T_{\Pi}$
2	$\frac{1}{2} \frac{T_{\text{эп}}}{T_{\Pi}} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j(n+1)}^{\infty} \left(e^{-a_*} \frac{(a_*)^k}{k!} + e^{-a_*} \frac{(a_*)^k}{k!} \right)$	$a_* = m\lambda T_{\Pi}$ $a^* = a_* + n\sigma T_{\Pi}$
3	$\left[\left(\prod_{j=0}^n a_j \right) / (n+1)! \right] / \left[\sum_{k=0}^{n+1} \left(\prod_{j=n+1-k}^n a_j \right) / k! \right]$	$a_j = (m\lambda + j\sigma) T_{\Pi}$
4	$\left(\prod_{j=0}^n a_j \right) / \sum_{k=0}^{n+1} \left(\prod_{j=n+1-k}^n a_j \right)$	
5	$\left[\left(1 + \sum_{j=k+1}^n \beta_j \right) \prod_{j=0}^k (1 + \beta_j) - \sum_{j=0}^k \beta_{j+n-k} \prod_{r=0}^{j-1} (1 + \beta_r) \right]^{-1}$	$\beta_r = [T_{\Pi} (m\lambda + r\sigma)]^{-1}$
6	$\Phi(k, T_{\Pi}) / \left[1 + \sum_{j=0}^{k+1} P_{k-j}(k, T_{\Pi}) \sum_{r=k+1}^{n-j} 1/a_r \right],$ $\Phi(k, T_{\Pi}) = \prod_{j=1}^k \left(\frac{m\lambda}{j\sigma} + 1 \right) \sum_{j=k}^{\infty} \frac{a_0}{(j+2)!} (-1)^{j-i} C_n^i (a_i)^j,$ $P_j(k, T_{\Pi}) = \prod_{r=j+1}^k \left(\frac{a_r}{\sigma T_{\Pi}} \right) \sum_{i=j}^k \frac{(-1)^{i-j}}{(k-i)! (i-j)!} e^{-a_i},$ $P_{-1}(k, T_{\Pi}) = \prod_{r=1}^k \left(\frac{m\lambda}{r\sigma} + 1 \right) \sum_{j=0}^k \frac{a_0}{a_j} (-1)^j C_k^j (1 - e^{-a_j})$	$a_j = (m\lambda + j\sigma) T_{\Pi}$

временной технологической базы РЭА, то необходимо при расчете показателей достаточности комплекта ЗИП учитывать возможность отказов элементов при хранении.

В табл. 14.2 приведены формулы расчета вероятностей P_1 для последовательного объекта, когда запасные элементы данного типа независимо друг от друга отказывают при хранении с интенсивностью $\sigma \geq 0$, $\sigma \leq \lambda$.

Пример 14.4. Рассчитать среднее время задержки в исполнении заявки на запасной элемент с учетом отказов элементов при хранении. Начальные данные по одиночному комплекту ЗИП заданы таблицей:

i	m_i	λ_i	σ_i	α_i	T_{i1}	T_{i2}	n_i
1	10	0,00001	0,000005	1	1000	0	3
2	10	0,00001	0,000005	2	1000	10	1
3	1	0,001	0,001	3	50	0	1
4	1	0,001	0,001	4	50	0	1

Одиночный комплект. Последовательно-параллельная система с нагруженным резервом

α	$P_j, j = 1, \dots, l$	P_{l+1}	Примечание
$\frac{1}{\sigma=0}$	$\frac{1}{a_{j+n}} \prod_{k=1}^j \left(\frac{b_n}{k\lambda'} + 1 \right) \sum_{i=1}^j (-1)^i C_j^i \frac{i\lambda'}{b_{i+n}} e^{-a} \times$ $\times \sum_{r=n-j-2}^{\infty} \frac{a^r}{r!} \left[1 - \left(\frac{i\lambda'}{b_n} \right)^{r-n} \right]$	$\prod_{k=1}^l \left(\frac{b_n}{k\lambda'} - 1 \right) \sum_{i=1}^l (-1)^i C_l^i \frac{i\lambda'}{b_{i+n}} e^{-a} \times$ $\times \sum_{r=n-j+3}^{\infty} \frac{a^r}{r!} \left[(r-n-2) \frac{a_{i+n}}{a} + \left(\frac{i\lambda'}{b_n} \right)^2 - \left(\frac{i\lambda'}{b_n} \right)^{r+1-n} \right]$	$a = b_n T_{\Pi},$ $a_i = b_i T_{\Pi},$ $\Delta_{i,j} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^i (a_k - a_j)$
$\frac{1}{\sigma > 0}$	$\frac{1}{a_{n+j}} - \prod_{r=0}^{j-1} a_r \sum_{k=0}^{n+j} \frac{1}{\Delta_{n+j, k} a_k} e^{-a_k}$	$1 - \prod_{k=0}^S a_k \sum_{k=0}^S \frac{1}{\Delta_{S, k} a_k^2} (1 - e^{-a_k})$	
2	$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=kS+n+j+1}^{\infty} \left[e^{-a^*} \frac{(a^*)^{r-1}}{r!} + e^{-a_*} \frac{(a_*)^{r-1}}{r!} \right]$	$\frac{1}{2} \frac{T_{\text{эД}}}{T_{\Pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=k(S+1)}^{\infty} \left[e^{-a^*} \frac{(a^*)^r}{r!} + e^{-a_*} \frac{(a_*)^r}{r!} \right]$	$a^* = b_0 T_{\Pi},$ $a_* = b_n T_{\Pi}$
3	$A_{n+j} / \left[(n+j)! \sum_{k=0}^{S+1} A_k / k! \right]$	$A_{S+1} / \left[(S+1)! \sum_{k=0}^{S+1} A_k / k! \right]$	$a_i = b_i T_{\Pi};$ $A_k = \prod_{i=0}^{k-1} a_j;$
4	$A_{n+j} / \left(\sum_{k=0}^{S+1} A_k \right)$	$A_{S+1} / \left(\sum_{k=0}^{S+1} A_k \right)$	$A_0 = 1$
5	$\alpha_{l-j} \prod_{r=0}^{l-j-1} (1 + \alpha_r) P_{l+1}$	$\left[\left(1 + \sum_{j=k+1}^S \alpha_j \right) \prod_{j=0}^k (1 + \alpha_j) - \sum_{i=0}^k \alpha_{i+S-k} \prod_{j=0}^{i-1} (1 + \alpha_j) \right]^{-1}$	$\alpha_j = 1/b_{S-j} T_{\Pi}$
6	$\sum_{r=j+1}^{\infty} \frac{a^r}{r!} / \left[e^a (a+n-2k-1) + \sum_{i=0}^k \frac{a^i}{i!} (n-k-i) \right]$	$\sum_{r=k+2}^{\infty} (r-k-1) \frac{a^r}{r!} / \left[e^a (a+n-2k-1) + \sum_{i=0}^k \frac{a^i}{i!} (n-k-i) \right]$	$a = b_0 T_{\Pi}$

Решение. По формулам табл. 14.2 определяем: $P_{11} = 0,00435$; $P_{21} = 0,00317$; $P_{31} = 0,00227$; $P_{41} = 0,00452$. Находим $\Lambda_0 = \sum_{i=1}^4 m_i \lambda_i = 0,0022$. Среднее время задержки в исполнении заявки на запасной элемент вычисляется по формуле (14.10): $\Delta^* = 7,045$. Для сравнения, если не учитывать отказы при хранении, по формулам табл. 14.1: $P_{11} = 0,00435$; $P_{21} = 0,00284$; $P_{31} = 0,00119$; $P_{41} = 0,00238$, следовательно, $\Delta^* = 4,891$, т. е. неучет отказов элементов при хранении в этом случае приводит к 70%-ной ошибке в значении показателя достаточности одиночного комплекта ЗИП.

14.5.4. Последовательно-параллельная система с нагруженным резервом. В задачах, связанных с расчетом системы ЗИП, учитывается лишь резерв, не несущий никакой функциональной нагрузки. Например, если РЭС содержит две работающие параллельно вычислительные машины (для защиты от сбоев), то применительно к расчету системы ЗИП обе вычислительные машины считаются основными, соединенными последовательно.

В табл. 14.3 приведены формулы расчета вероятностей P_{ij} (см. (14.9)). Предполагается, что элементы данного типа входят в объект в виде одной резервной группы $m : l$ и что резервные элементы отказывают независимо друг от друга с интенсивностью λ' . В табл. 14.3 использованы обозначения $S = n + l$;

$$b_i = \begin{cases} m\lambda + l\lambda' + (n-i)\sigma, & i=0, \dots, n, \\ m\lambda + i\lambda' - n\lambda', & i=n+1, \dots, s. \end{cases}$$

Пример 14.5. Рассчитать коэффициент готовности одиночного комплекта ЗИП в общем случае (по полному набору начальных данных). Пусть одиночный комплект ЗИП содержит элементы четырех различных типов, начальные данные по элементам всех типов заданы в таблице:

i	m_i	l_i	λ_i	λ'_i	σ_i	α_i	T_{i1}	T_{i2}	n_i
1	10	1	0,002	0,002	0,001	2	24	0	1
2	49	1	0,0001	0,0001	0	2	1000	10	2
3	1	1	0,02	0,01	0,005	4	24	0	1
4	2	0	0,02	0	0,02	3	10	0	1

Решение. При $i = 1, 2, 3$ элементы входят в изделие в виде резервных групп. По формулам табл. 14.3 определяем: $P_{12} = 0,01355$; $P_{22} = 0,0145$; $P_{32} = 0,02448$. Элементы 4-го типа в изделии не резервированы. Учитываются отказы при их хранении. По табл. 14.2 определяем $P_{41} = 0,06977$.

Подставив полученные значения вероятностей P_{ii+1} в формулу (14.9), получим коэффициент готовности одиночного комплекта ЗИП $K^* = 0,8822$.

14.6. РАСЧЕТ ПОКАЗАТЕЛЯ ДОСТАТОЧНОСТИ РЕМОНТНОГО КОМПЛЕКТА ЗИП

В РО неисправность в элементе данного типа (например, ТЭ33) устраняется заменой в нем комплектующего элемента (например, ТЭ32). Следовательно, для нормального функционирования РО нуждается в комплекте ЗИП, состоящем из этих комплектующих элементов.

Показателем достаточности ремонтного комплекта ЗИП служит Δ^* — среднее время задержки в исполнении поступившей из РО заявки на запасной элемент. Будем предполагать, что поток заявок на элементы данного типа, поступающий в ремонтный комплект ЗИП, пуассоновский, причем заявки при отсутствии запасных элементов не пропадают, а становятся в очередь. Длина очереди не ограничена.

Для запасов элементов в ремонтном комплекте ЗИП характерны две стратегии пополнения: периодическое пополнение ($\alpha = 1$) и ремонт отказавших элементов ($\alpha = 3$ и 4). При использовании второй стратегии отказавшие элементы из рассматриваемого ремонтного комплекта ЗИП (ТЭЗ2) поступают в свой РО, не тот, которому придан данный комплект, и неисправность в них устраняется за счет замены еще более мелкого комплектующего элемента (ТЭЗ1).

Показатель достаточности ремонтного комплекта ЗИП рассчитывается по формуле

$$\Delta^* = \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{\Lambda} \Delta_i^* = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{\infty} j P_{ij}, \quad (14.12)$$

где λ_i — интенсивность пуассоновского потока заявок на элементы i -го типа;
 $\Lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i$.

В табл. 14.4 приведены формулы расчета вероятностей P_{ij} для различных стратегий пополнения запасов элементов. Для удобства индекс i , соответствующий номеру типа элемента в номенклатуре ремонтного комплекта, опускается.

Последовательность действий при расчете показателя достаточности ремонтного комплекта ЗИП следующая.

Задается $\varepsilon > 0$ — требуемая точность расчета Δ^* .

Вычисляется $\Lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i$.

При $i = 1, \dots, N$ по формулам табл. 14.4 (в зависимости от значений α_i и σ_i) определяются значения вероятностей $P_{i1}, \dots, P_{ij^*}$, где $j^* = (\min_{jP_{ij} \leq \Delta \varepsilon / N} j)$.

Для каждого типа элементов вычисляется $\sum_{j=1}^{j^*} j P_{ij} = \Phi_i$.

Т а б л и ц а 14.4

Ремонтный комплект

α	σ	P_j	Примечание
1	0	$\frac{1}{a} e^{-a} \sum_{k=n+j+1}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$	$a = \lambda T_{\Pi}$
3	0	$e^{-a} \frac{a^{n+j}}{(n+j)!}$	$a = \lambda T_p$
4	0	$a^{n+j} (1-a)$	
1	> 0	$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\lambda}{k\sigma}\right) \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{j-k} \frac{e^{-a}}{a^k} \sum_{r=j+1}^{\infty} \frac{a^r}{r!} \left[1 - \left(-\frac{k\sigma}{\lambda}\right)^{r-j}\right]$	$a_k = (\lambda + k\sigma) T_{\Pi}$, $a = \lambda T_{\Pi}$
3	> 0	$\frac{a_j}{(n+j)!} \prod_{k=0}^{n-1} a_k / \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \prod_{r=0}^{k-1} a_r\right)$	$a_k = \begin{cases} (\lambda + (n-k)\sigma) T_p, \\ k=0, \dots, n, \\ \Delta T_p, k > n \end{cases}$
4	> 0	$a^j \prod_{k=1}^n a_k / \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{r=0}^{k-1} a_r\right)$	

По найденным $\Phi_1, \dots, \Phi_N$ определяется показатель достаточности ремонтного комплекта ЗИП:

$$\Delta^* = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^N \Phi_i.$$

Пример 14.6. Рассчитать показатель достаточности ремонтного комплекта ЗИП. Пусть комплект ЗИП, приданный РО, содержит элементы трех различных типов $N = 3$. Необходимо вычислить Δ^* с точностью $\varepsilon = 0,1$. Начальные данные по всем типам элементов заданы в таблице:

i	λ_i	σ_i	α_i	T_{i1}	n_i
1	0,00001	0,000001	1	1000	2
2	0,001	0	4	100	3
3	0,001	0	3	20	1

Решение. Вычисляем $\Lambda = \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 0,00201$.

Находим $d = \Lambda\varepsilon/N = 0,000007$.

Для вычисления P_{ij} воспользуемся табл. 14.4. Получаем: $P_{11} = 0,000696$; $P_{12} = 0,0000002$. Поскольку $P_{12} < d$, полагаем: $j^* = 1$; $\Phi_1 = P_{11} = 0,000696$; $P_{21} = 0,000099 > d$; $P_{22} = 0,0000099 > d/2$; $P_{32} = 0,000001 < d/3$; $j^* = 2$. Следовательно, $\Phi_2 = 0,0001089$.

Определяем: $P_{31} = 0,00019604 > d$; $P_{32} = 0,0000013 < d/2$. Следовательно, $\Phi_3 = 0,000196$.

Отсюда получаем значение показателя достаточности ремонтного комплекта ЗИП: $\Delta^* = (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3)/\Lambda = 0,5$, т. е. среднее время задержки заявки, поступающей из РО в приданный ему комплект ЗИП, равно 0,5 ч (вычислено с заданной точностью $\varepsilon = 0,1$ ч).

14.7. РАСЧЕТ ПОКАЗАТЕЛЯ ДОСТАТОЧНОСТИ ГРУППОВОГО КОМПЛЕКТА ЗИП

Групповые комплекты ЗИП служат для пополнения приданных изделиям одиночных комплектов ЗИП по мере их расходования, а также для восстановления работоспособности объектов по некоторым типам элементов, запасы которых отсутствуют в одиночных комплектах. Для восстановления запаса элементов данного типа в составе группового комплекта ЗИП на практике применяются две стратегии пополнения: периодическое пополнение ($\alpha = 1$) и ремонт отказавших элементов ($\alpha = 3, 4$). Показателем достаточности группового комплекта ЗИП служит Δ^* — среднее время задержки в исполнении заявки на запасные элементы, для которого справедливо приближенное представление (14.6).

В зависимости от принятой стратегии пополнения запаса элементов данного типа в составе одиночного комплекта ЗИП можно выделить два варианта модели случайных обращений в запас элементов данного типа в групповом комплекте ЗИП и соответственно разные формулы расчета Δ_i^* — показателей достаточности запасов элементов в составе группового комплекта.

Модель 1. Если запас элементов данного типа в составе одиночного комплекта ЗИП функционирует как запас восстанавливаемых элементов, то групповой комплект ЗИП как бы играет роль ремонтного органа, только вместо ремонта отказавшего элемента происходит его замена аналогичным исправным элементом. В этом случае можно считать, что поток заявок, поступающих в групповой комплект ЗИП на элементы данного типа, пуассоновский, при отсутствии необходимых элементов заявки не теряются, а становятся в неограниченную очередь, Δ_i^* вы-

связываются по формуле (14.12), для расчета вероятностей P_{ij} воспользуемся формулами табл. 14.4.

Модель 2. Поток заявок на элементы данного типа соответствует периодическому пополнению с экстренными доставками или непрерывному (по уровню) пополнению запасов элементов этого типа в составе одиночных комплектов ЗИП. В этом случае нельзя считать, что поток заявок на элементы данного типа пуассоновский, поскольку одиночный комплект не может послать очередную заявку на элементы данного типа, пока не удовлетворена предыдущая.

Пусть запас элементов i -го типа в групповом комплекте служит для пополнения S запасов элементов этого типа в одиночных комплектах ЗИП или обслуживает непосредственно S идентичных объектов. Будем предполагать, что расход всех S запасов элементов i -го типа в одиночных комплектах ЗИП описывается одинаково, причем процессы статистически независимы друг от друга. Это означает, что в заявках на элементы i -го типа, приходящих в групповой комплект ЗИП от любого из одиночных, обозначено одно и то же количество необходимых элементов r (при непрерывном пополнении запаса элементов i -го типа в одиночных комплектах ЗИП $r = n - k$, где n — начальный уровень, а k — уровень пополнения запаса элементов i -го типа в любом из S одиночных комплектов, при периодическом пополнении с экстренными доставками $r = n + 1$, а если запас элементов данного типа в групповом комплекте обслуживает непосредственно объекты, то $r = 1$).

Будем предполагать, также, что время ожидания очередной заявки на элементы i -го типа от данного одиночного комплекта или от объекта при условии, что удовлетворена предыдущая заявка этого одиночного комплекта или этого объекта на элементы i -го типа, распределено по экспоненциальному закону с параметром $\lambda_i > 0$.

В этом случае модель потока заявок, поступающих в групповой комплект ЗИП от S идентичных одиночных комплектов или объектов, имеет следующее описание. Время ожидания появления очередной заявки на элементы i -го типа распределено по экспоненциальному закону с интенсивностью $(S - j) \lambda_i$, где j — длина очереди из неудовлетворенных заявок на элементы i -го типа, имеющейся в рассматриваемый момент в групповом комплекте. Длина очереди неудовлетворенных заявок не может превышать S , поскольку ни один одиночный комплект, а также ни один объект не может послать следующую заявку на элементы данного типа, пока не удовлетворена предыдущая.

В этом случае для Δ_i^* справедливо следующее приближенное выражение:

$$\Delta_i^* \approx \frac{1}{\lambda_i S} \sum_{j=1}^S j P_{ij}. \quad (14.13)$$

Формулы табл. 14.5 позволяют вычислять вероятности P_{ij} , $j = 1, \dots, S$ при различных стратегиях пополнения запаса элементов i -го типа и различных гипотезах о возможности отказов элементов при хранении. Индекс, соответствующий номеру типа элементов в номенклатуре группового комплекта ЗИП, опущен. В таблице использованы следующие обозначения: n — максимальное количество заявок на пополнение, которое запас элементов данного типа в групповом комплекте способен удовлетворить без собственного восстановления. (Если начальный уровень запаса элементов данного типа в групповом комплекте n , то $n = \lfloor n/r \rfloor$, где r — количество элементов, обозначенное в одной заявке на пополнение); $b_k = S\lambda + (n - k) \sigma/r$, $k = 0, \dots, n$; $b_k = (n + S - k) \lambda$, $k = n + 1, \dots, S + n$.

Пример 14.7. Рассчитать показатель достаточности группового комплекта ЗИП. Пусть начальные данные по групповому комплекту, содержащему элементы трех типов, заданы в виде таблицы:

i	r_i	S_i	λ_i	σ_i	α_i	T_i	n_i
1			0,001	0,0001	1	1000	4
2	3	5	0,01	0	3	24	2
3	2	5	0,01	0	4	24	3

Требуется определить показатель достаточности такого группового комплекта с точностью $\varepsilon = 0,1$ ч.

Решение. Вычисляем $\Lambda = \sum_{i=1}^N S_i \lambda_i = 0,101$, определяем $d = \varepsilon \Lambda / N = 0,0033$.

При $i = 1$ S_i не указано, т. е. запас элементов i -го типа функционирует как запас элементов в ремонтном комплекте. Для расчета Δ_1^* воспользуемся формулой (14.12), а для вероятностей P_{1j} — табл. 14.4 и правилами § 14.6; $P_{11} = 0,00177 > d$; $P_{12} = 0,00001 < d/2$, следовательно, $j^* = 1$, $\Delta_1^* = 1,77$.

Таблица 14.5

Групповой комплект

α	$P_j, j=1, \dots, S$	Примечание
$\frac{1}{\sigma=0}$	$\frac{e^{-Sa}}{Sa} \sum_{k=1}^j C_j^S C_j^k (-1)^{k+j} \sum_{r=n+1}^{\infty} \left(\frac{k}{S}\right)^{r-n} \sum_{l=r+1}^{\infty} \frac{(ka)^l}{l!}$	$a = \lambda T_{II}$
$\frac{1}{\sigma>0}$	$\prod_{k=0}^{n+j-1} a_k \sum_{l=0}^{n+j} (1 - e^{-a_l}) / a_l \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{n+j} (a_k - a_l)$	$a_k = b_k T_{II}$
3	$\frac{1}{(n+j)!} \prod_{k=0}^{n+j-1} a_k / \left(1 + \sum_{l=1}^{n+S} \frac{1}{l!} \prod_{k=0}^{l-1} a_k\right)$	$a_k = b_k T_p$
4	$\prod_{k=0}^{n+j-1} a_k / \left(1 + \sum_{l=1}^{n+S} \prod_{k=0}^{l-1} a_k\right)$	

При $i = 2, 3$ для расчета P_{ij} воспользуемся формулами табл. 14.5: $P_{21} = 0,06988 > d$; $P_{22} = 0,01677 > d/2$; $P_{23} = 0,00242 > d/3$; $P_{24} = 0,00019 < d/4$. Следовательно, $j^* = 3$. По формуле (14.13): $\Delta_2^* = 2,23$; $P_{31} = 0,17695 > d$; $P_{32} = 0,16987 > d/2$; $P_{33} = 0,12231 > d/3$; $P_{34} = 0,05870 > d/4$; $P_{35} = 0,01409 > d/5$; при $j^* = S$ расчет вероятностей P_{ij} останавливается независимо от выполнения условия $P_{i, j^*+1} < d/(j^* + 1)$. Получаем по формуле (14.13) $\Delta_3^* = 23,78$.

Следовательно, по формуле (14.6): $\Delta^* = 12,9$ ч, причем значение Δ^* вычислено с заданной точностью $\varepsilon = 0,1$.

Задача оптимального проектирования комплекта ЗИП (одиночного, группового или ремонтного) состоит в отыскании целочисленного вектора $\mathbf{n}$, реализующего $\min_{\mathbf{n} \geq 0} \left\{ \sum_{i=1}^N c_i n_i \mid Q(\mathbf{n}) \leq Q_0 \right\}$, где $Q(\mathbf{n}) = -\ln K^*(\mathbf{n})$ или $Q(\mathbf{n}) = \Delta^*(\mathbf{n})$, а Q_0 соответственно равно $-\ln K_0$ или Δ_0 , в зависимости от выбора показателя достаточности.

Из (14.6), (14.7) следует, что $Q(\mathbf{n})$ приближенно представимо в виде $Q(\mathbf{n}) \approx \sum_{i=1}^N Q_i(n_i)$, где $Q_i(n_i) = -\ln K_i^*(n_i)$ или $Q_i(n_i) = \Delta_i \Delta_i^* / \Delta$.

Таким образом, задача оптимального проектирования комплекта ЗИП сводится к задаче оптимального резервирования (т. е. к целочисленной задаче математического программирования с сепарабельными целевым функционалом и левой частью ограничения):

$$\min_{\mathbf{n} \geq 0} \left\{ \sum_{i=1}^N c_i n_i \mid \sum_{i=1}^N Q_i(n_i) \leq Q_0 \right\} \quad (14.14)$$

или в обратной постановке:

$$\min_{\mathbf{n} \geq 0} \left\{ \sum_{i=1}^N Q_i(n_i) \mid \sum_{i=1}^N c_i n_i \leq C_0 \right\}. \quad (14.15)$$

Методы решения задач (14.14), (14.15) подробно рассмотрены в гл. 13.

Поскольку задачи оптимального проектирования комплектов ЗИП имеют, как правило, большую размерность ($N \sim 1000$), для их решения необходимо выбрать методы, трудоемкость которых растет с увеличением размерности не слишком быстро (как максимум, квадратично). Часто неплохие результаты дает следующий чрезвычайно простой метод, который можно применять, только если комплект не содержит непрерывно пополняемых запасов. В качестве оптимального решения задачи (14.14) выбираются

$$n_i^* = \min_{n_i \geq 0} \left\{ n_i \mid Q_i(n_i) \leq c_i Q_0 \mid \sum_{i=1}^N c_i \right\}.$$

Верхняя оценка точности полученного решения (в смысле значения целевого функционала) — это $\sum_{i=1}^N c_i$. Разработчик может воспользоваться таким методом, если его больше волнует трудоемкость получения решения, чем точность полученного результата.

Опыт решения практических задач оптимального проектирования комплектов ЗИП показывает, что наиболее привлекателен метод наискорейшего покоординатного спуска (см. гл. 13).

Пример 14.8. Решить задачу оптимального проектирования одиночного комплекта ЗИП методом покоординатного спуска. Пусть требуется построить минимальный по стоимости одиночный комплект ЗИП, обеспечивающий заданное значение коэффициента готовности объекта $K_\Sigma = 0,99$. Задано расчетное значение коэффициента готовности пары «объект—бесконечная система ЗИП» $K_\infty = 0,999$. Следовательно, требуемое значение коэффициента готовности одиночного комплекта ЗИП $K_0 = K_\Sigma / K_\infty = 0,991$; $Q_0 = -\ln K_0 = 0,009$.

Одиночный комплект ЗИП должен содержать элементы пяти различных типов $N = 5$. Элементы всех типов в объекте не резервированы и при хранении не отказывают. Начальные данные по типам элементов заданы в виде:

i	m_i	λ_i	α_i	T_{i1}	T_{i2}	$n_i^{\min}$	c_i
1	1000	0,000001	1	1000	0	1	0,1
2	20	0,0005	1	1000	0	1	1,0
3	5	0,02	3	24	0	0	100,0
4	2	0,02	3	24	0	0	50,0
5	12	0,0005	5	96	2	6	25,0

Р е ш е н и е. Подготовительный этап алгоритма. Заполняем таблицу:

i	n_i	$Q_i(n_i)$	$Q_i(n_i + 1)$	Δ_i	Δ_i/c_i
1	3	0,0043583	0,0006892	0,0036691	0,0366910
2	15	0,0054889	0,0027735	0,0027154	0,0027254
3	6	0,0083176	0,0024819	0,0059357	0,0000594
4	4	0,0025844	0,0004120	0,0021724	0,0000435
5	6	0,0070521	0,0055926	0,0014595	0,0000584

Формируем $R_0 = \sum_{i=1}^N Q_i(n_i) = 0,278013 > 0,009$. Переходим к последовательному выполнению шагов алгоритма.

Шаг 1. Ищем максимальное число в последнем столбце — оно стоит в 1-й строке $i^1 = 1$. Формируем $R^1 = 0,0241322 > 0,009$, меняем первую строку таблицы. (На каждом шаге будем приводить только изменяемую строку, имея в виду, что таблица составлена из последних модификаций всех строк.)

1	4	0,0006892	0,0000947	0,0005945	0,0059450
---	---	-----------	-----------	-----------	-----------

2-й шаг: $i^2 = 1$; $R^2 = 0,0235377 > 0,009$

1	5	0,0000947	0,0000115	0,0000832	0,0008320
---	---	-----------	-----------	-----------	-----------

3-й шаг: $i^3 = 2$; $R^3 = 0,0208223 > 0,009$

2	16	0,0027735	0,0013428	0,0014307	0,0014307
---	----	-----------	-----------	-----------	-----------

4-й шаг: $i^4 = 2$; $R^4 = 0,0193916 > 0,009$

2	17	0,0013428	0,0006234	0,0007194	0,0007194
---	----	-----------	-----------	-----------	-----------

5-й шаг: $i^5 = 1$; $R^5 = 0,0193084 > 0,009$

1	6	0,0000115	0,0000012	0,0000163	0,0001030
---	---	-----------	-----------	-----------	-----------

6-й шаг: $i^6 = 2$; $R^6 = 0,0195890 > 0,009$

2	18	0,0006234	0,0002779	0,0003455	0,0003455
7-й шаг: $i^7=2$; $R^7=0,0182435 > 0,009$					
2	19	0,0002779	0,0001190	0,0001589	0,0001589
8-й шаг: $i^8=2$; $R^8=0,0180846 > 0,009$					
2	20	0,0001190	0,0000490	0,0007700	0,0000700
9-й шаг: $i^9=1$; $R^9=0,0180747 > 0,009$					
1	7	0,0000012	0,0000001	0,0000011	0,0000110
10-й шаг: $i^{10}=2$; $R^{10}=0,0180043 > 0,009$					
2	21	0,0000490	0,0000195	0,0000295	0,0000295
11-й шаг: $i^{11}=3$; $R^{11}=0,0121686 > 0,009$					
3	7	0,0024819	0,0006608	0,0018211	0,0000182
12-й шаг: $i^{12}=4$; $R^{12}=0,0107091 > 0,009$					
5	7	0,0055926	0,0046758	0,0009168	0,0000477
13-й шаг: $i^{13}=4$; $R^{13}=0,060085367 > 0,009$					

Работа алгоритма закончена. Решение выдается в виде: $n_1 = 7$; $n_2 = 21$; $n_3 = 7$; $n_4 = 5$; $n_5 = 7$. Стоимость полученного комплекта ЗИП $C = 1146,7$. Верхняя оценка относительной точности полученного решения 4,4%.

14.9. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИСТЕМ ЗИП СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ

Для обеспечения надежности группы объектов могут использоваться системы ЗИП достаточно сложной структуры, включающие одиночные, групповые и ремонтные комплекты. В главе представлены методы оптимального проектирования всех видов комплектов ЗИП, однако на практике при проектировании системы ЗИП сложной структуры задаются лишь требования к показателю достаточности системы ЗИП в целом.

Возникает естественный вопрос: как, умея решать задачи оптимального проектирования комплектов ЗИП, решить задачу оптимального проектирования системы ЗИП сложной структуры?

На практике проектирование системы ЗИП, обеспечивающей надежность одного или группы объектов, начинается с выбора структуры системы ЗИП. Напомним, что структура системы ЗИП определяется количеством одиночных, групповых и ремонтных комплектов, стратегиями пополнения запасов элементов в составе всех комплектов и численными параметрами стратегий пополнения запасов.

Набор рациональных структур системы ЗИП, как правило, сильно ограничен организационными соображениями. В реальной задаче может встретиться не более 10—20 конкурирующих структур. Поэтому нет смысла рассматривать параметры, определяющие структуру ЗИП, в качестве параметров управления в задаче оптимального проектирования (это чрезвычайно усложнит решение задачи). Гораздо разумнее предложить «быстрый» метод оценки затрат на систему ЗИП заданной структуры, использующий огрубление левой части ограничения, с помощью этого метода оценить затраты на системы ЗИП всех конкурирующих структур, выбрать среди них ту, которой отвечает наименьшее значение оценки, а затем, пользуясь «аккуратными» методами, провести оптимальное проектирование системы ЗИП выбранной структуры, т. е. решить следующую задачу:

$$\min_{n_1 \geq 0, \dots, n_M \geq 0} \left\{ \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{N_j} c_{ij} n_{ij} \mid Q(n_1, \dots, n_M) \leq Q_0 \right\}. \quad (14.16)$$

Для того чтобы весьма грубо оценить затраты на систему ЗИП заданной структуры, можно предложить следующий эвристический метод решения задачи (14.16).

Идея метода в том, что вместо задачи (14.16) решается задача

$$\min_{n_1 \geq 0, \dots, n_M \geq 0} \left\{ \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{N_j} c_{ij} n_{ij} \mid \tilde{Q}(n_1, \dots, n_M) \leq Q_0 \right\}, \quad (14.17)$$

где $\tilde{Q}(n_1, \dots, n_M) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{N_j} Q_{ij}(n_{ij})$ — сепарабельная функция.

Если функция $\tilde{Q}(n_1, \dots, n_M)$ выбрана так, что при всех $n_{ij} \geq 0, j = 1, \dots, M, i = 1, \dots, N_j$, выполняется неравенство $Q(n_{ij}) \leq \tilde{Q}(n_{ij})$, то очевидно, что всякий набор n_{ij} , удовлетворяющий ограничению задачи (14.17), удовлетворяет и ограничению задачи (14.16). Следовательно, оптимальное значение целевого функционала задачи (14.17) служит верхней оценкой оптимального значения целевого функционала задачи (14.16).

Для того чтобы найти ограничивающую сепарабельную функцию $\tilde{Q}(n_{ij})$, используется следующее предположение. Пусть отказ любого из комплектов в заданной структуре системы ЗИП выполнить поступившее в него требование на запасной элемент приводит к отказу изделия, причем этот отказ длится до тех пор, пока требование на запасной элемент не будет удовлетворено.

Тогда показатель достаточности системы ЗИП представим в виде

$$\tilde{Q}(n_{ij}) = \sum_{j=0}^M \sum_{i=1}^{N_j} Q_{ij}(n_{ij}),$$

где $Q_{ij}(n_{ij}) = -\ln [1 - \varphi_{ij}(n_{ij})]$, если показателем достаточности системы ЗИП выбран его коэффициент готовности, и $Q_{ij}(n_{ij}) = \frac{1}{\Lambda_0} \varphi_{ij}(n_{ij})$, если показателем достаточности системы ЗИП в исходной задаче выбрано среднее время задержки в исполнении заявки на запасной элемент; $\varphi_{ij}(n_{ij})$ — средняя по времени вероятность наличия в j -м комплекте хотя бы одной неудовлетворенной заявки на элементы i -го типа.

Очевидно, что высказанное предположение увеличивает значение показателя достаточности системы ЗИП $-\ln K^*$ или Δ^* так, что действительно при любых $n_{ij}, j = 1, \dots, M, i = 1, \dots, N_j$, выполняется неравенство $Q(n_{ij}) \leq \tilde{Q}(n_{ij})$.

Для решения задачи (14.17) можно воспользоваться любым методом, предусмотренным для задач с линейным целевым функционалом и сепарабельным ограничением, например методом наискорейшего покоординатного спуска, описанным в гл. 13. Необходимо только при расчете вероятностей $\varphi_{ij}(n_{ij})$ помнить,

в каком комплекте ЗИП (одиночном, групповом или ремонтном) хранится запас элементов данного типа и соответственно пользоваться формулами § 14.5, 14.6 или 14.7.

Решение задачи оптимального проектирования системы ЗИП предложенным методом можно использовать для оценки затрат на систему ЗИП при выборе его структуры. Оптимальное проектирование системы ЗИП выбранной структуры производится методом последовательной оптимизации. Идея применения этого метода в задаче оптимального проектирования системы ЗИП заданной структуры состоит в том, что оптимальные затраты на систему ЗИП ищутся как минимум выпуклой функции $(M - 1)$ -го переменного (M — число разных комплектов в ЗИП заданной структуры).

Пусть заданы: $x_2 > 0, x_3 > 0, \dots, x_M > 0$;

$$x = (x_2, \dots, x_M).$$

Рассмотрим следующую задачу с M ограничениями:

$$\min_{n_1 > 0, \dots, n_M > 0} \left\{ \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{N_j} c_{ij} n_{ij} \mid Q(n_1, x) \leq Q_0, \Delta^*(n_j, x_j) \leq x_j, j = 2, \dots, M \right\}, \quad (14.18)$$

где $x_j = (x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_M)$. (При записи ограничений задачи (14.18) мы воспользовались описанным в § 14.4 свойством показателей достаточности комплектов ЗИП: показатель достаточности j -го комплекта ЗИП в системе ЗИП заданной структуры является функцией от n_j — начальных количеств запасных элементов всех типов в j -м комплекте — и от показателей достаточности всех комплектов ЗИП, за счет которых пополняется j -й.)

Очевидно, что оптимальное значение целевого функционала задачи (14.18) представимо в виде

$$C(x) = \sum_{j=1}^M C_j(x_j),$$

где $C_1(x)$ — оптимальное значение целевого функционала задачи

$$\min_{n_1 > 0} \left\{ \sum_{i=1}^{N_1} c_{i1} n_{i1} \mid Q(n_1, x) \leq Q_0 \right\}, \quad (14.19)$$

а $C_j(x_j), j = 2, \dots, M$, — оптимальные значения целевых функционалов задач

$$\min_{n_j > 0} \left\{ \sum_{i=1}^{N_j} c_{ij} n_{ij} \mid \Delta^*(n_j, x_j) \leq x_j \right\}. \quad (14.20)$$

Методы решения задач (14.19), (14.20) — задач оптимального проектирования комплектов ЗИП — представлены в гл. 13. Таким образом, известно, как вычислять функцию $C(x)$ с заданной или достаточной с практической точки зрения точностью.

Ясно, что C^* — оптимальное значение целевого функционала задачи (14.16) — есть минимум

$$C^* = \min_{x > 0} C(x), \quad (14.21)$$

а ее решение — решения задач (14.19), (14.20) при x^* , реализующем минимум в (14.21).

Поскольку функция $C(x)$ кусочно постоянна (из-за целочисленности задач (14.19), (14.20)), для поиска ее минимума можно пользоваться лишь такими методами, которые используют значение функции, но не ее градиент.

Можно показать, что функция $C(x)$ имеет следующее свойство. Существует выпуклая функция $\bar{C}(x)$, такая, что

$$0 \leq C(x) - \bar{C}(x) \leq \delta,$$

где δ — максимальные затраты на один запасной элемент.

Поскольку даже при решении задач оптимальности проектирования комплектов ЗИП мы считали точность в максимальные затраты на один запасной элемент вполне удовлетворительной, будем требовать и от методов оптимизации функции $C(x)$ точности ξ порядка δ .

Мы можем ввести априорные верхние и нижние оценки показателей достаточности всех, кроме одиночного, комплектов ЗИП, считая, таким образом, что векторы x меняются в заданном параллелепипеде $G = \{x : x_j \in [A_j, B_j]\}$.

Эти оценки можно получить, например, последовательно вычисляя:

$$\begin{aligned} A_M &= \Delta^*(n_M^{\max}); B_M = \Delta^*(n_M^{\min}); \\ A_{M-1} &= \Delta^*(n_{M-1}^{\max}, A_M); B_{M-1} = \Delta^*(n_{M-1}^{\min}, B_M), \dots, A_2 = \\ &= \Delta^*(n_2^{\max}, A_3, \dots, A_M); B_2 = \Delta^*(n_2^{\min}, B_3, \dots, B_M). \end{aligned}$$

Здесь $n_k^{\min}$, $n_k^{\max}$ — априорные нижняя и верхняя оценки количеств запасных элементов.

Для минимизации функции $C(x)$ на параллелепипеде G при небольших M ($M \leq 4$) проще всего применять метод последовательной оптимизации, который сводит приближенную минимизацию функции многих переменных к многократной приближенной минимизации функций одной переменной.

Эту одномерную минимизацию предлагается проводить методом золотого сечения.

Пусть требуется минимизировать функцию $f(x)$ одного переменного, меняющегося на отрезке $\Delta = [a, b]$. Метод золотого сечения представляет собой следующую итеративную процедуру. Положим $\Delta_0 = \Delta$ и разобьем отрезок Δ на три части точками $x_1 < x_2$ так, чтобы части, примыкающие к концам отрезка Δ_0 , были равны друг другу и каждая из них имела длину $\theta|\Delta_0|$ ($|\Delta_0|$ — длина отрезка Δ_0 , $\theta = (3 - \sqrt{5})/2$). Вычислив значения функции $f(x_1)$, $f(x_2)$, определим новый отрезок Δ_1 по правилу

$$\Delta_1 = \begin{cases} [a, x_1], & f(x_1) \leq f(x_2), \\ [x_2, b], & f(x_1) > f(x_2). \end{cases} \quad (14.22)$$

Этот отрезок на следующем шаге делится на три части и сокращается за счет отбрасывания одной из крайних частей точно так же, как отрезок Δ_0 на первом шаге. К полученному отрезку Δ_2 применяется та же процедура и т. д.

Результатом x^Φ — работы Φ шагового метода золотого сечения — считается лучшая (т. е. с наименьшим значением $f(x)$) из точек деления, построенных на первых Φ шагах. Отметим, что на всех шагах, кроме первого, одна из очередных точек деления является также точкой деления предыдущего отрезка (это гарантируется правилом выбора θ). Поэтому для построения x^Φ требуется $\Phi + 1$ вычисление значений функции $f(x)$.

Рассмотрим теперь, как с помощью описанной процедуры приближенной минимизации функции одной переменной приближенно минимизировать функцию многих переменных.

Пусть задана выпуклая функция двух переменных $f(x_1, x_2)$ и требуется найти ее минимум на $G = \{x = (x_1, x_2) : x_i \in [A_i, B_i]\}$. Поступим следующим образом. Обозначим через $f^*(x_1)$ минимум функции $f(x_1, x_2)$ как функции одной переменной x_2 на отрезке $[A_2, B_2]$:

$$f^*(x_1) = \min_{x_2 \in [A_2, B_2]} f(x_1, x_2).$$

(С помощью золотого сечения мы умеем находить $f^*(x_1)$ при любом x_1 .)

Будем минимизировать $f^*(x_1)$ на отрезке $x_1 \in [A_1, B_1]$ опять с помощью метода золотого сечения

$$f^* = \min_{x_1 \in [A_1, B_1]} f^*(x_1).$$

Очевидно, что $f^* = \min_{x \in G} f(x)$.

Точно так же, применяя метод золотого сечения, можно приближенно найти минимум функции любого числа переменных.

Приведем формулы для расчета φ — количества шагов, необходимых в каждой из процедур золотого сечения для минимизации функции $C(x)$ с заданной точностью ξ :

$$\varphi \geq 2,1 \ln \frac{2V(2,6)^{M-1}}{\xi}, \quad (14.23)$$

где $\xi \geq [(2,6)^{M-1} - 1] \cdot 2,6\delta$; $V = \max_G C(x) - \min_G C(x)$.

Пример 14.9. Построить оптимальную по стоимости систему ЗИП, состоящую из одиночного комплекта (все элементы в одиночном комплекте восстанавливаемые) и ремонтного комплекта (все запасы в ремонтном комплекте пополняются периодически). Показателем достаточности системы ЗИП выбран коэффициент готовности.

Заданы начальные данные $N_1 = 3$; $N_2 = 3$; $K_0 = 0,975$ по одиночному комплекту:

i	m_i	λ_i	α_i	T_{i1}	T_{i2}	$n_i^{\min}$	c_{i1}
1	5	0,005	3	5	0	0	10
2	26	0,0025	3	5	0	0	10
3	10	0,01	3	5	0	0	15

по ремонтному комплекту:

i	λ_i	α_i	T_i	$n_i^{\min}$	c_{i2}
1	0,075	1	200	15	1
2	0,075	1	200	15	1
3	0,04	1	200	8	2

Элементы всех типов в изделии не резервированы, при хранении не отказывают. Задана необходимая точность расчета показателя достаточности ремонтного комплекта $\varepsilon = 0,1$.

Решение. Для оптимального проектирования такого ЗИП требуется решить задачу

$$\min_{n_1 > 0, n_2 > 0} \left\{ \sum_{i=1}^3 n_{i1} c_{i1} + \sum_{i=1}^3 n_{i2} c_{i2} \mid K^*(n_1, n_2) \geq K_0 \right\}. \quad (14.24)$$

Для вычисления функции $C(x_2)$ (в данном случае количество комплектов ЗИП в ЗИП заданной структуры $M=2$) необходимо сложить оптимальные значения целевых функционалов следующих двух задач:

$$\min_{n_1 > 0} \left\{ \sum_{i=1}^3 n_{i1} c_{i1} \mid -\ln K^*(n_1, x_2) \leq -\ln K_0 \right\} \quad (14.25)$$

и

$$\min_{n_2 > 0} \left\{ \sum_{i=1}^3 n_{i2} c_{i2} \mid \Delta^*(n_2) \leq x_2 \right\}. \quad (14.26)$$

Для определения отрезка $[A_2, B_2]$, на котором будет минимизироваться функция $C(x_2)$, поступим следующим образом. В качестве A_2 выбираем ε — заданную точность расчета значений показателя достаточности ремонтного комплекта (меньшие значения x_2 не имеет смысла рассматривать), а B_2 положим равным $\Delta^*(n_2^{\min})$. Получаем $[A_2, B_2] = [0, 1, 3, 4]$.

Для оценки φ — количества шагов метода золотого сечения (14.23) — нам требуется оценить V — разность между максимальным и минимальным значениями функции $C(x_2)$ на $[A_2, B_2]$.

Очевидно, что $V \leq V^* + H^* - V_* - H_* + \delta$, где V^* (V_*) — оптимальное значение целевого функционала задачи (14.25) при $x_2 = B_2$ ($x_2 = A_2$); H^* — оптимальное значение целевого функционала задачи (14.26) или $x_2 = A_2$; $H_* = \sum_{i=1}^3 c_{i2} n_{i2}^{\min}$; $\delta = 15$ — максимальные затраты на один запасной элемент. Вычисляем: $V^* = 95$; $V_* = 45$; $H^* = 70$; $H_* = 38$; полагаем $V = 97$. По формуле (14.23) при $\xi = 3\delta$ находим $\varphi = 5$.

Для получения приближенного оптимального решения задачи (14.24) необходимо сделать пятишаговую процедуру золотого сечения.

Шаг 1. Находим $\theta = (3 - \sqrt{5})/2 = 0,381966$; полагаем $\Delta_0 = [A_2, B_2] = [a, b] = [0, 1, 3, 4]$; находим точки деления отрезка Δ_0 : $x_1^1 = a(b-a)\theta = 1,36$; $x_2^1 = b - (b-a)\theta = 2,14$; вычисляем $C(x_1^1) = 129$; $C(x_2^1) = 134$; по правилу (14.22) выбираем $\Delta_1 = [0, 1, 2, 14]$.

Шаг 2. Вычисляем точки деления отрезка Δ_1 : $x_1^2 = 0,88$; $x_2^2 = x_1^1 = 1,36$; $C(x_1^2) = 131$; $C(x_2^2) = 129$; следовательно, $\Delta_2 = [0,88, 2,14]$.

Шаг 3. $x_1^3 = x_2^2 = 1,36$; $x_2^3 = 1,66$; $C(x_1^3) = 129$; $C(x_2^3) = 128$, следовательно, $\Delta_3 = [1,36, 2,14]$.

Шаг 4. $x_1^4 = x_2^3 = 1,66$; $x_2^4 = 1,84$; $C(x_1^4) = 128$; $C(x_2^4) = 135$; $\Delta_5 = [1,36, 1,66]$.

Шаг 5. $x_1^5 = 1,54$; $x_2^5 = x_1^4 = 1,66$; $C(x_1^5) = 127$; $C(x_2^5) = 128$.

Наилучшее значение $C(x_2) = 127$ получилось при $x_2 = 1,54$. Решение задачи оптимального проектирования двухкомплектного ЗИП имеет вид: $n_{11} = 1$; $n_{21} = 2$; $n_{31} = 3$; $n_{12} = 17$; $n_{22} = 17$; $n_{23} = 9$. Полным перебором можно убедиться, что это точное оптимальное решение исходной задачи.

Глава 15

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ

15.1. УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСОМ РЕЗЕРВНЫХ ИЗДЕЛИЙ

15.1.1. Предварительные замечания. Центральным объектом исследования в моделях управления запасами является процесс $Z(t)$ — число запасных изделий, имеющихся в наличии в момент t , или уровень запаса. Процесс $Z(t)$ уменьшается по мере расхода запасных изделий и увеличивается за счет пополнений. Расход задается некоторым случайным процессом (потоком требований), который

определяется потоком отказов, возникающих при эксплуатации систем. Пополнения заказываются в соответствии с принятой политикой управления и доставляются в соответствии с фиксированным правилом выполнения заказов. Политика управления показывает объем заказа и периодичность пополнения запаса.

При фиксации всех вышеперечисленных компонент модели $Z(t)$ становится вполне определенным случайным процессом, нахождение различных характеристик которого является одной из задач управления запасами. В частности, практический интерес представляет распределение времени до исчерпания запаса (или вероятность бесперебойного удовлетворения требований), стационарное распределение уровня запаса, его среднее значение, интенсивность подачи заказов и т. д.

Более специфические задачи связаны с выбором политики управления, оптимальной с позиции некоторого критерия. В этом критерии отражается стремление, с одной стороны, не создавать чрезмерные запасы, с другой — обеспечить своевременное удовлетворение требований, не допускать дефицита и, наконец, по возможности редко подавать заказы. В совокупности эти факторы противоречивы и разнохарактерны, поэтому их соизмерение представляет на практике самостоятельную нелегкую проблему. При математическом же моделировании вводят формальное понятие издержек разного вида. Так, штрафная функция f_i (i — целое) показывает интенсивность издержек при $Z(t) = i$, связанных либо с поддержанием запаса на определенном уровне (при $i > 0$), либо с его недостатками (при $i \leq 0$). Функция стоимости заказа $c(n)$ ($n > 0$) показывает, во что обходится заказ партии из n изделий.

Если все названные издержки, зависящие от динамики запасов и подачи заказов, проинтегрировать вдоль траектории $Z(t)$ и усреднить по времени, то получится естественный критерий эффективности, подлежащий минимизации.

15.1.2. Основные понятия и обозначения.

1. Основные случайные процессы:

$Z(t)$ — запас однотипных изделий в момент t (управляемый случайный процесс с целочисленными значениями). Отрицательные значения $Z(t)$ соответствуют задолженному спросу, т. е. количеству невыполненных требований;

$\xi(t_1, t_2)$ — расход изделий (или число требований на них) за интервал времени (t_1, t_2) — случайный процесс с известными характеристиками;

$\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределенных интервалов между поступлением требований (когда поток требований является рекуррентным);

$\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность целочисленных одинаково распределенных независимых случайных величин, задающих объем каждого требования. Когда каждое требование запрашивает ровно одно изделие, $v_i = 1$ с вероятностью 1;

$Y(t)$ — фиктивный запас, включающий как наличные изделия, так и уже заказанные, но еще не доставленные и, таким образом, еще не готовые к использованию в момент t ;

$$F(x) = P\{\xi_i \leq x\}; \bar{F}(x) = 1 - F(x); a = M\xi_i = \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx;$$

$$F_m(x) \text{ — } m\text{-кратная свертка } F(x): F_{m+1}(x) = \int_0^x F_m(x-y) dF(y);$$

$$r_i = P\{v_j = i\}, i \geq 1; \pi(z) = \sum_{i=1}^{\infty} r_i z^i.$$

2. Характеристики процессов пополнения запасов. Предполагается, что для восполнения расхода можно получить любое пополнение, но с некоторой задержкой:

τ — задержка в выполнении заказа (случайная или детерминированная величина);

$$G(x) = P\{\tau \leq x\}; \bar{G}(x) = 1 - G(x); h = M\tau = \int_0^{\infty} \bar{G}(x) dx.$$

Правило подачи заказов на пополнение характеризуется параметрами:

m — точка заказа (при снижении запаса до размера m подается заказ);

n — размер заказа;

$k = m + n$ — максимальный уровень запаса.

3. Стоимостные характеристики:

$c(n)$ — функция стоимости заказа (зависящая от его размера), определенная при $n \geq 1$;

f_i — штрафная функция, определенная при $-\infty < i < \infty$ и показывающая интенсивность издержек при запасе $Z(t) = i$. С помощью этой функции задаются расходы на хранение запасных изделий, издержки, связанные с их недостатками, и т. п.;

V — общая интенсивность издержек в стационарном режиме.

4. Характеристики системы управления запасами:

μ — частота подачи заказов в стационарном режиме;

θ — время, в течение которого $Z(t) > 0$;

K — стационарная вероятность ненулевого уровня запасов;

MZ — средний стационарный уровень запаса;

$p_i = P\{Z = i\}$ — стационарное распределение уровня запаса;

$s_i = P\{Y = k - i\}$ — стационарное распределение фиктивного уровня.

15.1.3. Описание моделей.

1. Прерывание потока требований (модель 1). Предполагается, что пока запас изделий не исчерпан, требования (единичного размера) поступают через случайные независимые и одинаково распределенные интервалы ξ_i . В момент, когда в наличии остается m изделий, подается заказ на n изделий, которые доставляются через случайное время τ . Если за это время m изделий израсходуются, то после этого новые требования уже не поступают вплоть до момента, когда будут доставлены заказанные изделия. Это и называется прерыванием потока требований. На практике такое явление имеет место тогда, когда отсутствие запасных изделий приводит к приостановке функционирования системы и тем самым — к приостановке расхода. Для упрощения принимается предположение о том, что $n \geq m$.

2. Рекуррентный поток требований единичного размера и постоянное время доставки (модель 2). В этой модели при истощении наличного запаса рекуррентный поток требований не приостанавливается, и возможно образование очереди неудовлетворенных требований, что соответствует отрицательным значениям $Z(t)$. Заказы на пополнение подаются после поступления очередных n требований в том же размере n , что и накопившийся расход. Задержка выполнения заказов τ постоянна. Максимальный уровень запаса равен k . Здесь, в отличие от модели 1, величина $Z(t)$ в момент заказа может быть различной, как и число уже сделанных, но еще не выполненных заказов. Однако понятие точки заказа можно сохранить, если ввести в рассмотрение фиктивный уровень $Y(t)$, представляющий собой сумму наличного запаса $Z(t)$ и числа заказанных, но еще не доставленных к моменту t изделий. Величина $Y(t)$ в момент заказа всегда равна $m = k - n$.

3. Случайный размер требований (модель 3). Отличие от модели 2 состоит в том, что размеры требований здесь являются случайными независимыми и одинаково распределенными величинами. Заказы подаются, когда процесс $Y(t)$ пересекает сверху уровень m , причем в таком размере, чтобы поднять $Y(t)$ до уровня k . Параметр $n = k - m$ здесь уже не является размером заказа, его можно именовать шириной зоны изменения процесса $Y(t)$.

4. Поступление требований от нескольких источников (модель 4). Если создаваемый запас изделий служит для обеспечения нескольких источников спро-

а, то моделью расхода может служить суперпозиция нескольких независимых рекуррентных потоков. Когда число составляющих потоков велико, то при достаточно общих условиях доказана близость результирующего потока к пуассоновскому. Здесь рассматривается случай, когда число источников невелико, так что такая аппроксимация некорректна. Все остальные предположения такие же, как в модели 2.

5. Случайные возможности пополнений (модель 5). Пусть возможность подачи заказа имеется не всегда (как это предполагалось в моделях 1—4), а появляется от случая к случаю. Например, запаасаемые изделия дефицитны или потенциальная возможность заказа имеется всегда, но постоянное слежение за расходом не осуществляется, а проверки состояния запаса и принятие решений о пополнениях происходят в случайные моменты времени.

Считаем, что расход описывается пуассоновским потоком интенсивности λ ; моменты времени $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$, когда возможно пополнение, образуют рекуррентный поток, и заказы подаются в том случае, если $Z(t) \leq m$, в таком размере, чтобы пополнить запас до k . Задержку в доставке считаем нулевой.

15.1.4. Основные формулы.

Модель 1:

$$\mu = (na + b_m)^{-1}, \text{ где } b_m = \int_0^{\infty} \bar{G}(x) F_m(x) dx;$$

$$M\theta = na/d_m, \text{ где } d_m = \int_0^{\infty} \bar{G}(x) dF_m(x);$$

$$R(t) = P\{\theta > t\} \approx e^{-d_m t/na} \text{ при } d_m \ll 1;$$

$$K = na/(na + b_m);$$

$$MZ = \frac{na(n+2m+1)j2-n(h-b_m)}{na+b_m};$$

$$V = f_0(1-K) + f_1MZ + \mu c(n) \text{ при } f_i = f_1 \cdot i, i \geq 1.$$

Модель 2:

$$\mu = (na)^{-1}; s_i = 1/n, i = 0, 1, \dots, n-1;$$

$$p_i = \frac{1}{n} \sum_{j=i+1}^k q_{j-i}, i \leq k,$$

$$\text{где } q_0 = 1 - \frac{1}{a} \int_0^{\tau} \bar{F}(x) dx; q_i = \frac{1}{a} \int_0^{\tau} [F_{i-1}(\tau-x) - F_i(\tau-x)] F(x) dx, i \geq 1;$$

$$MZ = \frac{n+2m+1}{2} - \frac{\tau}{a}; V(k, n) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g_{k-j} + \frac{c(n)}{na},$$

$$\text{где } g_j = \sum_{i=-\infty}^j q_{j-i} f_i.$$

Модель 3:

$$s_i = l_i \left| \sum_{j=0}^{n-1} l_j \right|, i = 0, 1, \dots, n-1,$$

где последовательность $\{l_i\}_{i=1}^{\infty}$ имеет производящую функцию

$$\varphi(z) = \sum_{i=0}^n l_i z^i = (1 - \pi(z))^{-1}, \mu = \left(a \sum_{j=0}^{n-1} l_j \right)^{-1}; p_i = \sum_{j=0}^{n-1} s_j \omega_{k-j-i}, i \leq k,$$

где $\omega_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P \{ \xi(t - \tau, t) = j \}$; $\sum_{j=0}^{\infty} \omega_j z^j = \sum_{i=0}^{\infty} q_i \pi^i(z)$.

При $c(n) = c_0 + c_1 i, i \geq 1$,

$$V(k, n) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} l_i g_{k-i} + C_0/a \right) / \left(\sum_{i=0}^{n-1} l_i \right) + c_1 M v/a,$$

где $g_j = \sum_{i=-\infty}^j f_i \omega_{j-i}$.

Модель 4:

$$s_i = 1/n, i = 0, 1, \dots, n-1 \text{ (как в модели 2).}$$

Модель 5:

Пусть $p_i = \lim_{t \rightarrow \infty} P \{ Z(t) = k - i \}$; $G(x) = P \{ t_{i+1} - t_i \leq x \}$; $g(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} dG(x)$.

Тогда $p_i = \mu \sum_{j=0}^{n-1} A_{i-j} B_j$,

где A_i и B_i имеют производящие функции:

$$A(z) = \frac{1 - g(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z}; B(z) = [1 - g(\lambda - \lambda z)]^{-1},$$

а μ определяется из условия нормировки. В частности, при $n = 1$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i = \frac{1 - g(\lambda - \lambda z)}{M \Delta t \lambda (1 - z)}; \mu = \frac{1 - g(\lambda)}{M \Delta t}.$$

При $c(n) = c_0 + c_1 n, n \geq 1$,

$$V(k, n) = \left(\sum_{j=0}^{n-1} g_{k-j} B_j + c_0/M \Delta t \right) / \sum_{j=0}^{n-1} B_j + c_1 \lambda,$$

где $g_i = \frac{1}{M \Delta t} \sum_{l=0}^{\infty} f_{i-l} A_l$.

15.1.5. Методы оптимизации управляющих параметров. Рассмотрим модель

1. Обозначим

$$V(m, n) = \frac{f_0 b_m + f_1 n [(n+2m+1)/2 - h + b_m] + c(n)}{na + b_m}. \quad (15.1)$$

Нужно минимизировать эту функцию на секторе целочисленной решетки: $n \geq 0, m \geq 0, n \geq m$. При любых $F(x)$ и $G(x)$ последовательность b_m не возрастает и выпукла, т. е. $\Delta b_m \leq 0, \Delta^{(2)} b_m \geq 0$. Используя этот факт, можно показать, что при $n = \text{const}$ $V(m, n)$ унимодальна (имеет единственный минимум) по m . При $c(n) = c_0 + c_1 n, n \geq 1$, функция $V(m, n)$ также унимодальна по n при $m = \text{const}$.

Точка минимума определяется явным выражением:

$$n^*(m) = \max \left(m, \left\lceil \left(\frac{1}{4} + \frac{2c_0}{f_1 a} + \frac{2b_m}{a} \left(-m - \frac{b_m}{2a} + \frac{f_0}{f_1} - \frac{1}{2} + \frac{h}{a} - \frac{c_1}{f_1 a} \right) \right)^{1/2} - \frac{b_m}{a} - \frac{1}{2} \right\rceil \right), \quad (15.2)$$

где $[x]$ означает округление x сверху до ближайшего целого.

Основные вычислительные трудности связаны с нахождением значений b_m через свертки функции $F(x)$, но в некоторых случаях можно получить явные формулы. Если, например,

$$G(x) = 1 - e^{-\alpha x}, \text{ то } b_m = [\tilde{F}(\alpha)]^m / \alpha,$$

$$\text{где } \tilde{F}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x).$$

$$\text{При } \tau = h = \text{const} \quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x};$$

$$b_m = hQ(m-1, \lambda h) - mQ(m, \lambda h)/\lambda, \quad (15.3)$$

где функция $Q(d, a)$ табулированная.

Если $G(x)$ — распределение Эрланга l -го порядка с параметром λ , а $\tau = h = \text{const}$, то

$$b_m = hQ(lm-1, \lambda h) - mlQ(ml, \lambda h)/h.$$

Функцию $Q(d, a)$ табулируют обычно до значений a , не превышающих 100—150. При больших значениях a можно пользоваться нормальной аппроксимацией пуассоновского распределения.

В случаях, когда явных формул для b_m нет, можно воспользоваться методом Монте-Карло, используя представление

$$b_m = M\omega, \text{ где } \omega = \left(\tau - \sum_{i=1}^m \xi_i \right)^+.$$

При этом в соответствии с распределениями $G(x)$ и $F(x)$ генерируются случайные величины τ , $\{\xi_i\}_{i=1}^m$ и вычисляется соответствующая величина ω . Эта процедура повторяется многократно, и в качестве оценки b_m берется $\hat{b}_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i$.

Точность получаемых оценок зависит от числа статистических испытаний N , и для выбора этого параметра нужно уметь оценивать $D\omega$. Легко показать, что

$$D\omega \leq (h + ma)^2 d_m + D\tau + m^2 D\xi.$$

В табл. 15.1 приведены для иллюстрации результаты, полученные методом статистического моделирования в случае $\tau = 5$, $G(x) = 1 - e^{-x}$, вместе с истинными значениями b_m , вычисленными по формуле (15.3).

Т а б л и ц а 15.1

Результаты статистического моделирования

$\hat{b}$	N					Истинное значение
	20	40	60	80	100	
$\hat{b}_1$	3,8999	3,8956	3,8738	3,8889	3,9430	4,0067
$\hat{b}_5$	0,8445	0,7892	0,8313	0,7963	0,7422	0,8773
$\hat{b}_8$	0,0124	0,0709	0,0473	0,0355	0,0514	0,1221

При $N \leq 100$ оценка $\widehat{b}_{10}$ оставалась равной нулю. При $N = 1000$ была получена оценка $\widehat{b}_{10} = 0,0109$ при истинном значении $b_{10} = 0,0227$. Из таблицы видно, что при фиксированном N малые b_m оцениваются с большей относительной погрешностью. Для уменьшения погрешности нужно увеличивать N , что требует высокого быстродействия используемой ЭВМ.

Указанный имитационный метод оценки b_m можно распространить на характерный для практики случай, когда распределения $F(x)$ и $G(x)$ (или одно из них) не известны, а есть лишь набор статистических данных с наблюдавшимися реализациями величин ξ и τ . Тогда для оценки a и h естественно взять соответствующие среднестатистические величины, после чего для расчетов по формуле (15.1) останется лишь оценить b_m . Для этого можно опять-таки генерировать и усреднять величины ω , с той лишь разницей, что для получения τ и ξ используется равновероятная выборка из имеющихся статистических наборов. Таким способом можно находить оптимальные m и n , не используя никаких гипотез о функциях распределения $G(x)$ и $F(x)$ и исходя непосредственно из статистических данных.

Пример 15.1. Допустим, что поток требований пуассоновский, а время задержки в выполнении заказа постоянно. При этом b_m определяется формулой (15.3). Пусть: $a = 1$ ($\lambda = 1/a$); $\tau = 5$; $f_0 = 50$; $f_1 = 0,1$; $c(n) = c_0 + c_1 n$ ($n > 0$); $c_0 = 20$; $c_1 = 10$. Здесь и далее не указываем размерностей, предполагая, что все величины даны в одной и той же системе единиц.

Решение. Из (15.1)

$$V(m, n = \text{const}) = 50 + 0,1n + \frac{0,1mn + 0,1n[(n+1)/2 - 5] + 20 + 10n - (50 + 0,1n)n}{b_m + n}, \quad (15.4)$$

а согласно (15.2)

$$n^*(m) = \max(m, \lceil \sqrt{400,25 + 2b_m(-m - 0,5b_m + 404,5)} - b_m - 0,5 \rceil \rceil). \quad (15.5)$$

Кроме того, нам понадобятся значения b_m , рассчитанные по формуле (15.3) и приведенные в табл. 15.2 с точностью до четвертого знака после запятой.

Таблица 15.2

Значения b_m

m	b_m	m	b_m	m	b_m	m	b_m
0	5,0000	4	1,4368	8	0,1221	12	0,0030
1	4,0067	5	0,8773	9	0,0531	13	0,0010
2	3,0472	6	0,4933	10	0,0227	14	0,0003
3	2,1718	7	0,2555	11	0,0085	15	0,0001

При $m > 15$ величины b_m с принятой точностью можно считать нулевыми.

Поиск минимума будем осуществлять методом покоординатного спуска из точки $(0, 0)$, где $V = 50$. По формуле (15.5)

$$n^*(0) = \lceil \sqrt{4420,25} - 5,5 \rceil = 61.$$

Подставляя $n = 61$ в (15.4), находим

$$V(m, n = 61) = 56,1 + \frac{6,1m - 2633,5}{b_m + 61}. \quad (15.6)$$

Из точки (0, 61), где $V = 16,2$, спускаемся вдоль оси. Минимум функции (15.6), являющейся унимодальной, можно найти методом Фибоначчи. (Напомним, что i -й член последовательности Фибоначчи находится по формуле $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$, $i \geq 3$.)

Предположим, что искомый минимум расположен в одной из целочисленных точек интервала, длина которого равна одному из членов ряда Фибоначчи. В рассматриваемом случае в качестве такого интервала можно взять $(-1, 20)$, длина которого равна F_8 . При $m > 20$ функция $V(m)$ линейно возрастает по m , поскольку $b_m \approx 0$, и, следовательно, минимум этой функции расположен на интервале $(-1, 20)$.

Вычисления по методу Фибоначчи приводят к последовательному сокращению длины F_8 интервала неопределенности, причем после первого шага его длина равна F_7 , после второго F_6 и т. д.

На первом шаге вычисляем значения функции (15.6) в точках, отстоящих на $F_7 = 13$ от концов исходного интервала $(-1, 20)$, т. е. в точках $m = 7$ и $m = 12$:

$$V(7) = 13,805; \quad V(12) = 14,123.$$

Поскольку $V(12) > V(7)$, минимум не может находиться на полуинтервале $[12, 20)$ и этот полуинтервал отбрасываем. Остается интервал $(-1, 12)$, длина которого равна F_7 . Отступая от его концов на $F_6 = 8$, получаем точки $m = 4$ и $m = 7$ и находим, что $V(4) = 14,312$ [$V(7)$ уже вычислено на первом шаге]. Видим, что $V(4) > V(7)$ и отбрасываем полуинтервал $(-1, 4]$. Остается интервал $(4, 12)$ длиной F_6 . Отступаем от концов на $F_5 = 5$, получаем точки $m = 7$ и $m = 9$. Находим, что $V(6) = 13,865$.

Поскольку $V(7) < V(9)$, остается интервал $(4, 9)$ длиной F_5 . Отступаем от его концов на $F_4 = 3$ и получаем точки $m = 6$ и $m = 7$. Находим, что $V(6) = 13,869$, следовательно, $V(7) < V(6)$. Остается интервал $(6, 9)$, содержащий единственную точку $m = 8$, в которой значение функции (15.6) еще не найдено. Находим, что $V(8) = 13,813$, и убеждаемся, что минимум функции (15.6) достигается при $m = 7$. Итак, получена точка $(7, 61)$, причем $V(7, 61) = 13,805$.

Дальнейший спуск осуществляем вдоль оси n . Из (15.5)

$$n^*(7) = \lceil \sqrt{603,3072} - 0,7555 \rceil = 24.$$

Из точки $(7, 24)$ спускаемся вдоль оси m . Из (15.4)

$$V(m, n=24) = 52,4 + \frac{2,4m - 979,6}{b_m + 24}. \quad (15.7)$$

Поиск минимума функции (15.7) на интервале $(-1, 20)$ методом Фибоначчи дает такую последовательность значений:

$$V(7) = 12,706; \quad V(12) = 12,788; \quad V(4) = 14,266;$$

$$V(9) = 12,5715; \quad V(10) = 12,621; \quad V(8) = 12,586.$$

Видим, что минимум достигается в точке $m = 9$.

Из точки $(9, 24)$ осуществляем спуск вдоль оси n . Из (15.5) получаем

$$n^*(9) = \lceil \sqrt{442,25} - 0,5531 \rceil = 21$$

и попадаем в точку $(9, 21)$. Из (15.4)

$$V(m, n=21) = 52,1 + \frac{2,1m - 851,1}{b_m + 21}.$$

Методом Фибоначчи находим, что минимум этой функции находится в точке $m^* = 9$. Поскольку точка $(9, 21)$ получена вторично, она является точкой минимума, причем $V(9, 21) = 12,552$.

Рассмотрим теперь модель 2. Обозначим

$$V(m, n) = V_1(m, n) + V_2(n),$$

$$\text{где } V_1(m, n) = \frac{1}{n} \sum_{j=m+1}^{m+n} g_j; V_2(n) = \frac{c(n)}{na}.$$

Пусть последовательность g_j имеет единственный минимум в точке j_0 . При фиксации последовательных значений n условно оптимальные зоны Γ_n строятся по правилу:

$$\Gamma_1 = j_0; \quad \Gamma_2 = (j_0, j_1),$$

где

$$j_1 = \begin{cases} j_0 + 1, & \text{если } g_{j_0+1} < g_{j_0-1}, \\ j_0 - 1, & \text{если } g_{j_0+1} \geq g_{j_0-1}, \end{cases}$$

и т. д., так что Γ_n образуется прибавлением к зоне Γ_{n-1} соседней точки либо справа, либо слева, в зависимости от того, где меньше значение g_j .

Обозначим члены последовательности g_j , переставленные в порядке возрастания, через $a_1, a_2, \dots$. И пусть $A_n = \sum_{i=1}^n a_i$; тогда оптимальное n получается при минимизации выражения

$$A_n/n + c(n)/na. \quad (15.8)$$

При $c(n) = c_0 + c_1 n$ это выражение унимодально, причем его минимум достигается при минимальном n , таком, что $na_{n+1} - A_n \geq c_0/a$. Если поток требований пуассоновский с параметром λ и

$$f_i = \begin{cases} k_1 i, & i \leq 0, \\ k_2 i, & i > 0, \end{cases}$$

то:

$$g_j = (k_1 + k_2) [\lambda h Q(j, \lambda h) - j Q(j+1, \lambda h)] + k_2 (j - \lambda h); \quad \Delta g_j = k_2 - (k_1 + k_2) Q(j+1, \lambda h). \quad (15.9)$$

Пример 15.2. Положим: $c_0 = 1$; $\lambda = 5$; $h = 2$; $k_1 = 8$; $k_2 = 2$. Значение c_1 не влияет на выбор оптимальных параметров, так как с ним связано только постоянное слагаемое λc_1 в выражении для V .

Решение. Ищем минимум g_j , для чего в таблице $Q(j, 10)$ берем такое минимальное j_0 , что $Q(j, 10) \leq k_2/(k_1 + k_2) = 0,2$. Получаем $j_0 = 13$. В табл. 15.3 приведены значения $Q(j, 10)$ в окрестности этой точки. В третьей строке даны значения g_j , вычисленные согласно (15.9). Ясно, что $\Gamma_1 = 13$; $\Gamma_2 = (12, 13)$; $\Gamma_3 = 12, 14$; $\Gamma_4 = 11, 14$; $\Gamma_5 = 11, 15$.

Таблица 15.3

Значения $Q(j, 10)$

j	9	10	11	12	13	14	15
$Q(j, 10)$	0,542	0,417	0,303	0,208	0,136	0,083	0,049
g_j	—	12,5	10,4	9,3	9,1	10	11,1

Результаты решения для примера 15.2

n	1	2	3	4	5
a_n	9,1	9,3	10	10,4	11,1
A_n	9,2	18,4	28,4	38,4	49,9
$\frac{na_{n+1}-A_n}{A_n}$	0,2	1,6	2,8	5,6	

Теперь вычисляем выражение (15.8). Результаты вычислений сведем в табл. 15.4. По нижней строке табл. 15.4 ищем минимальное n , такое, что $na_{n+1} - A_n \geq \lambda c_0$. Это $n^* = 4$. Следовательно, оптимальной зоной изменения $Y(t)$ будет $\Gamma_4 = \overline{11, 14}$. Иными словами, оптимальными будут параметры $m^* = 10$ и $n^* = 4$. При этом $V = A_4/4 + \lambda c_0/4 = 10,85$.

15.1.6. Приближенное решение для централизованной системы. Рассмотрим два случая.

1. Центральный склад располагает N элементами, чтобы снабжать k низовых

складов в течение фиксированного времени t_0 . Нарботка элемента ξ — с функцией распределения $F(x)$. Время доставки с центрального склада на объекты постоянно и равно t_d . На каждом низовом складе используется (m, n) -правило заказа (при $n \geq m$). Пусть $P(t_0)$ — вероятность того, что ни на одном низовом складе не произойдет перебоя в снабжении элементами и центральный склад будет своевременно отправлять заказанные партии. Тогда

$$P(t_0) \approx e^{-kt_0 F_m(t_d)/na} \Phi\left(\frac{N - kt_0/a - M}{\sqrt{\sigma^2 kt_0/a^3 + D}}\right), \quad (15.10)$$

где $M = (n+1)(k-1)/2$; $D = (k-1)(n^2-1)/12$; $\Phi(x)$ — нормированная функция нормального распределения. Формула (15.10) дает хорошее приближение, когда:

а) $F_m(t_d) \ll 1$, т. е. за время доставки заказанной партии вероятность появления более m требований мала;

б) суммарное число требований, поступивших за время t_0 от всех k низовых складов, достаточно велико (что позволяет использовать нормальную аппроксимацию для распределения числа поступивших требований).

2. С центрального склада имеется возможность посылать заказы на пополнение, причем они доставляются за фиксированное время T_d . Центральный склад использует (M, N) -правило заказа, а низовые склады (m, n) -правило, причем $n \geq m$, $N \geq M$. Поскольку в центральный склад поступают требования сразу на n элементов, удобно перейти к приведенным параметрам $M' = M/n$; $N' = N/n$, считая их целыми. Вероятность бесперебойного снабжения $P(t)$ за время t можно вычислить в предположении $k \gg 1$, что позволяет использовать пуассоновскую аппроксимацию для описания суммарного потока заказов с низовых складов в центральный. Параметр этого аппроксимирующего потока Λ' вычисляется по формуле $\Lambda' = k/na'$, где $a' \approx a[1 + m/n F_m(t_d)]$ (предполагается, что $F_m(t_d) \leq 1$). Если дополнительно предположить, что

$$A_{M'-1}(\Lambda' T_d) = 1 - e^{-\Lambda' T_d} \sum_{j=0}^{M'-1} \frac{(\Lambda' T_d)^j}{j!} \ll 1,$$

то искомая функция $P(t)$ хорошо приближается экспоненциальной функцией $P(t) \approx e^{-\Lambda_\Sigma t}$ с параметром

$$\lambda_\Sigma = \frac{k}{na} F_m(t_d) + \frac{\Lambda'}{N'} A_{M'-1}(\Lambda' T_d).$$

15.2.1. Предварительные замечания. На практике часто возникает проблема обеспечения парка технических систем (например, вычислительных центров, автохозяйств и т. п.) многономенклатурным запасом элементов и деталей, необходимых для проведения текущих ремонтов и плановых предупредительных замен. При этом предполагается, что каждый территориально обособленный объект может включать в свой состав несколько обслуживаемых технических устройств: вычислительный центр может быть оснащен несколькими ЭВМ одного и того же класса или типа, к автопарку может быть приписано много машин, запасные части которых могут совпадать по типоразмерам, и т. д. Такой обособленный объект может пополнять свой индивидуальный запас элементов и деталей, необходимых для проведения технического обслуживания, лишь периодически из фондов некоторого центрального или регионального склада. Подобная иерархия складского хозяйства может быть продолжена, а в качестве верхнего уровня можно рассмотреть поток поступления запасных частей и элементов с заводов.

Для простоты будет рассмотрена лишь двухуровневая схема снабжения, однако результаты могут быть легко перенесены и на схемы с большим числом уровней, каждый из которых может иметь свои периоды пополнения.

Говоря об обеспечении некоторого технического объекта запасными элементами, мы будем предполагать, что эти элементы предназначаются для поддержания системы в исходном состоянии, т. е. с учетом наличия всех резервов. Иными словами, обслуживаемый объект в этом смысле представляет собой как бы последовательное соединение элементов. Аналогично центральный склад считается удовлетворительно функционирующим, если он способен в начале каждого периода планового пополнения запаса индивидуального объекта довести этот запас до номинального уровня.

Принцип решения общей задачи поясняется на простой вспомогательной задаче с однономенклатурным запасом.

15.2.2. Однономенклатурный запас. Единственный технический объект, состоящий из n основных однотипных элементов, должен быть обеспечен запасными элементами (ненагруженным резервом) на период работы θ , после чего запас пополняется до начального уровня и работа объекта продолжается. Не отказавшие элементы продолжают работать на следующем периоде. Запас пополняется мгновенно (это ограничение, по существу, не является принципиальным и может быть легко учтено) за счет центрального склада. Сам центральный склад может пополняться с периодом τ , который для простоты выбран кратным θ , т. е. $\tau = s\theta$, где s — целое.

Требуется обеспечить объект и центральный склад таким числом запасных элементов, чтобы затраты на запасные элементы были бы минимальными при требуемой вероятности обеспечения объекта необходимыми средствами для технического обслуживания. (Ради краткости изложения обратная постановка задачи, касающаяся максимизации качества обеспечения запасными элементами при ограничениях на суммарные затраты, не рассматривается.)

Для конкретности будем рассматривать в качестве показателя надежности системы обеспечения технического объекта запасными элементами вероятность того, что за время τ не возникнет дефицита запасных элементов при необходимости проведения замены в течение времени θ непосредственно на объекте либо при необходимости постановки очередной партии с центрального склада, который оказался к этому моменту опустошенным.

Примечание. Можно в качестве показателей надежности обеспечения выбрать и другие, например долю времени, в течение которого объект находится в состоянии обеспеченности запасными элементами (аналог коэффициента готовности), среднюю длительность периода до первого возникновения дефицита запасных элементов и т. п.

Предположим для простоты, что отказы элементов у рассматриваемого технического объекта образуют пуассоновский поток $\Lambda = n\lambda$. В этом предположении все элементы, проработавшие безотказно в течение интервала времени θ , в начале нового периода работы полностью эквивалентны по своим характеристикам надежности новым элементам, только что поставленным в работу из числа запасных.

Обозначим через v_t случайное число элементов, отказавших за время t . Если на период θ техническому объекту придано x запасных элементов, то вероятность того, что запасных элементов окажется достаточно, равна

$$r(x, \theta) = P\{v_\theta \leq x\} = \sum_{k=0}^x \frac{(n\lambda\theta)^k}{k!} e^{-n\lambda\theta}. \quad (15.11)$$

Если не наступает полного исчерпания запасных элементов, то в начале нового периода нужно пополнить запас на случайную величину $\tilde{v}_\theta$. Эта случайная величина отличается от v_θ тем, что она имеет усеченное справа распределение (она не может быть больше x), т. е.

$$P\{v_\theta = z\} = \begin{cases} (P\{v_\theta \leq x\})^{-1} \frac{n\lambda\theta^z}{z!} e^{-n\lambda\theta} & \text{при } z \leq x, \\ 0 & \text{при } z > x. \end{cases}$$

При приближенном решении усечение распределения можно не учитывать, что позволит получить решение в более простой форме.

Далее, центральный склад, имея x_0 запасных элементов на период τ , может обеспечить пополнение индивидуального запаса технического объекта в течение $s-1$ необходимых по объему поставок с вероятностью

$$\begin{aligned} r(x_0, \tau - \theta) &\approx P\left\{\sum_{i=1}^{s-1} v_\theta^i \leq x^0\right\} = \\ &= \sum_{k=0}^{x_0} \frac{(n\lambda(\tau - \theta))^k}{k!} e^{-n\lambda(\tau - \theta)}. \end{aligned} \quad (15.12)$$

(Аргумент $\tau - \theta$ появляется, так как пополнение начинается со второго цикла работы объекта.)

Вероятность того, что описанная система обеспечит бесперебойное снабжение технического объекта запасными элементами в течение всего периода τ , можно приближенно записать в виде

$$R(x, x_0, \theta, \tau) \approx r(x_0, \tau - \theta) [r(x, \theta)]^{\tau/\theta},$$

где в правой части стоят выражения, определенные в (15.11) и (15.12).

Истинная вероятность указанного события будет больше, так как: 1) отказ какого-либо элемента при отсутствии запасных элементов на объекте может еще не означать отказа этого объекта, так как последний может продолжать нормально функционировать за счет наличия внутренней избыточности; 2) нехватка запасных элементов в центральном складе для очередного пополнения индивидуального запаса не означает отказа системы, так как при этом объект может нормально проработать в течение периода θ (или даже нескольких таких периодов) при неполном исходном числе запасных элементов; 3) события A — нехватка элементов индивидуального запаса на одном из периодов θ и B — нехватка элементов центрального склада для пополнения индивидуального запаса на одном из периодов τ являются положительно коррелированными, а следовательно, $P(AB) > P(A)P(B)$.

Примечание. Вероятность $R(x, x_0, \theta, \tau)$ можно было бы записать и более точно (с учетом указанных выше поправок), однако предлагаемое приближенное решение является вполне удовлетворительным для практических целей.

Прямая и обратная задачи оптимизации могут быть записаны соответственно в виде:

$$\begin{aligned} \max_{x, x_0} \{ & R(x, x_0, \theta, \tau) \mid C_1(x) + C_2(x_0) \leq C^* \}; \\ \min_{x, x_0} \{ & \frac{\tau}{\theta} C_1(x) + C_2(x_0) \mid R(x, x_0, \theta, \tau) \geq R^* \}, \end{aligned}$$

где C^* и R^* — соответствующие допустимые (или требуемые) значения.

Функции C_1 и C_2 выбраны различными, так как в общем случае они могут учитывать разные затраты на хранение запасных элементов в составе индивидуального запаса непосредственно на объекте, а также на центральном складе. Для простоты в дальнейшем будем считать $C_1(x) = cx$ и $C_2(x_0) = cx_0$, где c — стоимость одного элемента.

Если центральный склад должен обеспечить M различных территориально обособленных технических объектов, различающихся по числу входящих в них однотипных элементов (i -й объект состоит из n_i элементов, $i = 1, \dots, N$), то целевой функционал $R(x, x_0, \theta, \tau)$, где $x = (x_1, \dots, x_N)$, имеет вид

$$R(x, x_0, \theta, \tau) \approx r(x_0, \tau - \theta | M) \prod_{i=1}^M [r(x_i, \tau)]^{\frac{\tau}{\theta}}. \quad (15.13)$$

$$\text{Здесь } r(x_0, \tau - \theta | M) = \sum_{k=0}^{x_0} \frac{(\lambda(\tau - \theta) \sum_{i=1}^N n_i)^k}{k!} e^{-\lambda(\tau - \theta) \sum_{i=1}^N n_i};$$

$$r(x_i, \tau) = \sum_{k=0}^{x_i} \frac{(n_i \lambda_i \theta)^k}{k!} e^{-n_i \lambda_i \theta}.$$

Выражение для затрат на запасные элементы будет иметь вид (для случая линейной зависимости)

$$C(x, x_0) = c \left(x_0 + \sum_{i=1}^N x_i \right).$$

Примечание. Запись функционала в виде (15.13) может в принципе привести к тому, что различные объекты будут обеспечены запасными элементами с разной степенью надежности.

15.2.3. Многономенклатурный запас. Пусть i -й объект состоит из m типов различных элементов $n_{i1}, \dots, n_{im}$. Обозначим c_j и λ_j — соответственно стоимость и интенсивность отказов одного элемента j -го типа ($j = 1, \dots, m$);

$$X_i = (x_{i1}, \dots, x_{im}); X = (x_1, \dots, x_M); X_0 = (x_{01}, \dots, x_{0m}).$$

Очевидно, что:

$$\begin{aligned} r_i(X_i, \theta) &= \prod_{j=1}^m r(x_{ij}, \theta); \\ r_{ij}(x_{ij}, \theta) &= \sum_{d=0}^{x_{ij}} \frac{(n_{ij} \lambda_j \theta)^d}{d!} e^{-n_{ij} \lambda_j \theta}; \end{aligned}$$

$$r_0(\mathbf{X}_0, \tau - \theta) = \prod_{j=1}^m r(x_{0j}, \tau - \theta);$$

$$r_{0j}(x_{0j}, \tau - \theta) = \sum_{d=0}^{x_{0j}} \frac{\left[\lambda_j(\tau - \theta) \sum_{i=1}^M n_{ij} \right]^d}{d!} \exp \left[-\lambda_j(\tau - \theta) \sum_{i=1}^M n_{ij} \right].$$

При решении практических задач можно воспользоваться приближенным методом (см. п. 13.3.6). Применительно к рассматриваемой задаче этот метод дает следующее выражение для оптимального решения:

$$Q_i(\mathbf{X}_i^*, \theta) \approx \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} c_j \right) / \sum_{i=0}^M \sum_{j=1}^m c_j \delta_{ij} Q_0, \quad (15.14)$$

где $\mathbf{X}_i^*$ — вектор, соответствующий оптимальному решению i -го технического объекта;

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если в состав } i\text{-го технического объекта входит элемент } j\text{-го типа,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Аналогично

$$Q_0(\mathbf{X}_0^*, \tau - \theta) \approx \left(\sum_{j=1}^m \delta_{0j} c_j \right) / \sum_{i=0}^M \sum_{j=1}^m c_j \delta_{ij} Q_0, \quad (15.15)$$

где $\mathbf{X}_0^*$ — вектор, соответствующий оптимальному решению для центрального склада;

$$\delta_{0j} = \begin{cases} 1, & \text{если в состав хотя бы одного технического объекта} \\ & \text{входит элемент } j\text{-го типа,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Процедуру определения «квот ненадежности» типа (15.14) и (15.15) можно продолжить далее.

Однако (15.14) и (15.15) можно взять в качестве первых приближений, а далее использовать, например, метод покоординатного наискорейшего спуска для каждого технического объекта и для центрального склада. В этом случае можно рекомендовать следующую процедуру.

Пусть в i -м техническом объекте (индекс $i = 0$ соответствует центральному складу), где уже имеется X_i запасных элементов, добавляется один запасной элемент j -го типа. Вычисляем для этого случая относительное приращение:

$$\gamma_{ij}(X_i) \approx \frac{Q_i(X_i) - Q_i(X_i + \mathbf{e}_j)}{c_j}, \quad (15.16)$$

где $\mathbf{e}_j$ — вектор, у которого все компоненты, кроме j -й, равны нулю, а j -я равна единице.

В систему добавляются элемент с таким номером j и система с таким номером i , для которых величина γ_{ij} , определяемая в (15.16), является наибольшей.

Таким образом, может быть получено хотя и приближенное, но зато крайне простое решение задачи о нахождении состава многономенклатурного запаса с иерархической структурой и периодическим пополнением.

ОПТИМАЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ И ПОИСК ОТКАЗОВ

16.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Технические системы состоят из большого числа комплектующих элементов и имеют сложную структуру, что приводит к достаточно трудным задачам диагностики их состояния (обнаружения и отыскания отказов).

Система, рассматриваемая как объект контроля (ОК), представляет совокупность n составляющих ее элементов (множество Ω), соединенных между собой функциональными связями. Каждый из элементов системы может находиться в одном из двух возможных состояний: работоспособности или отказа. Вероятность работоспособного состояния i -го элемента обозначается p_i , а вероятность отказа q_i ($q_i = 1 - p_i$). Предполагается, что отказы отдельных элементов системы взаимонезависимы.

Контроль системы заключается в применении специальных тестов, каждый из которых проверяет работоспособность вполне определенного подмножества элементов. Проверка производится для следующих целей:

проверить работоспособность системы (обнаружение любого имеющегося отказа);

отыскать отказ (отыскание всех отказавших элементов).

В первом случае достаточно применить тест, проверяющий всю систему (так называемый общий тест). Однако иногда проведение такого теста принципиально невозможно либо нецелесообразно, так как он требует существенных затрат времени и (или) средств, поэтому выгоднее использовать совокупность нескольких простых тестов.

Для контроля работоспособности и поиска мест отказов ОК имеется возможность проведения тестов t_i , $i = 1, \dots, m$, позволяющих проверить m параметров, номинальное значение каждого из которых обеспечивается работоспособностью элементов определенного подмножества Ω_i . Тест может состоять в подаче необходимых входных воздействий, измерении реакции в одной или нескольких контрольных точках и т.п. Результаты применения каждого теста классифицируются по схеме: «успешен», если работоспособны все элементы из Ω_i и «не успешен», если отказал по крайней мере один элемент из Ω_i . Применение каждого теста связано с некоторыми затратами c_i , которые могут обозначать время или затраты, необходимые для проверки параметра, стоимость требующейся при этом аппаратуры и т.д. Совокупность тестов удобнее задать в виде матрицы $T = ||t_{ij}||$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, строки которой соответствуют имеющимся тестам, а столбцы — элементам множества Ω . Таким образом,

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j \in \Omega_i, \\ 0, & \text{если } j \notin \Omega_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Вектор-столбец $c = \{c_1, \dots, c_m\}$ определяет затраты, связанные с применением каждого теста. Будем считать, что имеющихся тестов достаточно для выполнения задачи контроля.

Процессы контроля можно классифицировать по ряду признаков.

1. По глубине локализации отказов различают процессы контроля работоспособности системы в целом и диагностирования с целью определения состояния каждого элемента.

2. По способу проведения процедуры контроля можно разделить на последовательные и комбинационные. В первом случае выбор каждого следующего теста или окончание процедуры производится в соответствии с некоторой условной программой по результатам анализа предыдущих проверок. Во втором случае

истинное состояние ОК определяют после применения всей совокупности выбранных заранее тестов.

3. Последовательные процедуры контроля обычно оцениваются двумя типами критериев оптимальности: минимумом средних затрат на реализацию программы и минимумом максимальных значений этой величины. Критерием оптимальности комбинаторного поиска служат обычно суммарные затраты на его проведение.

4. При априорном определении множества допустимых состояний ОК принимаются обычно две гипотезы: а) в ОК возможен отказ не более одного элемента; б) возможны произвольные комбинации одновременно отказавших элементов.

5. Если допускаются произвольные комбинации одновременных отказов, то последовательные процедуры контроля могут сочетаться с восстановлением отказавших элементов по мере их обнаружения либо протекать без восстановления. В первом случае процедура осуществляется до полного восстановления ОК, во втором — до установления состояния каждого элемента, т.е. до идентификации состояния ОК.

6. По совокупности элементов, остающихся непроверенными после проведения контроля, различают контроль с полным и неполным охватом элементов ОК.

7. По степени надежности показаний контрольно-измерительной аппаратуры различают достоверный и недостоверный контроль.

8. По степени детализации информации о состоянии ОК, полученной в результате контроля, различают задачи принятия решений об истинном состоянии ОК в условиях полной и неполной информации.

16.2. КОНТРОЛЬ РАБОТОСПОСОБНОСТИ И ДИАГНОСТИРОВАНИЕ СИСТЕМ С ОДИНОЧНЫМ ОТКАЗОМ

16.2.1. Постановка задачи. Достоверно известно о существовании в ОК ровно одного отказа, задана матрица тестов T и вероятности отказа каждого элемента q_i , $i = 1, \dots, n$. Необходимо выбрать некоторую группу тестов, достаточную для отыскания отказавшего элемента, и определить условный порядок последовательного применения тестов этой группы (программу) так, чтобы среднее значение суммарной стоимости проведения процедуры поиска было минимальным.

Применение любого теста t_i можно рассматривать как разбиение множества элементов Ω на два подмножества: Ω_i и $\bar{\Omega}_i$. При исходе «не успешен» отказавший элемент находится в подмножестве Ω_i , при исходе «успешен» — в подмножестве $\bar{\Omega}_i$. Для дальнейшей локализации отказа могут применяться тесты $t_u \in T$ (называемые далее существенными), позволяющие осуществлять дальнейшее разбиение подмножеств Ω_i или $\bar{\Omega}_i$, содержащих отказавший элемент. Тест t_u является существенным для подмножества Ω_i , если одновременно $\Omega_u \cap \Omega_i \neq \Omega_i$ и $\Omega_u \cap \bar{\Omega}_i \neq \emptyset$. Список существенных тестов для Ω_i обозначим T_i , причем, если для двух тестов t_u и t_v $\Omega_u \cap \Omega_i = \Omega_v \cap \Omega_i$, то в списке T_i оставим один, которому соответствуют меньшие затраты. Список T_i можно представить матрицей, столбцы которой соответствуют элементам Ω_i . Каждая k -я строка матрицы соответствует некоторому тесту $t_{u(k)}$, $k = 1, \dots, m_i$, контролирующему работоспособность подмножества $\Omega_{u(k)}^i = \Omega_u \cap \Omega_i$ при затратах $c_{u(k)}^i = c_u$. Индекс внизу без скобок служит для идентификации каждого теста в исходной матрице T . Иногда для упрощения записи он будет опускаться. (Аналогично может быть сформирована матрица тестов, существенных для $\bar{\Omega}_i$, если дальнейший поиск отказавшего элемента осуществляется именно в этом подмножестве.)

Если в ОК возможен только один отказ, то признак достаточности матрицы T для локализации любого отказа на уровне элемента состоит в том, что все столбцы матрицы должны быть попарно различны.

16.2.2. Приближенный алгоритм при производных пересекающихся тестах. Пусть к началу некоторого M -го шага процесса проверки проведена последовательность тестов $\sigma^{(M-1)} = \{t_1, \dots, t_{(M-1)}\}$ и задача сводится к отысканию отказавшего элемента в подмножестве $\Omega^{(M-1)}$. (Перед самым началом процесса проверки системы $\Omega^{(0)} = \Omega$, т. е. $\Omega^{(0)}$ включает в себя все элементы системы, а $\sigma^{(0)}$ не включает в себя ни одного теста.)

Алгоритм отыскания единственного отказавшего элемента состоит в следующем.

1. Определяются величины $\tilde{q}_j^{(0)}$ — условные вероятности отказа именно j -го элемента, если в проверяемом множестве ровно один отказавший элемент:

$$\tilde{q}_j^{(0)} = \hat{q}_j \left(\sum_{i \in \Omega^{(0)}} \hat{q}_i \right)^{-1}, \quad \text{где } \hat{q}_i = q_i p_i^{-1}.$$

Примечание. В принципе при используемой далее процедуре достаточно вычислить величины $\hat{q}_j$, так как ниже, в п. 5, имеют существенное значение лишь относительные, а не абсолютные величины $\hat{q}_j$ на каждом шаге. Это сокращает вычисления, поскольку не нужно производить пересчет этих величин после каждого шага процесса.

2. Для каждого существенного теста вычисляется вероятность неуспешного исхода в проверяемом подмножестве:

$$Q_i^{(0)} = \sum_{j \in \Omega_j \cap \Omega^{(0)}} \tilde{q}_j^{(0)}.$$

3. Для каждого существенного теста t_i находят связанные с ним затраты $c_i^{(0)}$ с учетом того, что уже проведена последовательность тестов $\sigma^{(0)}$. В общем случае затраты на проведение теста t_i могут как убывать, так и возрастать при условии проведения других тестов. (Например, либо могут быть подключены при предыдущих проверках необходимые для данного теста приборы, либо, наоборот, проведение предыдущих проверок может затруднить доступ к нужной части системы.)

4. Для каждого теста t_i определяются величины

$$g_i^{(0)} = c_i^{(0)} / Q_i^{(0)}.$$

5. Выбирается такой тест t_k , для которого $g_k^{(0)}$ минимальна:

$$g_k^{(0)} = \min_{1 \leq i \leq m} g_i^{(0)}.$$

6. Применяется тест t_k :

а) если тест t_k завершается успешно, то задача сводится к поиску отказавшего элемента в подмножестве $\Omega^{(1)} = \Omega^{(0)} \setminus \Omega_k$;

б) если тест t_k заканчивается неуспешно, то задача сводится к поиску отказавшего элемента в подмножестве $\Omega^{(1)} = \Omega^{(0)} \cap \Omega_k$.

Примечание. Если в случае а) или б) подмножество $\Omega^{(1)}$ состоит из единственного элемента, то отыскание отказавшего элемента на этом заканчивается.

7. Фиксируется новая последовательность примененных тестов $\sigma^{(1)}$, которая содержит предыдущую последовательность $\sigma^{(0)}$ и последний примененный тест t_k :

$$\sigma^{(1)} = \{\sigma^{(0)}, t_k\}.$$

8. К подмножеству $\Omega^{(1)}$ начиная с п. 1 применяется процедура проверки с соответствующей заменой верхнего индекса (0) на индекс (1). Процедура проверки продолжается до тех пор, пока в п. 6 на некотором шаге k не сформируется подмножество $\Omega^{(k)}$, которое состоит из единственного элемента.

Описанную процедуру можно реализовывать последовательно по мере развития процесса проверки, в особенности если для текущих расчетов и выбора очередного теста использовать ЭВМ с необходимым программным обеспечением и

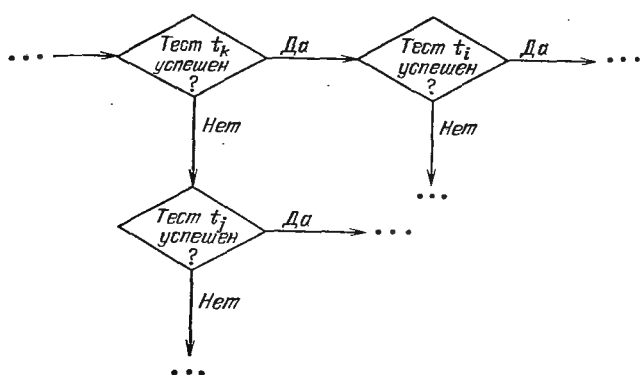
заранее занесенным в память массивом исходных данных (вероятности отказов, длительности проверок, характеристики тестов).

Эту же процедуру можно проделать заранее и составить инструкцию по очередности применения тестов в зависимости от результатов предыдущих, например: «если тест t_k успешный, то далее провести тест t_i , если же тест t_k неуспешный, то провести тест t_j » (рис. 16.1).

Пример 16.1. Система состоит из восьми элементов и может быть проверена шестью тестами, описание которых приводится в табл. 16.1. Известны затраты, связанные с проведением каждого теста: $c_1 = 1$; $c_2 = 2$; $c_3 = 1,2$; $c_4 = 1,5$; $c_5 = 2,5$; $c_6 = 1,3$, причем предполагается, что величины c_i не зависят от порядка применения тестов.

Таблица 16.1

Матрица тестов



Номер теста	Номер элемента							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1			1	1		
2		1		1			1	
3			1		1	1		
4	1					1		1
5	1		1	1	1			
6					1		1	1

Рис. 16.1. Пример инструкции для проверки системы

Априорные вероятности отказа элементов также известны: $q_1 = 0,1$; $q_2 = 0,1$; $q_3 = 0,2$; $q_4 = 0,3$; $q_5 = 0,1$; $q_6 = 0,5$; $q_7 = 0,5$; $q_8 = 0,2$.

Известно, что в системе имеется ровно один отказавший элемент. Требуется найти этот элемент при минимальных средних затратах на проведение необходимых для этого тестов.

Решение. Находим величины $\tilde{q}_i$ для каждого элемента:

$$\tilde{q}_1 = 0,05; \tilde{q}_2 = 0,05; \tilde{q}_3 = 0,1; \tilde{q}_4 = 0,15;$$

$$\tilde{q}_5 = 0,05; \tilde{q}_6 = 0,25; \tilde{q}_7 = 0,25; \tilde{q}_8 = 0,1.$$

Вычисляем величины $Q_i^{(0)}$ для каждого теста:

$$Q_1^{(0)} = \tilde{q}_1 + \tilde{q}_2 + \tilde{q}_5 + \tilde{q}_6 = 0,4; \quad Q_2^{(0)} = \tilde{q}_2 + \tilde{q}_4 + \tilde{q}_7 = 0,45;$$

$$Q_3^{(0)} = \tilde{q}_3 + \tilde{q}_5 + \tilde{q}_6 = 0,4; \quad Q_4^{(0)} = \tilde{q}_1 + \tilde{q}_6 + \tilde{q}_8 = 0,4;$$

$$Q_5^{(0)} = \tilde{q}_1 + \tilde{q}_3 + \tilde{q}_4 + \tilde{q}_5 = 0,35; \quad Q_6^{(0)} = \tilde{q}_5 + \tilde{q}_7 + \tilde{q}_8 = 0,4.$$

Далее для каждого теста находим:

$$g_1^{(0)} = 1/0,4 = 2,5; \quad g_2^{(0)} = 2/0,45 \approx 4,44;$$

$$g_3^{(0)} = 1,2/0,4 = 3,0; \quad g_4^{(0)} = 1,5/0,4 = 3,75;$$

$$g_5^{(0)} = 2,5/0,35 \approx 7,14; \quad g_6^{(0)} = 1,3/0,4 = 3,25.$$

Видно, что первым применяемым тестом должен быть t_1 , так как величина $g_1^{(0)}$ является наименьшей.

Проведение теста t_1 может быть успешным и неуспешным. Рассмотрим первый исход, т.е. отказавший элемент находится среди тех, которые не были охвачены тестом t_1 .

Осталось подмножество элементов $\Omega^{(1)} = \{3, 4, 7, 8\}$. Вычислим для каждого из оставшихся тестов $Q_i^{(1)}$:

$$Q_2^{(1)} = \tilde{q}_4 + \tilde{q}_7 = 0,2; \quad Q_3^{(1)} = \tilde{q}_3 = 0,1; \quad Q_4^{(1)} = \tilde{q}_8 = 0,1; \quad Q_5^{(1)} = \tilde{q}_3 + \tilde{q}_4 = 0,25; \quad Q_6^{(1)} = \tilde{q}_7 + \tilde{q}_8 = 0,35,$$

а затем $g_i^{(1)}$:

$$g_2^{(1)} = 2/0,2 = 10; \quad g_3^{(1)} = 1,2/0,1 = 12; \quad g_4^{(1)} = 1,5/0,1 = 15; \quad g_5^{(1)} = 2,5/0,25 = 10; \quad g_6^{(1)} = 1,3/0,35 = 3,71.$$

Таким образом, после успешного теста t_1 следует проводить тест t_6 . Само по себе проведение этого теста может быть, в свою очередь, успешным и неуспешным. Рассмотрим на этот раз вторую возможность: отказавший элемент находится в подмножестве, которое проверяется тестом t_6 , т.е. среди элементов $\Omega^{(2)} = \{7, 8\}$.

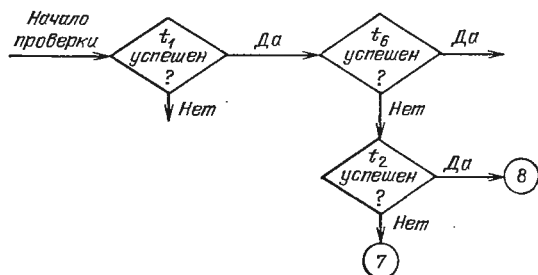


Рис. 16.2. Первый фрагмент инструкции проверки (для примера 16.1). В кружках — номера отказавших элементов, выявленных данной проверкой

Ясно, что на последнем шаге нужно выбирать тот тест, который характеризуется минимальной стоимостью и при этом позволяет проверить любой элемент из двух оставшихся. Такими тестами являются только t_2 и t_4 . Из них следует отдать предпочтение тесту t_2 как более дешевому.

На этом шаге процедура проверки (при условии, что проверяемые тесты заканчивались так, как это описано в примере) рассматриваемой системы заканчивается.

Если нужно составить инструкцию с описанием последовательности проверок, то следует зафиксировать полученную только что последовательность (рис. 16.2) и вернуться к тому этапу, когда проводился тест t_6 , но теперь положить,

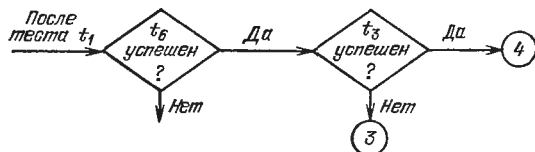


Рис. 16.3. Второй фрагмент инструкции проверки (для примера 16.1)

что он оказался неуспешным, т.е. искать отказавший элемент среди подмножества $\Omega = \{3, 4\}$. В результате оказывается построенным второй фрагмент инструкции (рис. 16.3).

Подобная процедура продолжается до тех пор, пока не будут построены все фрагменты инструкции проверки, позволяющие локализовать отказ до номера единственного элемента. Окончательная инструкция для данного примера приведена на рис. 16.4. (Остальные этапы построения инструкции опущены ради краткости изложения.)

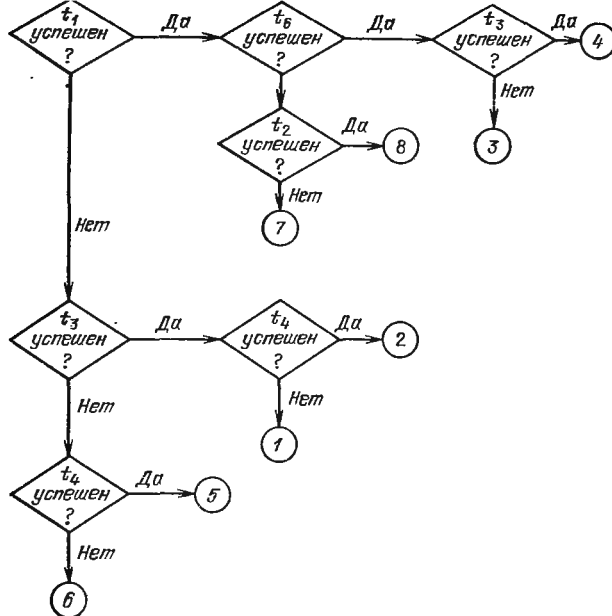


Рис. 16.4. Полная инструкция проверки (для примера 16.1)

16.2.3. Метод динамического программирования. Предварительно введем некоторые понятия и обозначения, которые окажутся полезными при изложении дальнейших точных методов.

Вероятность неуспешного исхода теста при проверке работоспособности некоторого подмножества Ω_i (или $\bar{\Omega}_i$):

$$Q_i = \sum_{j \in \Omega_i} \tilde{q}_j \quad \left(\text{или} \quad Q_{\bar{i}} = \sum_{j \in \bar{\Omega}_i} \tilde{q}_j \right).$$

Если проверкой, проведенной ранее, установлено, что отказавший элемент принадлежит подмножеству Ω_i , то вероятность наличия его в подмножестве Ω_u , таком, что $\Omega_u \subset \Omega_i$, будет

$$Q_{u(i)} = Q_u \cdot (Q_i)^{-1}.$$

Пусть для некоторого подмножества Ω_i , содержащего отказавший элемент, каким-либо образом определена программа последовательного разбиения его, ведущая к локализации отказа на уровне элемента. Обозначим эту программу (стратегию) $\sigma(\Omega_i)$. Если на первом шаге разбиений применяется тест $t_{(i)}^k \in T_i$, то $\sigma(\Omega_i)$, очевидно, можно представить следующим образом:

$$\sigma(\Omega_i) = [t_{(i)}^k, \sigma(\Omega_{(i)}^k), \sigma(\bar{\Omega}_{(i)}^k)].$$

Математическое ожидание стоимости реализации стратегии $\sigma(\Omega_i)$ при этом может быть найдено рекуррентно по формуле

$$C[\sigma(\Omega_i)] = c_{(i)}^k + Q_{(i)}^k C[\sigma(\Omega_{(i)}^k)] + (1 - Q_{(i)}^k) C[\sigma(\bar{\Omega}_{(i)}^k)], \quad (16.1)$$

где вычисления начинаются с двухэлементных подмножеств, для которых стоимость локализации отказа на уровне элемента равна стоимости теста, которым производится разбиение двухэлементного подмножества на одноэлементные.

Идея метода динамического программирования состоит в систематическом рассмотрении подмножеств $\Omega_i \subset \Omega$ и отыскании для каждого из них теста $t_{(i)}^k$

$\in T_i$, разбиавшегося каждое такое подмножество оптимальным образом. Оптимальным разбиением называется такое, которое обеспечивает минимальное среднее значение суммарной стоимости всех дальнейших разбиений, производимых до получения одноэлементных подмножеств.

Если $\sigma^*(\Omega_i)$ — оптимальная стратегия разбиений некоторого подмножества Ω_i , содержащего отказавший элемент, а $C[\sigma^*(\Omega_i)]$ — стоимость реализации оптимальной стратегии, то процедура построения $\sigma^*(\Omega)$ представляет собой рекуррентный процесс последовательного определения $\sigma^*(\Omega_i)$ для всех подмножеств, состоящих из двух, трех элементов и т. д. На каждом шаге этого процесса находится тест $t_{(i)}^k \in T_i$, такой, что

$$C[\sigma^*(\Omega_i)] = \min \{c_{(i)}^k + Q_{(i)}^k C[\sigma^*(\Omega_{(i)}^k)] + (1 - Q_{(i)}^k) C[\sigma^*(\bar{\Omega}_{(i)}^k)]\}.$$

Для построения оптимальной программы поиска отказа методом динамического программирования необходимо найти и запомнить тесты, разбивающие оптимальным образом все возможные подмножества множества Ω .

Прямое использование метода динамического программирования для данной задачи при реальных размерностях задачи оказывается весьма трудоемким, а иногда даже практически нереализуемым.

16.2.4. Перестановочный прием. В случае поэлементных проверок удастся получить простое правило нумерации тестов для нахождения процедуры, минимизирующей средние затраты на поиск отказавшего элемента. Перестановочный прием заключается в том, что от любой произвольной нумерации тестов можно попарной перестановкой только лишь соседних тестов за конечное число шагов перейти к любой наперед заданной последовательности их проведения, в том числе и оптимальной. Если удастся найти удобный критерий сравнения двух соседних тестов по влиянию порядка их применения на результирующий целевой функционал — среднее время поиска отказавшего элемента, то при определенных условиях удастся вычислить критерий для каждого теста и затем пронумеровать все тесты в соответствии с монотонным изменением этого критерия.

При произвольной нумерации тестов целевой функционал вида (16.1) для данного частного случая

$$C[\sigma(\Omega)] = c_1 + \tilde{q}_1 C[\sigma(e_1)] + \tilde{P}_1 C[\sigma(\Omega \setminus e_1)],$$

где $C[\sigma(e_1)] = 0$, так как e_1 — одноэлементное множество, которое далее уже не нужно проверять, а

$$C[\sigma(\Omega \setminus e_1)] = c_2 + C[\sigma(\Omega \setminus (e_1 \vee e_2))].$$

Окончательно

$$C = c_1 + \tilde{p}_1 (c_2 + \tilde{p}_2 (c_3 + \tilde{p}_3 (c_4 + \dots))).$$

Записав аналогичное выражение для случая, когда для элементов с номерами k и $k+1$ изменен порядок проверки, и сравнив значения суммарных затрат для обоих этих случаев, находим, что оптимальный порядок при возможности поэлементной проверке соответствует нумерации элементов в соответствии с условием

$$\frac{c_1}{q_1} \leq \frac{c_2}{q_2} \leq \dots \leq \frac{c_n}{q_n}.$$

Примечание. В случае равенства порядок проверки безразличен.

16.2.5. Рекурсивный метод. Для точного решения рассматриваемой задачи можно использовать так называемый рекурсивный метод, который оказывается на практике эффективнее метода динамического программирования.

Будем рассматривать последовательный поиск отказавшего элемента в множестве Ω как многошаговый процесс последовательного разбиения Ω , продолжаю-

щийся является результатом разбиения одноэлементных подмножеств. Идея метода при построении программы поиска состоит в последовательном разбиении Ω по каждой ветви графа до получения одноэлементных подмножеств, определения наилучших разбиений на каждом уровне и с возвращением на предыдущий уровень.

Для разбиения множества Ω на первом шаге (уровне) может быть использован любой тест матрицы T . Рассмотрим первый из них (первоначальная нумерация тестов во всех матрицах предполагается произвольной). Применение этого теста разбивает Ω на подмножества Ω_1 и $\bar{\Omega}_1$. Предположим, что оптимальные стратегии дальнейшего поиска отказа $\sigma^*(\Omega_1)$ (если исход t_1 не успешен) и $\sigma^*(\bar{\Omega}_1)$ (если исход t_1 успешен) известны. Тогда образуем условно-оптимальную стратегию

$$\sigma_1^*(\Omega) = [t_1, \sigma^*(\Omega_1), \sigma^*(\bar{\Omega}_1)]$$

и вычислим среднюю стоимость ее реализации в соответствии с (16.1). Далее аналогичным образом определим условно оптимальную стратегию $\sigma_2^*(\Omega)$ и запомним стратегию с меньшей стоимостью.

Предположим, что для некоторого подмножества Ω_i стратегия $\sigma^*(\Omega_i)$, необходимая для построения $\sigma_i^*(\Omega)$, оказывается неизвестной. Тогда запомним лучшую из найденных $i-1$ условно оптимальных стратегий и перейдем к рассмотрению возможных разбиений подмножества Ω_i . Сформируем матрицу существенных тестов T_i и для каждого $t_{(i)}^k \in T_i$ аналогично предыдущему определим условно-оптимальную стратегию

$$\sigma^{k*}(\Omega_i) = [t_{(i)}^k, \sigma^*(\Omega_{(i)}^k), \sigma^*(\bar{\Omega}_{(i)}^k)], \quad k = 1, \dots, m,$$

а затем оптимальную $\sigma^*(\Omega)$ так, чтобы

$$C[\sigma^*(\Omega)] = \min_{1 \leq k \leq m_i} C[\sigma^{k*}(\Omega_i)].$$

Поскольку предыдущий цикл вычислений был прерван именно из-за отсутствия $\sigma^*(\Omega_i)$, то теперь эти вычисления могут быть продолжены.

Систематическое повторение описанной процедуры для каждого подмножества, полученного в результате разбиения Ω последовательным применением тестов, очевидно, приведет к построению оптимальной стратегии.

Эффективность метода может быть дополнительно повышена за счет построения стратегий, достаточно близких к оптимальным, и правил отсеивания неперспективных вариантов стратегий путем сравнения нижних границ стоимостей реализаций этих вариантов с лучшим из результатов, полученных к текущему моменту вычислений.

Как следует из приведенного выше описания, построение условно-оптимальных стратегий $\sigma^{k*}(\Omega_i)$, $k = 1, \dots, m_i$, для определения оптимальной стратегии $\sigma^*(\Omega_i)$ удобно производить в порядке нумерации тестов $t_{(i)}^k$ матрицы T_i . Для упрощения операции отсева удобно заранее выбрать такой порядок нумерации, чтобы условно-оптимальные стратегии с меньшими номерами в среднем оказывались лучше, чем другие варианты. Тогда при наличии простого способа оценки нижних границ стоимостей очередные варианты условно-оптимальных стратегий можно будет отбрасывать без построения. Предположим, что на некотором цикле определения $\sigma^*(\Omega_i)$ уже построены $k-1$ условно-оптимальных стратегий и среди этих стратегий выбрана лучшая $\sigma^{v*}(\Omega_i)$ стоимостью $C[\sigma^{v*}(\Omega_i)]$. Пусть $\Gamma_{(i)}^k$ — нижняя граница стоимости условно-оптимальной стратегии $\sigma^{k*}(\Omega_i)$. Тогда очевидно, что стратегия $\sigma^{k*}(\Omega_i)$ не может быть лучше, если

$$C[\sigma^{v*}(\Omega_i)] \leq \Gamma_{(i)}^k.$$

В этом случае вариант $\sigma^{k*}(\Omega_i)$ не является перспективным и может быть отброшен без построения.

Правила нумерации тестов матрицы T_i и вычисления нижних границ могут быть эффективным образом подобраны с учетом структуры конкретных задач. Однако можно рекомендовать следующие простые правила. Нумерация тестов матриц T_i , полученных преобразованием T , производится в порядке неубывания стоимостей тестов, включенных в эти матрицы. Для определения $\Gamma_{(i)}^k$ используется элементарное следствие (16.1): стоимость условно-оптимальной стратегии $\sigma^{k*}(\Omega_i)$ не может быть меньше стоимости теста $t_{(i)}^k$, примененного для разбиения Ω_i на первом шаге, т. е. $\Gamma_{(i)}^k = c_{(i)}^k$.

Как следует из анализа задачи, логика построения оптимальной стратегии поиска отказа остается неизменной при рассмотрении как множества Ω , так и любого его подмножества, что объясняется рекуррентной структурой задачи. Для того чтобы использовать эту рекуррентность для сокращения вычислений, тесты исходной матрицы T нумеруются в порядке неубывания мощностей контролируемых ими подмножеств, т. е. в порядке неубывания числа единиц в каждой строке.

16.2.6. Минимаксный критерий. На практике планирование работ по контролю технических систем часто проводится без учета информации о надежности систем из-за отсутствия такой информации или слишком большой ее недостоверности. В этих случаях целесообразным оказывается минимаксный подход к задачам построения программ проведения проверок. При таком подходе оптимальная стратегия строится в предположении реализации самой неблагоприятной ситуации.

Будем считать достоверно известным факт отказа в ОК только одного элемента и рассмотрим задачу построения условной программы поиска этого элемента последовательным применением тестов матрицы T так, чтобы максимальные затраты на реализацию программы были минимальными.

Процедуру применения тестов матрицы T для поиска отказавшего элемента снова будем рассматривать как последовательное разбиение множества Ω . Тогда некоторая стратегия $\sigma(\Omega_i)$ поиска отказа в подмножестве Ω_i , на первом шаге которой применяется тест $t_{(i)}^k \in T_i$ (T_i формируется по правилам, описанным выше), может быть записана аналогично (16.1). Стоимость реализации этой стратегии представляет собой случайную величину, максимальное значение которой может быть найдено из выражения

$$R[\sigma(\Omega_i)] = c_{(i)}^k + \max \{R[\sigma(\Omega_{(i)}^k)], R[\sigma(\Omega_{(i)}^l)]\}. \quad (16.2)$$

Описанная выше методика построения статистически оптимальных программ поиска отказавшего элемента может быть применена и в данном случае, если используемые при проведении вычисления средние стоимости $C[\sigma(\Omega_i)]$ заменить максимальными стоимостями, найденными по (16.2).

16.3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ ПОИСК ОТКАЗОВ С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ ОБЪЕКТА КОНТРОЛЯ

16.3.1. Предварительные замечания. Во многих практических ситуациях не удается сделать сколько-нибудь обоснованных предположений о возможности отказа только одного элемента при информации об отказе системы. Пусть возможны любые комбинации отказавших-элементов, причем допускается замена любых отказавших элементов работоспособными по мере их обнаружения. Процесс восстановления производится следующим образом. Последовательным применением некоторых тестов матрицы T в ОК производится поиск первого отказавшего элемента. Этот элемент заменяется годным, после чего контролируется работоспособность всех элементов минимального подмножества Ω_n , включающего замененный элемент. При результате «проверка Ω_n не успешна» производится дальнейший поиск отказавших элементов в этом подмножестве и замена их годными, причем

после каждой замены контролируется работоспособность всех элементов подмножества Ω_i . При результате «проверка успешна» контролируется работоспособность минимального подмножества Ω_i , такого, что $\Omega_i \subset \Omega_i$, и при обнаружении отказов производится восстановление Ω_i . Аналогичный процесс продолжается до полного восстановления ОК.

Рассмотрим задачу построения программы восстановления по минимуму математического ожидания затрат при условии, что имеется возможность общей проверки работоспособности ОК. (Легко показать, что стоимости замены элементов не влияют на оптимальность процедуры восстановления, поэтому они не учитываются.)

16.3.2. Приближенный алгоритм при произвольных пересекающихся тестах. Пусть к началу некоторого M -го шага процесса проверки проведена последовательность тестов $\sigma^{M-1} = \{t_1, \dots, t_{M-1}\}$ и задача сводится к отысканию отказавших элементов подмножества $\Omega^{(M-1)}$. (Перед началом процесса проверки системы $\Omega^{(0)} = \Omega$, т.е. исходное множество включает все элементы системы, а $\sigma^{(0)}$ не содержит ни одного теста.)

Алгоритм отыскания отказавших элементов состоит в следующем.

1. Проводится (если это возможно) общий тест, чтобы определить, есть ли в непроверенном еще подмножестве $\Omega^{(0)}$ хотя бы один отказавший элемент. Если глобальный тест проходит успешно, то на этом процедура проверки прекращается, если же тест проходит неуспешно, то начинается основная процедура, приводимая ниже.

Примечание. Строго говоря, применение глобального теста не всегда оправдано, так как он может потребовать больших затрат, чем проведение локализации всех возможных (или имеющихся) отказов в проверяемом подмножестве элементов $\Omega^{(0)}$. Однако для практической методики, чтобы упростить применяемую процедуру отыскания отказавших элементов, мы не будем учитывать такой возможности, тем более, что обычно затраты на глобальный тест в силу его неспециализированности не столь существенны.

2. Если глобальный тест проходит неуспешно, то для каждого теста t_i вычисляется вероятность неуспешного исхода в проверяемом подмножестве:

$$\tilde{Q}_i^{(0)} = \left(1 - \prod_{j \in \Omega_i \cap \Omega^{(0)}} p_j \right) / \left(1 - \prod_{j \in \Omega^{(0)}} p_j \right)$$

при условии, что уже проведена последовательность тестов $\sigma^{(0)}$.

Примечание. В принципе при используемой далее процедуре достаточно вычислить лишь величины

$$\tilde{Q}_i^{(0)} = 1 - \prod_{j \in \Omega_i \cap \Omega^{(0)}} p_j,$$

поскольку в п. 5 наибольшее значение имеют лишь относительные, а не абсолютные величины $\tilde{Q}_i^{(0)}$.

3. Для каждого теста t_i находят связанные с ним затраты c_i при условии, что уже проведена последовательность тестов $\sigma^{(0)}$.

Примечание. Перед началом процесса проверки $c_i^{(0)} = c_i$.

4. Для каждого теста t_i определяется величина

$$g_i^{(0)} = c_i^{(0)} / \tilde{Q}_i^{(0)}.$$

5. Выбирается такой тест t_k , для которого $g_k^{(0)}$ минимально:

$$g_k^{(0)} = \min_{1 \leq i \leq m} g_i^{(0)}.$$

6. Применяется тест t_k , причем:

а) если тест t_k завершается успешно, то процесс поиска отказавших элементов продолжается для оставшегося подмножества $\Omega^{(1)} = \Omega^{(0)} \setminus \Omega_k$;

б) если тест t_k заканчивается неуспешно, то возможны два случая:

если тест t_k контролирует работоспособность только одного элемента, то этот элемент заменяется годным и дальнейшее отыскание отказов производится в подмножестве $\Omega^{(1)} = \Omega^{(0)} \setminus \Omega_k$;

если тест t_k контролирует работоспособность более чем одного элемента, то дальнейший поиск отказов производится в подмножестве $\Omega^{(1)} = \Omega_k$, причем для этого могут быть использованы лишь тесты t_m , такие, что $\Omega_k \cup \Omega_m = \Omega_k$.

7. Фиксируется новая последовательность $\sigma^{(1)}$ примененных тестов, содержащая предыдущую последовательность $\sigma^{(0)}$ и последний примененный тест t_k :

$$\sigma^{(1)} = \{\sigma^{(0)}, t_k\}.$$

8. К подмножеству $\Omega^{(1)}$, указанному в п. 6, вновь применяется процедура проверки, начиная с п. 1, если найденный отказавший элемент заменен работоспособным, и начиная с п. 2, если замена отказавшего элемента не производилась, с соответствующей заменой верхнего индекса (0) на индекс (1).

Процесс проверки продолжается до тех пор, пока не будут найдены и заменены годными все отказавшие элементы системы.

П р и м е ч а н и е. Описанную процедуру, как и приведенную ранее процедуру отыскания единственного неисправного элемента, можно также реализовать по мере развития процесса проверки либо провести заранее и составить инструкцию по последовательности применения тестов. Однако в этом случае подобная инструкция может отказаться крайне громоздкой.

Пример 16.2. Рассматривается система, аналогичная той, которая описана в примере 16.1. Тесты, с помощью которых проверяются элементы системы, приведены в табл.16.1.

Количество отказавших элементов в системе заранее неизвестно. Будем считать, что неисправны элементы 1, 3 и 6, но тому, кто производит проверку, это неизвестно.

Требуется найти все отказавшие элементы при минимальных средних затратах на проведение необходимых для этого тестов.

Р е ш е н и е. Вычисляем величины $\tilde{Q}_i^{(0)}$ по формуле

$$\tilde{Q}_i^{(0)} = 1 - \prod_{j \in \Omega_i \cap \Omega^{(0)}} p_j.$$

Находим, что:

$$\tilde{Q}_1^{(0)} = 0,31; \quad \tilde{Q}_2^{(0)} = 0,40; \quad \tilde{Q}_3^{(0)} = 0,315; \quad \tilde{Q}_4^{(0)} = 0,315; \quad \tilde{Q}_5^{(0)} = 0,545; \\ \tilde{Q}_6^{(0)} = 0,315.$$

Затем для каждого теста определяем величины $g_i^{(0)}$:

$$g_1^{(0)} = 1/0,31 = 3,24; \quad g_2^{(0)} = 2/0,4 = 5,0; \quad g_3^{(0)} = 1,2/0,315 = 3,52; \\ g_4^{(0)} = 1,53/0,315 = 4,77; \quad g_5^{(0)} = 2,5/0,545 = 4,6; \quad g_6^{(0)} = 1/0,315 = 3,18.$$

Видно, что первым тестом должен быть t_6 , так как $g_6^{(0)}$ наименьшая из всех. Тест должен пройти успешно, так как мы в условиях задачи определили элементы 1 и 3 как отказавшие. В связи с этим задача сводится к обнаружению отказавших элементов в оставшемся подмножестве элементов $\Omega^{(1)} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Найдем величины $Q_i^{(1)}$ по формуле

$$Q_i^{(1)} = 1 - \prod_{j \in \Omega_i \cap \Omega^{(1)}} p_j.$$

Они равны соответственно:

$$\tilde{Q}_1^{(1)} = 0,23; \quad \tilde{Q}_2^{(1)} = 0,37; \quad \tilde{Q}_3^{(1)} = 0,24; \quad \tilde{Q}_4^{(1)} = 0,145; \quad \tilde{Q}_5^{(1)} = 0,495.$$

Затем вычисляем новые величины $g_i^{(1)}$:

$$g_1^{(1)} = 1/0,23 = 4,35; \quad g_2^{(1)} = 2/0,37 = 5,4; \quad g_3^{(1)} = 1,2/0,24 = 5,0; \\ g_4^{(1)} = 1,5/0,145 = 10,05; \quad g_5^{(1)} = 2,5/0,495 = 5,05.$$

Минимальное значение $g_i^{(1)}$ имеет тест t_1 , проверяющий элементы 1, 2 и 6. По условию этот тест оказывается неуспешным.

Для дальнейшего поиска отказа в подмножестве Ω_1 может быть использован лишь тест t_4 , в результате применения которого (по условиям данного примера «не успешен») будет сделан вывод об отказе элемента 1, либо 6, либо обоих вместе. Получение более детальной информации о состоянии системы применением имеющихся тестов матрицы T оказывается невозможным, следовательно, задача обнаружения всех отказавших элементов рассматриваемого объекта и замены их работоспособными не может быть выполнена.

16.3.3. Метод последовательных поэлементных проверок. Предполагается, что в системе, например в процессе эксплуатации без постоянного наблюдения, может произойти несколько отказов. Имеется возможность провести полную проверку системы за некоторое время и проверку отдельных ее элементов (за время c_j каждого j -го элемента).

Процесс протекает следующим образом: проводится полная проверка, и если система оказывается неисправной, то последовательная проверка продолжается до тех пор, пока не будет найден отказавший элемент: обнаруженный элемент восстанавливается (ремонтируется, заменяется на новый) и снова проводится полная проверка; если система продолжает оставаться неисправной, т.е. в ней есть еще хотя бы один отказавший элемент, то процедура продолжается.

Требуется найти такой порядок проверки элементов системы, чтобы процесс отыскания всех отказавших элементов протекал в среднем минимальное время.

Предлагается следующий алгоритм.

1. Для каждого элемента вычисляются значения

$$g_j = c_j p_j / q_j.$$

2. Элементы нумеруются в порядке возрастания величин g_j . Полученный порядок и есть порядок оптимальных проверок.

Пример 16.3. Рассмотрим систему, состоящую из пяти элементов, характеризующихся следующими показателями:

$$p_1 = 0,2, \quad c_1 = 10 \text{ мин}; \quad p_2 = 0,3, \quad c_2 = 20 \text{ мин}; \quad p_3 = 0,4, \quad c_3 = 10 \text{ мин}; \\ p_4 = 0,5, \quad c_4 = 5 \text{ мин}; \quad p_5 = 0,6, \quad c_5 = 10 \text{ мин}.$$

Требуется определить, в каком порядке следует проводить проверку для отыскания всех неисправных элементов.

Решение. Вычисляем величины g_j :

$$g_1 = \frac{0,2}{0,8} \cdot 10 = 2,5; \quad g_2 = \frac{0,3}{0,7} \cdot 20 = 8,6; \quad g_3 = \frac{0,4}{0,6} \cdot 10 = 6,7; \quad g_4 = \frac{0,5}{0,5} \cdot 5 = 5,0; \\ g_5 = \frac{0,6}{0,4} \cdot 10 = 15,0.$$

Из расчета видно, что для минимизации среднего времени отыскания неисправных элементов необходимо всегда проверять элементы данной системы в следующем порядке: 1, 4, 3, 2 и 5.

16.3.4. Рекурсивный метод. Пусть в результате разбиения множества Ω , произведенного на первом шаге процесса восстановления применением теста t_i , получены подмножества Ω_i и $\bar{\Omega}_i$. Для дальнейшего поиска отказов в подмножест-

ве Ω_i (при исходе «не успешен») могут применяться только такие существенные тесты $t_i \in T$, что $\Omega_i \subset \Omega_i$, так как в противном случае (если $\Omega_i \cap \Omega_i \neq \Omega_i$) исход «не успешен» был бы возможен из-за отказа элементов, не принадлежащих Ω_i . Матрицу таких тестов обозначим T_i . Для локализации отказов на подмножестве $\bar{\Omega}_i$ (т. е. при исходе «успешен») существенными являются все тесты исходной матрицы T , пересекающие $\bar{\Omega}_i$, поскольку подмножество Ω_i в этом случае не содержит отказавших элементов. Матрицу таких тестов обозначим T_i , а правила ее образования совпадают с приведенными в предыдущем параграфе.

Для рассматриваемой задачи попарное различие столбцов матрицы T еще не обеспечивает достаточности тестов.

Назовем контролируемое тестом t_i подмножество Ω_i локализуемым, если имеющейся совокупности тестов, существенных для этого подмножества (матрицы T_i), достаточно для локализации отказов на уровне элемента при условии замены отказавших элементов годными по мере их обнаружения. Тогда очевидным признаком достаточности T является покрытие множества Ω по крайней мере один раз подмножествами, каждое из которых является, в свою очередь, локализуемым. Исключение может составлять лишь единственный элемент Ω , определение состояния которого возможно методом исключения.

В соответствии с приведенным признаком для локализуемости двухэлементного подмножества необходимо наличие теста, контролирующего только один из этих элементов, для локализуемости трехэлементного подмножества необходимо, чтобы любые два элемента этого подмножества покрывались локализуемым подмножеством, и т. д.

Практически проверка достаточности матрицы T может быть произведена следующим образом. Рассмотрим тест t_i матрицы T , контролирующий работоспособность более чем одного элемента, и в соответствии с правилами, определенными выше, сформируем матрицу существенных тестов T_i . Если эта матрица не содержит ни одной строки, то подмножество Ω_i не является локализуемым и отказ любого элемента этого подмножества имеющимися средствами неразличим. В этом случае необходимо либо соответствующим образом дополнить T , либо согласиться с неразличимостью отказов в множестве Ω_i . Когда T_i содержит несколько строк, рассмотрим ту, которая включает минимальное количество единиц. Если локализуемость соответствующего подмножества не очевидна, то сформируем матрицу тестов, существенных для этого подмножества, и снова попытаемся определить существенность тестов полученной матрицы. Продолжая эту процедуру, определим либо локализуемость подмножества Ω_i , либо нелокализуемость Ω_i или его части.

Обозначим $\Psi(\Omega_i)$ стратегию последовательного поиска отказов для восстановления некоторого подмножества Ω_i . Предположим, что на первом шаге этой стратегии применяется тест $t_i^k \in T_i$ и известны стратегии $\Psi(\Omega_{(i)}^k)$ и $\Psi(\bar{\Omega}_{(i)}^k)$ дальнейшего применения тестов при восстановлении подмножеств $\Omega_{(i)}^k$ и $\bar{\Omega}_{(i)}^k$. Тогда $\Psi(\Omega_i)$ можно представить следующим образом:

$$\Psi(\Omega_i) = [t_{(i)}^k, \Psi(\Omega_{(i)}^k), \Psi(\bar{\Omega}_{(i)}^k)]. \quad (16.3)$$

Стоимость реализации $\Psi(\Omega_i)$ является случайной величиной, значения которой зависят от реализованного состояния ОК, а ее среднее

$$C[\Psi(\Omega_i)] = c_{(i)}^k + \bar{Q}_{(i)}^k \{C[\Psi(\Omega_{(i)}^k)] + c_{0(i)}\} + (1 - \bar{Q}_{(i)}^k) C[\Psi(\bar{\Omega}_{(i)}^k)],$$

где $\bar{Q}_{(i)}^k = \left(1 - \prod_{j \in \Omega_{(i)}^k} p_j\right) \left(1 - \prod_{j \in \bar{\Omega}_{(i)}^k} p_j\right)^{-1}$

есть апостериорная вероятность отказа по крайней мере одного элемента подмножества $\Omega_{(i)}^k$ при условии, что отказ обнаружен в Ω_i .

Процесс фактически совпадает с описанным в предыдущем параграфе, за исключением проверки на перспективность условно оптимальных стратегий. В данном алгоритме на перспективность проверяется каждая следующая условно оптимальная стратегия независимо от перспективности предыдущей, что связано со спецификой нумерации строк матриц T_i .

Для отсеивания неперспективных вариантов условно оптимальных стратегий $\Psi^{k*}(\Omega_i)$ используются нижние границы стоимости реализации таких стратегий, вычисляемые следующим образом:

$$\Gamma_{(i)}^k = c_{(i)}^k + c_{0(i)} \bar{Q}_{(i)}^k.$$

Описанную методику можно применять также для построения минимаксной программы восстановления, если максимальную стоимость реализации некоторой стратегии $\Psi^k(\Omega_i)$, представленной в форме (16.3), определить как

$$R[\Psi^k(\Omega_i)] = c_{(i)}^k + c_{0(i)} + R[\Psi(\Omega_{(i)}^k)] + R[\Psi(\bar{\Omega}_{(i)}^k)].$$

16.4. ОБНАРУЖЕНИЕ ОТКАЗАВШЕГО ЭЛЕМЕНТА

16.4.1. Предварительные замечания. Проверяемая система состоит из n элементов. Цель проверки в том, чтобы удостовериться, работоспособна ли система, причем если она неработоспособна, то требуется обнаружить это в среднем за минимальное время. (При обнаружении первого же отказа проверка прекращается.)

Предполагается, что общий тест провести нельзя либо его применение нецелесообразно (связано с большими затратами).

16.4.2. Приближенный алгоритм при произвольных пересекающихся тестах. Пусть к началу некоторого M -го шага процесса проверки проведена последовательность тестов $\sigma^{(M-1)} = \{t_1, \dots, t_{M-1}\}$ и задача сводится к обнаружению хотя бы одного отказа в оставшемся подмножестве $\Omega^{(M-1)}$. (Перед началом проверки системы $\Omega^{(0)} = \Omega$, т. е. исходное множество включает в себя все элементы системы, а $\sigma^{(0)}$ не включает ни одного теста.)

Алгоритм обнаружения отказа состоит в следующем.

1. Для каждого теста t_i вычисляется вероятность неуспешного исхода в проверяемом подмножестве $\Omega^{(0)}$:

$$\tilde{Q}_i^{(0)} = 1 - \prod_{j \in \Omega_i \cap \Omega^{(0)}} p_j$$

при условии, что уже проведена последовательность тестов $\sigma^{(0)}$.

2. Для каждого теста t_i находят связанные с ним затраты $c_i^{(0)}$ при условии, что уже проведена последовательность тестов $\sigma^{(0)}$.

3. Для каждого теста t_i определяется

$$g_i^{(0)} = c_i^{(0)} / \tilde{Q}_i^{(0)}.$$

4. Выбирается такой тест t_k , для которого $g_k^{(0)}$ минимальна:

$$g_k^{(0)} = \min_{1 \leq i \leq m} g_i^{(0)}.$$

5. Применяется тест t_k :

а) если тест t_k завершается успешно, то процесс обнаружения отказа продолжается в оставшемся подмножестве:

$$\Omega^{(1)} = \Omega^{(0)} \setminus \Omega_k;$$

б) если тест t_k завершается неуспешно, то процесс прекращается, поскольку подмножество элементов Ω_k содержит по меньшей мере один отказавший элемент.

6. Фиксируется новая последовательность $\sigma^{(1)}$ примененных тестов, включающая в себя предыдущую последовательность $\sigma^{(0)}$ и последний примененный тест t_k :

$$\sigma^{(1)} = \{\sigma^{(0)}, t_k\}.$$

7. К подмножеству $\Omega^{(1)}$, указанному в п. 5, вновь применяется процедура проверки, начиная с п. 1, с соответствующей заменой верхнего индекса (0) на индекс (1).

Процесс проверки продолжается до обнаружения хотя бы одного отказа или до полной проверки работоспособности системы.

Примечание. Описанную процедуру можно реализовать по мере развития процесса проверки, особенно если для текущих расчетов и выбора очередного теста использовать ЭВМ с заранее занесенным в ее память массивом исходных данных (вероятность отказов, длительности проверок, характеристики тестов) и необходимым программным обеспечением.

Эту же процедуру можно провести заранее и составить инструкцию по очередности применения тестов в зависимости от предыдущих результатов.

В данном случае процедура обнаружения отказавшего элемента практически совпадает с приближенной процедурой отыскания неизвестного числа неисправных элементов, поэтому численный пример не приводится.

Проверка системы непересекающимися тестами. Если имеется возможность использовать только непересекающиеся тесты, т.е. каждый из элементов системы может быть проверен только каким-нибудь одним тестом, то наилучший порядок проверки системы с целью обнаружения отказа соответствует нумерации их в порядке возрастания величин:

$$g_i = c_i / \tilde{Q}_i.$$

Пример 16.4. Рассмотрим систему, описанную в примере 16.3.

Требуется определить, в каком порядке следует проверять элементы с целью определения исправности системы.

Решение. Вычисляем величины g_i :

$$g_1 = \frac{1}{0,8} \cdot 10 = 12,5; \quad g_2 = \frac{1}{0,7} \cdot 20 = 28,6; \quad g_3 = \frac{1}{0,6} \cdot 10 = 16,7;$$

$$g_4 = \frac{1}{0,5} \cdot 5 = 10,0; \quad g_5 = \frac{1}{0,4} \cdot 10 = 25,0.$$

Из расчета видно, что для минимизации среднего времени проверки работоспособности требуется всегда проверять элементы данной системы в следующем порядке: 4, 1, 3, 5 и 2.

Глава 17

МОДЕЛИ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

17.1. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

17.1.1. Предварительные замечания. При решении общей проблемы повышения надежности и эффективности функционирования технических систем возникает задача разработки обоснованной стратегии эксплуатации.

Стратегия эксплуатации (правила технического обслуживания) строится на основании:

объективных данных о технической системе (характеристик безотказности и и ремонтпригодности);

специфических особенностей системы (структуры системы, характеристик индикации отказов, наличия встроенного контроля работоспособности);
данных об условиях эксплуатации.

Стратегия эксплуатации должна обладать свойством оптимальности по некоторому показателю, характеризующему качество функционирования и эксплуатации системы.

Выбор оптимальной стратегии технического обслуживания позволяет добиваться наилучших результатов за счет реорганизации правил эксплуатации без привлечения дополнительных сил и средств.

В качестве математической модели, описывающей эволюцию технической системы во времени, используется случайный процесс $\xi(t)$, принадлежащий к одному из следующих классов случайных процессов: регенерирующие случайные процессы, марковские случайные процессы, полумарковские случайные процессы.

Классификация восстановительных работ, которые возможны в системе, проводится по трем признакам: состояние системы (элемента) в момент начала восстановительной работы; состояние системы (элемента) в момент окончания восстановительной работы; признак предварительной подготовки к началу восстановительной работы (известен или неизвестен заранее момент начала восстановительной работы).

Названия классифицированных по перечисленным признакам восстановительных работ приведены в табл. 17.1.

Т а б л и ц а 17.1

Характеристика восстановительных работ

Глубина восстановления системы	Восстановительная работа	
	Работоспособная система	Неработоспособная система
Никакого обновления в системе не производится	Плановый (внеплановый) осмотр или проверка работоспособности	—
Производится полное обновление	Плановая (внеплановая) предупредительная профилактика системы	Плановый (внеплановый) аварийно-профилактический ремонт системы
Производится обновление части системы	Плановая (внеплановая) предупредительная профилактика части системы	Плановый (внеплановый) аварийно-профилактический ремонт части системы

В задачах технического обслуживания рассматриваются следующие показатели качества функционирования при длительной эксплуатации:

коэффициент готовности K ;

вероятность выполнения задачи (коэффициент оперативной готовности) $R(z)$;

средняя прибыль за единицу календарного времени S ;

средние затраты за единицу времени исправного функционирования C .

Для регенерирующего процесса $\xi(t)$:

$$K = \frac{MX^{(0)}}{M\tilde{X}}; \quad R(z) = \frac{MX^{(z)}}{M\tilde{X}}; \quad S = \frac{M\tilde{S}}{M\tilde{X}}; \quad C = \frac{M\tilde{C}}{MX^{(0)}},$$

где $X^{(0)}$ — время исправного функционирования системы в период регенерации; $X^{(z)}$ — время пребывания процесса $\xi(t)$ в состоянии e_z — система работоспособна и исправно проработает время, большее z ; $\tilde{X}$ — длительность периода регенерации; $\tilde{S}$ — прибыль, полученная на периоде регенерации; $\tilde{C}$ — затраты, имевшие место на периоде регенерации.

Для марковских и полумарковских процессов $\xi(t)$ с конечным множеством состояний:

$$K = \frac{\sum_{i=1}^N M\tau_i^{(0)} \cdot p_i}{\sum_{i=1}^N M\tilde{\tau}_i \cdot p_i}; \quad R(z) = \frac{\sum_{i=1}^N M\tau_i^{(z)} \cdot p_i}{\sum_{i=1}^N M\tilde{\tau}_i \cdot p_i};$$

$$S = \frac{\sum_{i=1}^N M\tilde{S}_i \cdot p_i}{\sum_{i=1}^N M\tilde{\tau}_i \cdot p_i}; \quad C = \frac{\sum_{i=1}^N M\tilde{C}_i \cdot p_i}{\sum_{i=1}^N M\tau_i^{(0)} \cdot p_i},$$

где p_i , $1 \leq i \leq N$, — стационарные вероятности вложенной цепи Маркова; $\tau_i^{(0)}$ — время исправного функционирования системы за период, на котором $\xi(t) = e_i$; $\tilde{\tau}_i$ — длительность периода, на котором $\xi(t) = e_i$; $\tilde{S}_i$ — прибыль, полученная за период, на котором $\xi(t) = e_i$; $\tilde{C}_i$ — затраты, имевшие место на периоде, на котором $\xi(t) = e_i$.

17.1.2. Выбор оптимальных сроков проведения плановых восстановительных работ при полной информации.

1. Регенерирующий процесс. Предположим, что в момент регенерации процесса $\xi(t)$ назначается через время η , распределенное по закону $G(x)$, проведение плановой восстановительной работы. Тогда функционалы качества функционирования имеют вид дробно-линейного функционала

$$J(G) = \int A(x) dG(x) / \int B(x) dG(x).$$

Необходимо определить функцию $G_0(x)$, для которой

$$J(G_0) = \max_G J(G).$$

2. Марковский и полумарковский процессы. Предположим, что в момент перехода процесса $\xi(t)$ в состояние e_i , $1 \leq i \leq N$, назначается через время η_i , распределенное по закону $G_i(x)$, проведение плановой восстановительной работы. Тогда функционалы качества функционирования имеют вид дробно-линейного функционала

$$J(G_1, G_2, \dots, G_N) = \frac{\int A(x_1, x_2, \dots, x_N) dG_1(x_1) dG_2(x_2) \dots dG_N(x_N)}{\int B(x_1, x_2, \dots, x_N) dG_1(x_1) dG_2(x_2) \dots dG_N(x_N)}.$$

Необходимо определить набор функций распределения $\{G_i^{(0)}(x), 1 \leq i \leq N\}$, для которых

$$J(G_1^{(0)}, G_2^{(0)}, \dots, G_N^{(0)}) = \max_{\{G_i, i=1, \dots, N\}} J(G_1, G_2, \dots, G_N).$$

Решение этих задач следующее. Известно, что экстремум дробно-линейного функционала можно искать в классе $\mathfrak{M}$ вырожденных функций распределения

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \tau, \\ 1, & x > \tau. \end{cases}$$

Тогда для регенерирующего процесса

$$\max_G J(G) = \max_{\tau} \frac{A(\tau)}{B(\tau)} = A(\tau_0)/B(\tau_0).$$

Величина τ_0 определяет оптимальную периодичность проведения плановых восстановительных работ.

Для марковского или полумарковского процесса

$$\begin{aligned} \max_{\{G_i, i=1, \dots, N\}} J(G_1, G_2, \dots, G_N) &= \max_{\tau_i, i=1, \dots, N} \frac{A(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N)}{B(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N)} = \\ &= A(\tau_1^{(0)}, \tau_2^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)}) / B(\tau_1^{(0)}, \tau_2^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)}). \end{aligned}$$

Вектор $(\tau_1^{(0)}, \tau_2^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)})$ определяет оптимальную периодичность проведения плановых восстановительных работ в соответствующем состоянии e_i .

Исследование на экстремум функции одной или многих переменных осуществляется стандартными методами.

17.1.3. Выбор оптимальных сроков проведения плановых восстановительных работ при ограниченной информации. Во многих практических ситуациях характеристики надежности точно не известны, а известно лишь, что функции распределения принадлежат некоторому классу. Возможны следующие ситуации:

известны значения $\pi = (0, \pi_1, \dots, \pi_n)$ функции распределения времени безотказной работы $F(y)$ в отдельных точках $y = (y_0 = 0, y_1, \dots, y_n)$, т. е. $F(y_i) = \pi_i$, $i = 0, \dots, n$ (класс таких функций будем обозначать через $\Omega(n, y, \pi)$);

известны моменты распределения $F(y) : \mu_k = \int_0^\infty x^k dF(x)$, $k = 1, 2, \dots, m$ (класс таких функций будем обозначать через $\Omega_m = \Omega(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$).

Для отыскания оптимальной стратегии в подобных задачах предлагается использовать метод минимакса, состоящий в следующем. Сначала среди всех функций распределения, которые характеризуют функционирование системы и информация о которых ограничивается их принадлежностью определенному заданному классу, находятся наихудшие (в смысле данного показателя качества), а затем при этих условиях определяется оптимальное управление.

Для регенерирующего процесса обозначим $\tilde{J}(F, G, \Phi)$ функционал, характеризующий качество работы системы. Необходимо определить функции $F \in \Omega(n, y, \pi)$; $\Phi \in \Omega$; $G \in \Omega$, при которых достигается

$$\tilde{J} = \max_{G \in \Omega} \min_{\Phi \in \Omega} \min_{F \in \Omega(n, y, \pi)} \tilde{J}(F, G, \Phi),$$

где $\Omega = \Omega(0, y, \pi)$; $\Phi(x)$ — функция распределения времени самостоятельного проявления отказа.

Аналогичная постановка имеет место при $F(x) \in \Omega_m$ (обычно берут $m = 1$ или $m = 2$).

Если случайный процесс $\xi(t)$, описывающий эволюцию системы, является регенерирующим, то функционал $\tilde{J}(F, \Phi, G)$ — дробно-линейный, и тогда экстремум функционала $\tilde{J}(F, \Phi, G)$ по функциям $F \in \Omega(n, y, \pi)$ достигается на одной из ступенчатых функций $F \in \Omega^*(n, y, \pi)$, где $\Omega^*(n, y, \pi)$ — множество функций распределения ступенчатого вида, имеющих на каждом из полуинтервалов $(-\infty, y_1), [y_1, y_2), \dots, [y_n, \infty)$ ровно один скачок величины $\Delta\pi_i = \pi_{i+1} - \pi_i$.

Пусть $A(x, v, \tau)$, $B(x, v, \tau)$ — подынтегральные функции числителя и знаменателя функционала $\tilde{J}(F, \Phi, G)$. Если при этом функция $A(x, v, \tau)$ не убывает, а функция $B(x, v, \tau)$ не возрастает по τ при любых $x, v \in [0, \infty)$, то «наихудшей» функцией распределения в классе $\Omega(n, y, \pi)$ по отношению к функционалу $\tilde{J}(F, \Phi, G)$ будет функция

$$F^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < y \leq 0, \\ \pi_{k+1} & \text{при } y_k < y \leq y_{k+1}, \quad k = \overline{0, \dots, n-1}, \\ 1 & \text{при } y > y_n. \end{cases}$$

В случае когда периоды профилактики назначаются детерминированно ($G(x) \in \Omega^*$, где Ω^* — класс вырожденных распределений), минимум функционала $\tilde{J}(F^*, \Phi, G)$ достигается при $\Phi(v) \in \Omega^*$ для любого фиксированного $G(x)$; тогда

$$\tilde{J} = \max_{G \in \Omega^*} \min_{\Phi \in \Omega^*} \tilde{J}(F^*, \Phi, G) =$$

$$\max_{0 \leq x \leq \infty} \min_{0 \leq v \leq \infty} = \frac{\sum_{i=0}^n A(x, v, y_i + 0) \Delta \pi_i}{\sum_{i=0}^n B(x, v, y_i + 0) \Delta \pi_i}.$$

При ограничениях $F \in \Omega_m$ экстремум $\tilde{J}(F)$ также достигается на ступенчатых функциях, но поиск их сложнее.

Конкретные модели технического обслуживания с ограниченной информацией о надежности рассмотрены ниже.

17.2. СТРАТЕГИИ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПРИ ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Пусть время безотказной работы ξ системы распределено по закону $F(x) = P\{\xi < x\}$. Предположим, что появившийся в системе при ее функционировании отказ проявляется не мгновенно, а через некоторое случайное время ζ , распределенное по закону $\Phi(x) = P\{\zeta < x\}$.

В начальный момент $t = 0$ начинается эксплуатация системы и назначается плановая предупредительная профилактика через время η , распределенное по закону $G(x) = P\{\eta < x\}$. Если к назначенному моменту η система не отказала (произошло событие $\xi > \eta$), то в момент η начинается плановая предупредительная профилактика, полностью обновляющая систему. Будем обозначать длительность этой плановой предупредительной профилактики γ_1 , а $F_1(t) = P\{\gamma_1 < t\}$ — ее функцию распределения. Если к назначенному моменту η система отказала ($\xi \leq \eta$), но отказ не проявился самостоятельно ($\xi + \zeta \geq \eta$), то в момент η начинается проведение планового аварийно-профилактического ремонта, длительность которого равна γ_2 , а закон распределения $F(t) = P\{\gamma_2 < t\}$. Наконец, если отказ системы наступил до назначенного момента ($\xi \leq \eta$) и самостоятельно проявился до назначенного момента ($\xi + \zeta < \eta$), то в момент обнаружения отказа $\xi + \zeta$ начинается внеплановый аварийно-профилактический ремонт, длительность которого равна γ_3 , а закон распределения $F_3(t) = P\{\gamma_3 < t\}$.

После проведения возможных в системе восстановительных работ, когда по предположению система обновляется, осуществляется перепланирование момента проведения следующей предупредительной профилактики, и весь процесс обслуживания повторяется заново.

Все случайные величины предполагаются независимыми, с конечными первыми моментами.

Введем обозначения: c_0 — прибыль, полученная за единицу времени исправной работы; c_n — затраты за единицу времени при наличии скрытого отказа; $c_{\text{пл}}$ — затраты за единицу времени при проведении плановой предупредительной профилактики; $c_{\text{ап}}$ — затраты за единицу времени при проведении планового аварийно-профилактического ремонта; $\tilde{c}_{\text{ап}}$ — затраты за единицу времени при проведении внепланового аварийно-профилактического ремонта; $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$; $f(x) = F'(x)$; $\lambda(x) = f(x)/\bar{F}(x)$ — интенсивность отказов системы.

Необходимо найти оптимальный период проведения профилактических работ τ_0 , максимизирующий (минимизирующий) выбранный критерий качества функционирования системы. Основные критерии качества для рассматриваемой модели:

коэффициент оперативной готовности

$$R_{\tau}(z) = \frac{\int_0^{\tau} \bar{F}(x+z) dx}{\tau - \int_0^{\tau} \int_0^x F(x-y) d\Phi(y) dx + (M\gamma_3 - M\gamma_2) \int_0^{\tau} F(\tau-x) d\Phi(x) + M\gamma_1 + (M\gamma_2 - M\gamma_1) F(\tau)}$$

коэффициент готовности

$$K(\tau) = R_{\tau}(0);$$

средние удельные затраты

$$C(\tau) = \frac{1}{\int_0^{\tau} \bar{F}(x) dx} \left\{ c_n \left[\int_0^{\tau} F(x) dx - \int_0^{\tau} \int_0^x F(x-y) d\Phi(y) dx \right] + \right. \\ \left. + (\tilde{c}_{ан} M\gamma_3 - c_{ан} M\gamma_2) \int_0^{\tau} F(\tau-x) d\Phi(x) + c_{пп} M\gamma_1 + (c_{ан} M\gamma_2 - c_{пп} M\gamma_1) F(\tau) \right\};$$

средняя удельная прибыль

$$S(\tau) = \frac{c_n \left\{ \gamma_0 \int_0^{\tau} \bar{F}(x) dx - \int_0^{\tau} \left[F(x) - \int_0^x F(x-y) d\Phi(y) \right] dx - \right. \\ \left. \tau - \int_0^{\tau} \int_0^x F(x-y) d\Phi(y) dx + (M\gamma_3 - M\gamma_2) \int_0^{\tau} F(\tau-x) d\Phi(x) + \right. \\ \left. - (\tilde{\gamma}_{ан} - \gamma_{ан}) \int_0^{\tau} F(\tau-x) d\Phi(x) - \gamma_{пп} - (\gamma_{ан} - \gamma_{пп}) F(\tau) \right\}}{\tau - \int_0^{\tau} \int_0^x F(x-y) d\Phi(y) dx + (M\gamma_3 - M\gamma_2) \int_0^{\tau} F(\tau-x) d\Phi(x) + M\gamma_1 + (M\gamma_2 - M\gamma_1) F(\tau)},$$

где $\gamma_0 = c_0/c_n$; $\tilde{\gamma}_{ан} = \tilde{c}_{ан}/c_n M\gamma_3$; $\gamma_{ан} = \frac{c_{ан}}{c_n} M\gamma_2$; $\gamma_{пп} = \frac{c_{пп}}{c_n} M\gamma_1$.

В табл. 17.2 и 17.3 приводятся уравнения для определения оптимального периода проведения предупредительных профилактик τ_0 и оптимальные значения критериев качества для частных случаев индикации отказов: случай мгновенной индикации

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

и случай отсутствия самостоятельного проявления отказов $\Phi(x) = 0$ для $x < \infty$.

П р и м е ч а н и е. Иногда для определения τ_0 целесообразно не решать уравнения, приведенные в табл. 17.2, 17.3, а построить по точкам график соответствующего критерия как функции от τ и определить точку абсолютного экстремума.

Профилактика при мгновенной индикации отказов

Критерий качества	Оптимальный период проведения предупредительных профилактик τ_0	Оптимальное значение критерия качества при $\tau_0 < \infty$	Оптимальное значение критерия качества при $\tau_0 = \infty$
$R_\tau(z)$	$\frac{M\gamma_1}{M\gamma_3 - M\gamma_1} = -F(\tau) + \frac{\lambda(\tau) \bar{F}(\tau)}{\bar{F}(\tau + z)} \int_0^\tau \bar{F}(x) dx +$ $+ \frac{1}{M\gamma_3 - M\gamma_1} \left[\frac{\bar{F}(\tau)}{\bar{F}(\tau + z)} \int_0^\tau \bar{F}(x + z) dx - \int_0^\tau F(x) dx \right]$	$\frac{\bar{F}(\tau_0 + z)}{\bar{F}(\tau_0) [1 + (M\gamma_3 - M\gamma_1) \lambda(\tau_0)]}$	$\int_z^\infty \bar{F}(x) dx$ $M\gamma_3 + M\xi$
$K(\tau)$	$\frac{M\gamma_1}{M\gamma_3 - M\gamma_1} = -F(\tau) + \lambda(\tau) \int_0^\tau \bar{F}(t) dt$	$\frac{1}{1 + (M\gamma_3 - M\gamma_1) \lambda(\tau_0)}$	$\frac{M\xi}{M\xi + M\gamma_3}$
$C(\tau)$	$\frac{c_{\text{пн}} M\gamma_1}{\tilde{c}_{\text{ан}} M\gamma_3 - c_{\text{пн}} M\gamma_1} = -F(\tau) + \lambda(\tau) \int_0^\tau \bar{F}(t) dt$	$\lambda(\tau_0) (\tilde{c}_{\text{ан}} M\gamma_3 - c_{\text{пн}} M\gamma_1)$	$\frac{\tilde{c}_{\text{ан}} M\gamma_3}{M\xi}$
$S(\tau)$	$\frac{(c_0 + c_{\text{пн}}) M\gamma_1}{(c_0 + \tilde{c}_{\text{ан}}) M\gamma_3 - (c_0 + c_{\text{пн}}) M\gamma_1} = -F(\tau) + \lambda(\tau) \left[\int_0^\tau \bar{F}(x) dx + \right.$ $\left. + \frac{(\tilde{c}_{\text{ан}} - c_{\text{пн}}) M\gamma_1 M\gamma_3}{(c_0 + \tilde{c}_{\text{ан}}) M\gamma_3 - (c_0 + c_{\text{пн}}) M\gamma_1} \right]$	$\frac{c_0 - (\tilde{c}_{\text{ан}} M\gamma_3 - c_{\text{пн}} M\gamma_1) \lambda(\tau_0)}{1 + (M\gamma_3 - M\gamma_1) \lambda(\tau_0)}$	$\frac{c_0 M\xi - \tilde{c}_{\text{ан}} M\gamma_3}{M\xi + M\gamma_3}$

Профилактика при отсутствии самостоятельной индикации отказов

Критерий качества	Уравнение для определения оптимального периода проведения предупредительных профилактик τ_0	Оптимальное значение критерия качества
$R_\tau(z)$	$\frac{M\gamma_1}{M\gamma_2 - M\gamma_1} = -F(\tau) + \lambda(\tau) \frac{\bar{F}(\tau)}{\bar{F}(\tau + z)} \int_0^\tau \bar{F}(x + z) dx +$ $+ \frac{\int_0^\tau x dF(x + z)}{(M\gamma_2 - M\gamma_1) \bar{F}(\tau + z)}$	$\frac{\bar{F}(\tau_0 + z)}{1 + (M\gamma_2 - M\gamma_1) f(\tau_0)}$
$K(\tau)$	$\frac{M\gamma_1}{M\gamma_2 - M\gamma_1} = -F(\tau) + \lambda(\tau) \int_0^\tau \bar{F}(x) dx + \frac{\int_0^\tau x dF(x)}{(M\gamma_2 - M\gamma_1) \bar{F}(\tau)}$	$\frac{\bar{F}(\tau_0)}{1 + (M\gamma_2 - M\gamma_1) f(\tau_0)}$
$C(\tau)$	$\frac{c_{\text{пп}} M\gamma_1}{c_{\text{ап}} M\gamma_2 - c_{\text{пп}} M\gamma_1} = -F(\tau) + \lambda(\tau) \int_0^\tau \bar{F}(x) dx +$ $+ \frac{c_{\text{п}} \int_0^\tau x dF(x)}{(c_{\text{ап}} M\gamma_2 - c_{\text{пп}} M\gamma_1) \bar{F}(\tau)}$	$c_{\text{п}} \frac{F(\tau_0)}{\bar{F}(\tau_0)} + \lambda(\tau_0) (c_{\text{ап}} M\gamma_2 - c_{\text{пп}} M\gamma_1)$
$S(\tau)$	$\frac{(c_0 + c_{\text{пп}}) M\gamma_1}{(c_0 + c_{\text{п}}) (M\gamma_2 - M\gamma_1)} = -F(\tau) + \lambda(\tau) \int_0^\tau \bar{F}(x) dx + \frac{\int_0^\tau x dF(x)}{(M\gamma_2 - M\gamma_1) \bar{F}(\tau)} +$ $+ \frac{(c_{\text{п}} - c_{\text{ап}}) M\gamma_2 F(\tau)}{(c_0 + c_{\text{п}}) (M\gamma_2 - M\gamma_1) \bar{F}(\tau)} +$ $+ \frac{M\gamma_2 M\gamma_1 (c_{\text{ап}} - c_{\text{пп}}) + \tau [M\gamma_2 (c_{\text{ап}} - c_{\text{п}}) + M\gamma_1 (c_{\text{п}} - c_{\text{пп}})] \lambda(\tau)}{(c_0 + c_{\text{п}}) M\gamma_2 - (c_0 + c_{\text{п}}) M\gamma_1}$	$\frac{[c_0 \bar{F}(\tau_0) - c_{\text{п}} F(\tau_0) - (c_{\text{ап}} M\gamma_2 - c_{\text{пп}} M\gamma_1) f(\tau_0)]}{[1 + (M\gamma_2 - M\gamma_1) f(\tau_0)]}$

17.3.1. Предварительные замечания. При исследовании моделей профилактического обслуживания, в которых существенную роль играет структура системы, основная проблема заключается в определении оптимальной глубины профилактики, т.е. объема той части системы, которая подлежит обновлению (замене) при проведении восстановительной работы. Во многих случаях характеристиками подобных систем могут служить наработки отдельных элементов, а для математического описания их функционирования используется аппарат полумарковских процессов. Основные показатели качества рассматриваемых систем представляют собой дробно-линейные функционалы, и профилактики следует назначать детерминированно.

17.3.2. Аварийные ремонты отказавших элементов и плановая профилактика системы. Рассматривается последовательная система, состоящая из N элементов. В системе возможно проведение восстановительных работ двух видов: внеплановых предупредительных профилактик, полностью обновляющих систему, и внеплановых аварийно-профилактических ремонтов части системы, когда отказавший элемент заменяется новым. Предполагается, что индикация возникшего в системе отказа происходит мгновенно.

1. Описание стратегии обслуживания. Стратегия эксплуатации системы состоит в следующем. В начальный момент времени назначается проведение предупредительной профилактики тогда, когда наработка достигает некоторого заданного значения t .

Если до момента начала предупредительной профилактики происходит отказ системы, то проводится внеплановый аварийно-профилактический ремонт (замена отказавшего элемента новым, идентичным по своим вероятностным характеристикам прежнему).

Будем предполагать, что во время проведения аварийно-профилактического ремонта система выключается, т.е. характеристики надежности элементов не ухудшаются и наработка системы не увеличивается. Так поступаем до тех пор, пока наработка системы не достигнет заданного значения. В этот момент начинается проведение внеплановой предупредительной профилактики независимо от того, сколько календарного времени прошло с момента окончания последнего внепланового аварийно-профилактического ремонта и сколько таких ремонтов было проведено за период, прошедший после завершения предыдущей предупредительной профилактики. В результате предупредительной профилактики система полностью обновляется, далее весь процесс обслуживания повторяется.

2. Постановка задачи. Необходимо задать следующие характеристики системы:

$F_i(t)$ — функцию распределения времени безотказной работы i -го элемента, $i = 1, 2, \dots, N$; $P_i(t) = 1 - F_i(t)$;

T_i — среднюю наработку до отказа i -го элемента;

$T_{\text{пп}}$ — среднюю длительность предупредительной профилактики;

t_i — среднюю длительность аварийно-профилактического ремонта i -го элемента при его отказе;

c_i — затраты за единицу времени при проведении аварийного ремонта i -го элемента; $i = 1, 2, \dots, N$;

$c_{\text{пп}}$ — затраты за единицу времени при проведении внеплановой предупредительной профилактики;

c_0 — прибыль за единицу времени безотказной работы системы;

z — оперативное время работы системы, необходимое для выполнения задачи.

Пусть $H_i(t)$ — функция восстановления рекуррентного потока, образованного последовательностью независимых случайных величин с функцией распределения $F_i(t)$, преобразование Лапласа—Стилтеса которой

$$H_i^*(s) = F_i^*(s) / [1 - F_i^*(s)],$$

где $F_i^*(s)$, $H_i^*(s)$ — преобразования Лапласа—Стилтьеса функций $F_i(t)$ и $H_i(t)$ соответственно.

Необходимо определить такие значения τ , при которых показатели качества функционирования системы достигают экстремального значения.

3. Основные результаты. Выражения для основных показателей качества работы системы в виде функций от τ имеют вид:

$$K = \tau \left[\tau + T_{\text{ин}} + \sum_{i=1}^N H_i(\tau) t_i \right]^{-1};$$

$$R(z) = \int_0^\tau \prod_{i=1}^N \left[P_i(x+z) + \int_0^x P_i(x+z-y) dH_i(y) \right] dx \times$$

$$\times \left[\tau + T_{\text{ин}} + \sum_{i=1}^N t_i H_i(\tau) \right]^{-1};$$

$$C = \tau^{-1} \left[c_{\text{ин}} T_{\text{ин}} + \sum_{i=1}^N c_i t_i H_i(\tau) \right];$$

$$S = \left\{ c_0 \tau - \left[c_{\text{ин}} T_{\text{ин}} + \sum_{i=1}^N c_i t_i H_i(\tau) \right] \right\} \left[\tau + T_{\text{ин}} + \sum_{i=1}^N t_i H_i(\tau) \right]^{-1}.$$

Уравнения для определения оптимальных значений наработки системы, при достижении которых следует проводить ее полное обновление, и соответствующие оптимальные значения показателей качества, приведены в табл. 17.4.

17.3.3. Минимаксная стратегия обслуживания последовательной системы. При недостаточной информации о виде функций распределения используются минимаксные стратегии, дающие гарантированные результаты в целом классе распределений.

1. Описание стратегии обслуживания и постановка задачи.

Рассматривается стратегия обслуживания последовательной системы, описанная в п. 17.3.2. Однако в отличие от указанного случая функции распределения длительностей безотказной работы элементов $F_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, N$, известны лишь в отдельных фиксированных точках, т.е. $F_i \in \Omega_i(n_i, y_i, \pi_i) = \Omega_i$, где через $\Omega_i(n_i, y_i, \pi_i)$ обозначено множество функций распределения, которые в заданных точках $y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in_i})$ принимают заданные значения $\pi_i = (\pi_{i1}, \pi_{i2}, \dots, \pi_{in_i})$ соответственно. Предполагается, что профилактики всей последовательной системы назначаются детерминированно и начинаются, когда наработка достигает значения τ .

2. Основные результаты. В соответствии с принципом минимакса решение задачи разбивается на два этапа.

1) Определение «наихудших» функций распределения в классах Ω_i , $i = 1, 2, \dots, N$. Обозначим через $F_i^{(0)}(x)$ ступенчатую функцию распределения вида

$$F_i^{(0)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \pi_{ik} & \text{при } y_{ik} < x \leq y_{i,k+1}, k = 0, 1, 2, \dots, n_i - 1, \\ 1 & \text{при } x > y_{i,n_i}, \end{cases} \quad (17.1)$$

где $y_{i,0} = \pi_{i,0} = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$. Очевидно, что $F_i^{(0)} \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Пусть далее $H_i^{(0)}(t)$ — функция восстановления рекуррентного потока, образованного последовательностью независимых случайных величин с функцией распределения $F_i^{(0)}(x)$.

Известно, что распределения вида (17.1) являются «наихудшими» в классах Ω_i по отношению к основным показателям качества функционирования — коэффициенту готовности, средним удельным затратам и средней удельной прибыли.

Аварийные ремонты отказавших элементов и предупредительные профилактики системы

Показатель	Уравнение, корень которого τ_0 является периодом оптимальной предупредительной профилактики	Оптимальное значение показателя при единственном корне	Оптимальное значение показателя при отсутствии корней ($\tau_0 = \infty$)
K	$\tau \sum_{i=1}^N t_i H_i'(\tau) - \sum_{i=1}^N t_i H_i(\tau) = T_{\text{пл}}$	$\left[1 + \sum_{i=1}^N t_i H_i'(\tau_0) \right]^{-1}$	$\left[1 + \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{T_i} \right]^{-1}$
$R(z)$	$\frac{\int_0^\tau \prod_{i=1}^N \left[P_i(x+z) + \int_0^x P_i(x+z-y) dH_i(y) \right] dx}{\tau + T_{\text{пл}} + \sum_{i=1}^N t_i H_i(\tau)} =$ $= \frac{\prod_{i=1}^N \left[P_i(\tau+z) + \int_0^\tau P_i(\tau+z-y) dH_i(y) \right]}{1 + \sum_{i=1}^N t_i H_i'(\tau)}$	$\frac{\prod_{i=1}^N \left[P_i(\tau_0+z) + \int_0^{\tau_0} P_i(\tau_0+z-y) dH_i(y) \right]}{1 + \sum_{i=1}^N t_i H_i'(\tau_0)}$	$\frac{\prod_{i=1}^N \int_0^\infty P_i(x+z) dx / T_i}{1 + \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{T_i}}$
C	$\tau \sum_{i=1}^N c_i t_i H_i'(\tau) - \sum_{i=1}^N c_i t_i H_i(\tau) = c_{\text{пл}} T_{\text{пл}}$	$\sum_{i=1}^N c_i t_i H_i'(\tau_0)$	$\sum_{i=1}^N \frac{c_i t_i}{T_i}$
S	$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N t_i t_j H_i(\tau) H_j'(\tau) [c_j - c_i] +$ $+ T_{\text{пл}} \sum_{i=1}^N t_i H_i'(\tau) [c_i - c_{\text{пл}}] +$ $+ \tau \sum_{i=1}^N t_i H_i'(\tau) [c_0 - c_i] -$ $- \sum_{i=1}^N t_i H_i(\tau) [c_0 + c_i] = T_{\text{пл}} (c_0 + c_{\text{пл}})$	$\frac{c_0 - \sum_{i=1}^N c_i t_i H_i'(\tau_0)}{1 + \sum_{i=1}^N t_i H_i'(\tau_0)}$	$\frac{c_0 - \sum_{i=1}^N c_i \frac{t_i}{T_i}}{1 + \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{T_i}}$

Примечание. В случае нескольких корней $\tau_{01}, \dots, \tau_{0m}$ оптимальное значение находится прямой подстановкой каждого из них в формулу для случая единственного корня с последующим выбором наилучшего из них, причем необходимо учесть значение показателя для $\tau_0 = \infty$.

2) Нахождение оптимальной нагрузки. В указанных условиях задача определения оптимального периода проведения предупредительных профилактических работ сводится к нахождению экстремумов по τ следующих функций: для коэффициента готовности

$$\max_{0 \leq \tau < \infty} \frac{\tau}{\tau + T_{\text{пп}} + \sum_{i=1}^N t_i H_i^{(0)}(\tau)} ;$$

для средних удельных затрат в единицу времени исправного функционирования

$$\min_{0 \leq \tau < \infty} \frac{c_{\text{пп}} T_{\text{пп}} + \sum_{i=1}^N c_i t_i H_i^{(0)}(\tau)}{\tau} ;$$

для средней удельной прибыли в единицу календарного времени

$$\max_{0 \leq \tau < \infty} \frac{c_0 \tau - c_{\text{п}} T_{\text{пп}} - \sum_{i=1}^N c_i t_i H_i^{(0)}(\tau)}{\tau + T_{\text{пп}} + \sum_{i=1}^N t_i H_i^{(0)}(\tau)} .$$

Точки экстремумов данных функций определяют оптимальные значения нагрузки системы, при достижении которых следует проводить предупредительные профилактические работы, а соответствующие экстремальные значения указанных функций — гарантированные величины показателей качества, обеспечиваемые в результате применения минимаксной стратегии.

17.3.4. Дублированная система. Рассмотрим функционирование дублированной системы с ненагруженным резервом, в которой элемент, выполняющий основные функции, имеет время безотказной работы ξ с функцией распределения $F(x) = P(\xi < x)$. Предполагается, что возникший отказ проявляется через случайное время ζ , распределенное по некоторому закону $\Phi(y) = P(\zeta < y)$. При эксплуатации такой системы ремонтная бригада начинает внеплановый аварийный ремонт отказавшего элемента в момент обнаружения отказа (в этом случае даже при наличии работоспособного устройства вся система будет простаивать в неисправном состоянии, так как отказ основного элемента не обнаружен). Немедленно после начала ремонта работоспособный резервный элемент принимает на себя функции основного. Длительность внепланового аварийного ремонта ξ_1 является случайной величиной с функцией распределения $F_1(x)$.

Кроме внепланового аварийного ремонта в системе возможно проведение еще двух видов восстановительных работ — плановой и внеплановой предупредительных профилактик, которые организуются следующим образом. В момент начала функционирования любого из двух элементов на месте основного назначается проведение плановой предупредительной профилактики через время τ , равное: τ_0 , если в данный момент второй (резервный) элемент восстанавливается с помощью плановой предупредительной профилактики; τ_1 , если в данный момент второй элемент находится в состоянии внепланового аварийного ремонта; τ_2 , если в момент начала функционирования данного элемента на месте основного резервный находится на внеплановой предупредительной профилактике.

Если в назначенный момент начала плановой предупредительной профилактики основного элемента в системе имеется работоспособный резервный, то начинается восстановительная работа указанного вида, а резервный элемент занимает место основного. В противном случае профилактика откладывается до появления исправного резервного элемента, и в момент его возвращения в систему с основным элементом начинается либо внеплановая предупредительная профилактика.

тика (если в это время не отказал), либо внеплановый аварийный ремонт (если к данному моменту наступил отказ), а восстановленный элемент занимает место основного. Длительности плановой и внеплановой предупредительных профилактик являются случайными величинами с заданными функциями распределения $F_0(x)$ и $F_2(x)$ соответственно.

Считается, что восстановительные работы всех видов полностью восстанавливают свойства безотказности устройств. Для проведения этих работ имеется одна ремонтная бригада, т. е. в произвольный момент времени может восстанавливаться только один элемент.

Для проведения расчетов необходимо задать следующие характеристики системы: функции распределения $F(x)$, $\Phi(x)$, $F_0(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$; c_0 — прибыль, получаемую за единицу времени исправного функционирования системы; d_0 , d_1 , d_2 — затраты за единицу времени проведения плановой предупредительной профилактики, внепланового аварийного и внеплановой предупредительной профилактики соответственно; $\tilde{c}_0$, $\tilde{c}_n$ — затраты за единицу времени, проведенного устройством в состояниях скрытого и проявившегося отказа соответственно.

Задача заключается в выборе значений τ_0 , τ_1 , τ_2 , доставляющих экстремум функционалу средней прибыли, отнесенной к единице календарного времени. Для решения используется аппарат управляемых полумарковских процессов.

Функционал средней прибыли в единицу календарного времени выражается формулой

$$S = \frac{\rho_0 [\rho_{10} p_{21} + (1 - p_{11}) p_{20}] + \rho_1 [(1 - p_{00}) p_{21} + p_{01} p_{20}] + \rho_2 [(1 - p_{00}) (1 - p_{11}) - p_{01} p_{10}]}{v_0 [\rho_{10} p_{21} + (1 - p_{11}) p_{20}] + v_1 [(1 - p_{00}) p_{21} + p_{01} p_{20}] + v_2 [(1 - p_{00}) (1 - p_{11}) - p_{01} p_{10}]},$$

где p_{ij} , $i, j = 0, 1, 2$, — переходные вероятности вложенной цепи Маркова полумарковского процесса, описывающего исследуемую систему, — определяются следующими соотношениями:

$$p_{i0} = \bar{F}(\tau_i) F_i(\tau_i); \quad p_{i1} = 1 - \bar{F}(\tau_i) F_i(\tau_i) - \int_{\tau_i}^{\infty} \bar{F}(u) dF_i(u);$$

$$p_{i2} = \int_{\tau_i}^{\infty} \bar{F}(u) dF_i(u), \quad i = 0, 1, 2; \quad \bar{F}(x) = 1 - F(x);$$

величины v_0 , v_1 , v_2 — средние длительности пребывания процесса в соответствующих состояниях:

$$v_j = \int_0^{\infty} [1 - F_j(x) \Psi_j(x)] dx,$$

причем

$$\Psi_j(x) = \begin{cases} \int_0^x F(x-u) d\Phi(u), & x \leq \tau_j, \\ 1, & x > \tau_j, \quad j = 0, 1, 2; \end{cases}$$

ρ_i — средняя прибыль за период пребывания процесса в i -м состоянии до первого выхода из него:

$$\begin{aligned} \rho_i = & c_0 \left[\int_0^{\tau_i} \bar{F}(x) dx + \int_{\tau_i}^{\infty} \bar{F}(x) \bar{F}_i(x) dx \right] - d_i \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx - \\ & - c_c \left[\int_{x+z \leq \tau_i} \bar{\Phi}(z) dF(x) dz + \int_{x+z \geq \tau_i} \bar{F}_i(x+z) \bar{\Phi}(z) dF(x) dz \right] - \\ & - \tilde{c}_n \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \bar{F}_i(x+z) \Phi(z) dF(x) dz, \quad i = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Точка абсолютного максимума функционала $S = S(\tau_0, \tau_1, \tau_2)$ определяет оптимальную стратегию назначения предупредительных профилактических работ.

Примечание. Случай нагруженного резерва приводит к весьма громоздким вычислительным схемам и здесь не рассматривается¹.

17.4. ПРОФИЛАКТИКА ПРИ ИЗВЕСТНОЙ СРЕДНЕЙ НАРАБОТКЕ

Рассматривается система с мгновенной индикацией отказов (см. § 17.2). Известно, что $F(x)$ принадлежит классу функций распределения с заданным средним T_1 .

Пусть τ —время от момента очередного полного обновления системы до начала следующей предупредительной профилактики. Необходимо определить величину $\tau = \tau_0$ и функцию распределения $F^*(x)$, обеспечивающие гарантированное значение заданного показателя качества $J(\tau, F)$.

Минимаксным правилом проведения предупредительных профилактик, обеспечивающим некоторое гарантированное положительное значение коэффициента оперативной готовности $R(t_0)$ при $t_0 < T_1$, является правило, в соответствии с которым предупредительные профилактики не проводятся. При этом

$$R(t_0) = \frac{T_1 - t_0}{T_1 + M\gamma_3};$$

средние удельные затраты

$$C(\infty, F^*) = \tilde{c}_{\text{ап}} M\gamma_3 / T_1.$$

средняя удельная прибыль, если $T_1 \geq \frac{\tilde{c}_{\text{ап}} - c_{\text{ип}}}{c_0 + c_{\text{ип}}} M\gamma_3$,

$$S = (c_0 T_1 - \tilde{c}_{\text{ап}} M\gamma_3) / (T_1 + M\gamma_3).$$

¹ Шнурков П. В. Профилактика дублированных систем с нагруженным резервом. — Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика, 1983, № 6.

МЕТОДЫ ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ

Глава 18

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ. ПЕРВИЧНЫЙ АНАЛИЗ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

18.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

18.1.1. Предварительные замечания. Под экспериментальной оценкой надежности понимается определение и контроль различных показателей по результатам испытаний или наблюдений в процессе эксплуатации.

В общем комплексе мероприятий по обеспечению надежности экспериментальные оценки играют существенную роль, в частности, позволяют оценить фактические значения показателей надежности и обосновать необходимость мероприятий по повышению надежности. Результаты экспериментальной оценки показателей надежности типовых элементов и узлов служат исходными данными при априорных оценках надежности вновь разрабатываемых изделий.

Точность и достоверность экспериментальных оценок определяют эффективность мероприятий по обеспечению надежности на всех этапах цикла «проектирование — производство — эксплуатация».

18.1.2. Специальные и совмещенные испытания. Экспериментальные оценки показателей надежности могут быть получены по результатам либо испытаний — специальных или совмещенных, либо наблюдений за функционированием изделий в условиях эксплуатации.

Специальными называются испытания, организуемые специально с целью определения (контроля) показателей надежности.

Совмещенными называются испытания, при которых определение (контроль) показателей надежности совмещается с экспериментальным исследованием других параметров изделия.

Особенностью специальных испытаний является то, что объем их обычно заранее планируется, а условия функционирования изделий устанавливаются исходя из требований оценки конкретных показателей надежности. Такие испытания, как правило, организуются для изделий, выпускаемых в достаточно большом количестве. Проводить специальные испытания для сложных изделий и систем во многих случаях не представляется возможным, так как объем выпуска обычно ограничен единицами экземпляров, а процесс изготовления, отладки, проверки функционирования и доводки занимает слишком много времени. Показатели надежности таких изделий оцениваются в основном по результатам либо совмещенных испытаний, либо наблюдений на этапе эксплуатации.

При обработке экспериментальных данных отмеченные различия не существенны, поэтому ниже во всех случаях термины «испытания» и «наблюдения» используются как синонимы.

18.1.3. Прямые и косвенные методы оценки. При экспериментальных оценках могут быть использованы прямые либо косвенные методы.

Прямыми называются методы, при которых показатели надежности изделия оцениваются непосредственно по результатам наблюдения за функционированием изделия как целого.

Косвенными называются методы, при которых требуемые показатели надежности выражаются через другие показатели надежности изделия или его элемен-

тов, а затем определяются расчетным путем. Весьма широко распространено другое название этих методов — «расчетно-экспериментальные методы» (РЭМ).

Прямые методы обладают большей достоверностью, однако для изделий, имеющих структурную избыточность, использование косвенных методов позволяет существенно уменьшить требуемый объем испытаний (наблюдений). Для сложных изделий, испытываемых практически всегда в неполном составе, косвенные методы являются единственно приемлемыми.

18.1.4. Ускорение испытаний. Экспериментальная оценка показателей надежности требует значительных затрат времени. Сокращение времени (ускорение) испытаний может быть достигнуто применением либо специальных методов планирования и обработки, либо сформированных режимов испытаний.

Ускоренными называются любые испытания, при которых используются те или иные методы сокращения времени испытаний.

Форсированными называются ускоренные испытания, при которых ускорение достигается ужесточением (формированием) режимов с целью набора необходимого количества статистической информации за более короткое время.

Применение сформированных испытаний требует большой предварительной подготовки: выбора эффективных ускоряющих факторов, исследования степени изменения показателей надежности при различных уровнях ускоряющего фактора. Испытания в форсированных режимах целесообразны прежде всего для контроля надежности серийных изделий, выпускаемых по неизменной технологии в течение длительного времени.

18.1.5. Определительная и контрольная процедуры. Экспериментальные оценки надежности преследуют одну из следующих целей:

- определение фактических значений показателей надежности;
- контроль соответствия изделия заданному требованию.

Определительная и контрольная постановки задачи имеют существенные отличия. При сопоставимых требованиях к точности и достоверности требуемый объем испытаний при контрольной постановке может быть существенно меньше, чем при определительной в случае, если истинное значение показателя надежности изделия существенно отличается от требуемого уровня.

Для контрольной и определительной процедур, кроме того, существенно различны этапы планирования.

Планирование контрольной процедуры опирается на требуемое значение показателя надежности. В результате планирования определяется необходимый объем испытаний, и оценочный норматив — решающее правило, по которому принимается решение о соответствии или несоответствии изделия заданному требованию. Следовательно, ошибка в планировании контрольной процедуры в принципе не может быть выявлена в результате испытаний, и, таким образом, корректность планирования непосредственно определяет достоверность заключения о соответствии или несоответствии изделия заданному требованию.

При планировании определительной процедуры принципиально невозможно однозначно указать необходимый объем испытаний, так как точность оценок показателей надежности при заданной достоверности зависит не от объема испытаний, а от объема получаемой при испытаниях информации. Исходя из требуемых точности и достоверности оценок, в результате планирования определительной процедуры получают не объем испытаний, а минимально необходимое число информативных реализаций.

Требуемый объем испытаний — число изделий, или число опытов, и продолжительность испытаний — зависит от фактической надежности изделия, которая до испытаний неизвестна. Следовательно, необходимый объем испытаний при планировании определительной процедуры может быть определен лишь ориентировочно, исходя из предполагаемого уровня надежности изделий. Однако ошибки в планировании объема определительных испытаний выявляются в процессе испытаний и при обработке их результатов и могут быть скорректированы.

18.2.1. Предварительные замечания. Вопросы организации испытаний, сбора и предварительной обработки информации являются общими и одинаково важными при любых видах испытаний на надежность — определительных и контрольных, нормальных и ускоряемых, специальных и совмещенных.

При организации испытаний следует обратить внимание на следующие факторы:

- режим эксплуатации изделия при испытаниях (непрерывный или циклический);
- характер внешних воздействий (механические, климатические, электрические);
- объекты сбора статистики;
- состав, обязанности и ответственность членов испытательных групп;
- правила и порядок контроля работоспособности изделия;
- состав информации, которую необходимо фиксировать для анализа и оценки надежности;
- формы учетных документов для фиксации наработки и отказов;
- правило прекращения испытаний.

От степени проработки этих вопросов при подготовке испытаний зависит достоверность получаемых оценок показателей надежности.

18.2.2. Режим эксплуатации и условия окружающей среды. Известно, что уровень фактической надежности изделия существенно зависит от параметров окружающей среды и режима функционирования изделия.

Если изделие предназначено для функционирования в широком диапазоне параметров среды, то целесообразно задавать и проверять показатели надежности для различных (например, граничных) значений параметров среды. Если задан уровень показателя надежности и специально не оговорены соответствующие ему условия, то при испытаниях следует обеспечить наиболее характерные для данного изделия условия функционирования.

18.2.3. Объекты сбора статистики. Правильный выбор объектов сбора статистики, в особенности для сложных изделий при использовании РЭМ, является не простой задачей. При слишком мелком делении изделия на самостоятельные объекты сбора статистики существенно усложняется учет, увеличивается число учетных документов, что неизбежно ведет к снижению достоверности получаемой информации. При чрезмерном укрупнении объектов сбора статистики может потеряться необходимая детализация информации о причине отказа, месте отказа и о фактической наработке отдельных элементов изделия.

18.2.4. Режим контроля функционирования. Контроль работоспособности при испытаниях на надежность может быть непрерывным, периодическим, эпизодическим.

Наиболее полную информацию дает непрерывный контроль, который позволяет фиксировать моменты отказов изделий. Однако такой контроль не всегда может быть обеспечен.

Если при испытаниях осуществляется периодический контроль функционирования, то данные об отказах оказываются сгруппированными по интервалам контроля. В этом случае при выборе периодичности контроля рекомендуется руководствоваться следующими соображениями. Минимальный период контроля определяется только техническими и экономическими соображениями. Что касается ограничений «сверху», максимальная наработка между двумя последовательными проверками определяется при определительных испытаниях интересами статистической наработки: период контроля должен быть не слишком большим, чтобы на интервал испытаний приходилось не менее 10—15 межконтрольных периодов.

При контрольных испытаниях, в особенности в случае последовательных испытаний, слишком редкие проверки функционирования могут привести к существенным ошибкам. В этом случае частота контроля должна быть такой, чтобы вероятность двойного пересечения границы зон приемки или браковки за один межконтрольный период была пренебрежимо мала.

18.2.5. Режим восстановления работоспособности. В зависимости от конкретных условий могут быть организованы испытания с заменой (восстановлением) или без замены отказавших изделий.

Для изделий с распределением времени работы до отказа, отличным от экспоненциального, целесообразная стратегия восстановления зависит также от вида определяемого показателя надежности. Если, например, определяется среднее время работы изделия до первого отказа, то после каждого отказа должно быть обеспечено полное восстановление изделия до первоначального состояния по всем параметрам.

Как правило, в процессе испытаний должны выполняться в установленные сроки все регламентные работы, предусмотренные технической документацией. Однако если целью испытаний является определение оптимального межрегламентного (межремонтного) периода, то испытания должны проводиться при функционировании изделия до отказа без регламентного обслуживания. В результате такого эксперимента оценивают вид и параметры функции распределения времени работы до отказа, а затем определяется искомый период.

18.2.6. Состав фиксируемой информации. Возможности объективного анализа и обработки статистической информации, получаемой в результате испытаний, существенно зависят от полноты сведений о каждом случае нарушения функционирования (отказа, неисправности). Фиксации подлежат все случаи нарушения функционирования. Выделение из общей статистики отказов для различных оценок производится при обработке данных.

Существенной особенностью экспериментальной оценки показателей надежности является большой объем сведений, который необходимо фиксировать в каждом случае нарушения функционирования.

В процессе испытаний на надежность необходимо обеспечить фиксацию по крайней мере следующей информации:

- общая наработка изделия и время работы от момента предыдущего нарушения;

- место нарушения (заводской и позиционный номера отказавшего элемента, узла, детали);

- причина нарушения;

- последствия нарушения (полное нарушение работоспособности или частичное и по каким именно функциям);

- вид нарушения (поломка, износ детали, уход параметра и т.п.);

- способ устранения нарушения (замена элемента, регулировка, перестановка элементов и т.п.);

- данные об оперативности подключения и контролируемости резерва (для изделий, имеющих резервные компоненты);

- условия среды в момент нарушения функционирования (температура, вибрация, удары и другие сопутствующие явления, в том числе манипуляции обслуживающего персонала).

Весьма часто нарушения работоспособности сложных изделий, в особенности опытных образцов, не имеют отношения к свойству «надежность» (срабатывание автоматов защиты или перегорание предохранителей при бросках напряжения, заклинивание вычислительных устройств при некоторых определенных типах входной информации, остановки технологических линий при значительном изменении качества сырья и т.п.). Поэтому тщательная фиксация всех явлений, сопутствующих отказу, очень важна для правильной их классификации при предварительной обработке результатов испытаний.

Дата и время		Наработка	Момент обнаружения неисправности	Время восстановления		Внешние признаки неисправности	Номер карты учета неисправности	Отказавшие узел, элемент	Вид работы (рабочие записи обслуживающего персонала)
Включе-ние	Выключе-ние			Поиск	Устране-ние				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Рис. 18.1. Форма аппаратного журнала

Достоверность первичной информации обеспечивается полнотой и регулярностью записей, а также глубиной и объективностью анализа причин отказов. Важно иметь в виду, что недостоверные первичные данные невозможно улучшить даже самой тщательной статистической обработкой.

18.2.7. Формы учетных документов. Наиболее распространенными учетными документами при экспериментальных оценках надежности являются аппаратный журнал и карточка учета неисправности.

Целесообразно, чтобы аппаратный журнал служил не только для учета работки, включений, выключений и фиксации нарушений работоспособности изделия, но и рабочим дневником испытателя. Журнал является первичным документом, в котором в хронологическом порядке отражается состояние изделия, все проводимые в процессе испытаний или эксплуатации работы, а также все замечания обслуживающего персонала по качеству функционирования, удобства обслуживания и ремонта и т.п. Записи в аппаратном журнале служат, как

Карточка №			
1	2	14	15
3		16	
4		17	18
5		19	
6	7	20	21
8	9	22	23
	10		
	11		
12	24	25	
13		26	

Рис. 18.2. Форма бланка карточки учета неисправности:

1 — шифр изделия; 2 — заводской номер изделия; 3 — внешние признаки, по которым обнаружена неисправность; 4 — способ обнаружения неисправности; 5 — режим работы изделия в момент возникновения неисправности; 6 — наработка к моменту возникновения неисправности; 7 — температура окружающей среды; 8 — способ устранения неисправности; 9—11 — время восстановления (поиска, устранения, послеремонтного контроля); 12 — причина возникновения неисправности; 13 — дата, время возникновения неисправности и подпись лица, проводившего заполнение левой части карточки; 14 — шифр отказавшего узла (блока); 15 — заводской номер отказавшего узла (блока); 16 — характер неисправности узла (блока); 17 — способ устранения неисправности узла (блока); 18 — время ремонта узла (блока); 19 — дата ремонта, фамилия, подпись; 20 — шифр отказавшего элемента (узла); 21 — заводской номер отказавшего элемента (детали); 22 — характер неисправности элемента (детали); 23 — дата ремонта элемента (детали), фамилия, подпись; 24 — заключение по неисправности изделия (результат классификации); 25 — подпись представителя службы эксплуатации (заказчика); 26 — подпись представителя разработчика

правило, основание для заполнения карточки учета неисправности. Примерная форма аппаратного журнала приведена на рис. 18.1.

Карточка учета неисправностей заполняется по данным аппаратного журнала с привлечением другой информации (в том числе из ремонтных органов) и представляет собой своеобразный протокол по каждой неисправности. Карточки являются весьма удобной формой накопления статистической информации, учитывая в особенности необходимость последующей сортировки и классификации отказов по различным признакам при первичной обработке результатов испытаний. Пример бланка карточки учета неисправности и расшифровка содержания его граф приведены на рис. 18.2.

18.3. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ОТКАЗОВ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЙ

18.3.1. Предварительные замечания. Получаемый в результате испытаний перечень нарушений функционирования представляет собой совокупность ситуаций очень разнородных как по причинам возникновения, так и по их влиянию на те или иные показатели надежности. В частности, например, в условиях совместных испытаний опытных образцов сложных изделий статистическая информация может быть в значительной степени засорена фактами нарушения исправности, не имеющими отношения к оцениваемому (или контролируемому) показателю надежности. Поэтому обработка результатов наблюдений при любой процедуре — определительной или контрольной — должна включать в качестве первого обязательного этапа этап предварительного качественного анализа. Основными задачами качественного анализа являются объединение и классификация информации.

18.3.2. Объединение информации. Важным средством увеличения объема статистической информации является объединение сведений об отказах и наработке однотипных изделий, полученных на разных этапах испытаний или на испытаниях, проводимых в разных климатических зонах страны. Однако объединение статистической информации наряду с формальным увеличением объема может значительно ухудшить качество информации, ее однородность. Поэтому возможность и целесообразность объединения информации должны быть обоснованы инженерными соображениями. В каждом конкретном случае перед испытаниями рекомендуется планировать возможность объединения статистической информации, а после испытаний исследовать полученную информацию на предмет отсутствия противоречий к объединению.

В условиях ограниченного объема статистической информации количественная оценка ее однородности по какому-либо статистическому критерию не может быть достаточно убедительной, поэтому основными средствами обеспечения достоверности экспериментальных оценок являются инженерный анализ условий изготовления и испытаний изделий и соответствующая классификация информации об отказах.

18.3.3. Классификация информации. В зависимости от целей анализа статистическую информацию можно классифицировать по разным признакам — по причинам, месту и способу восстановления, характеру влияния на работоспособность изделия, отношению к конкретным показателям надежности и т. д. С точки зрения задач экспериментальной оценки надежности наиболее важными считаются две группы классификации отказов — по причинам и по отношению к оцениваемым показателям надежности.

1. Классификация отказов по причинам возникновения. Группы, на которые классифицируются отказы по причинам возникновения, определяются в основном тем, какие мероприятия могут способствовать улучшению качества изделий. Выделяются следующие группы отказов:

конструкционные, определяемые качеством разработки изделия;

технологические, определяемые качеством технологической документации и технологического оснащения производства;

производственные, обусловленные нарушениями требований технологии при изготовлении;

эксплуатационные, обусловленные эксплуатацией изделия в режимах и условиях, не предусмотренных технической документацией.

Для программно управляемых изделий кроме перечисленных могут быть выделены еще две группы нарушений функционирования, которые внешне проявляются как отказы: алгоритмические и программные.

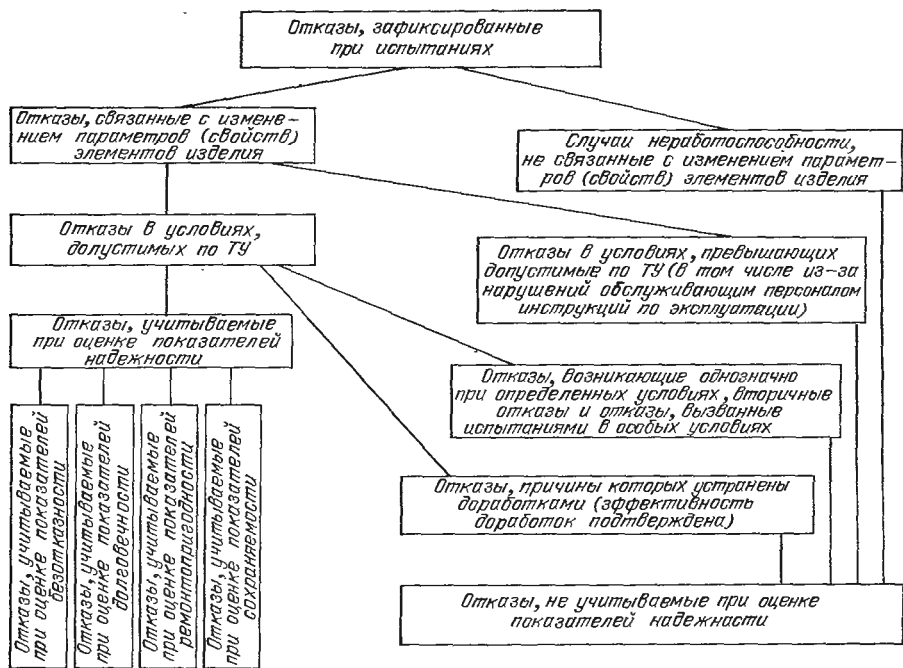


Рис. 18.3. Классификация отказов

В результате ошибок или недоработок в алгоритмах или программах даже совершенно исправное изделие при некоторых условиях не в состоянии выполнить свои функции. Для таких отказов характерно то, что они проявляются одинаково во всех экземплярах изделий при возникновении соответствующих условий.

2. Классификация отказов по отношению к оцениваемым показателям надежности. При классификации отказов по отношению к оцениваемым показателям надежности все отказы разделяются на «учитываемые» и «неучитываемые». При этом к неучитываемым относятся:

отказы, вызванные внешними воздействиями, не предусмотренными в технической документации на изделие, а также из-за нарушений инструкций по эксплуатации;

отказы опытных образцов, причины которых устраняются в процессе доработок;

отказы, связанные с проведением специальных экспериментов;

отказы, не влияющие на конкретный оцениваемый показатель.

Схема, поясняющая принцип классификации отказов по отношению к показателям надежности, представлена на рис. 18.3.

18.3.4. Характерные ошибки при организации испытаний, сборе и первичной обработке статистической информации. Общие правила проведения испытаний,

содержащие четкие и подробные инструкции по всем вопросам испытаний, являясь необходимой предпосылкой получения достоверных данных о надежности. Ниже приведены примеры некоторых характерных ошибок.

1. Отклонения от установленных правил ремонта. Эта ошибка проявляется чаще всего в использовании инструментов, принадлежностей и ремонтного оборудования, не предназначенных для восстанавливаемого изделия, а также в нарушении установленного документацией порядка восстановления изделия. Например, вместо замены отказавшего сменного элемента (узла) запасным предпринимают его ремонт непосредственно на месте. Восстановление работоспособности изделия при этом существенно усложняется и затягивается. В связи с этим необходимо подчеркнуть, что при оценке показателей ремонтпригодности вся стратегия ремонта, предложенная разработчиком в эксплуатационной документации вместе с ремонтным оборудованием и комплектом ЗИП, является таким же объектом испытаний, как и само изделие.

2. Отклонения от установленных режимов регламентных работ. Возможны отклонения в сторону как сокращения, так и увеличения объемов регламентных работ по отношению к предусмотренным документацией. Например, часть предусмотренных регламентных работ может не проводиться из-за дефицита времени или отсутствия соответствующего персонала. Полученные в этих условиях результаты могут существенно отличаться от тех, которые были бы получены при установленной системе технического обслуживания.

3. Ошибки при классификации отказов. Эти ошибки наиболее распространены. Не считая случаев искажений, обусловленных чисто ведомственными интересами, ошибки классификации в основном являются следствием неправильной интерпретации тех или иных классификационных признаков в конкретной ситуации. (Например, бывает трудно отличить случайное нарушение инструкции обслуживающим персоналом от естественной ошибки, обусловленной эргономическим несовершенством изделия или низким качеством эксплуатационной документации.)

Распространенной ошибкой является преждевременное (не подтвержденное последующими испытаниями) исключение из расчета отказов, по которым проведены доработки. Такие отказы можно исключать только в том случае, когда доработка исключает возможность их появления в принципе.

Следующая характерная ошибка: в группу неучитываемых заносят все отказы, выявленные во время регламентных работ, мотивируя это тем, что регламентные работы предназначены для выявления скрытых отказов. При этом в оценках надежности не учитываются и отказы, накопившиеся в межрегламентный период, что существенно завышает все оценки. К неучитываемым в данном случае можно относить лишь те ситуации, когда при регламентных работах выявляются и устраняются «потенциальные» отказы специальными методами прогнозирования отказов. Ошибкой классификации является и исключение из расчета отказов, самоустраняющихся при поиске и ремонте.

Наконец, часто встречающейся ошибкой является отнесение к учитываемым отказов, не имеющих отношения к оцениваемому показателю надежности. Примерами таких ситуаций могут быть остановки вычислительных устройств из-за недоработок алгоритмов или программ, случаи брака продукции или остановки автоматических линий при определенных отклонениях физико-химических свойств сырья или параметров заготовок (внешне такие отказы выглядят как нарушения нормальной работы изделия).

Необходимо также иметь в виду, что учет или неучет того или иного отказа зависит и от того, какой конкретно показатель надежности оценивается. Например, отказ в условиях, недопустимых по ТУ, не учитывается при оценке показателей безотказности, но может быть учтен при оценке показателей ремонтпригодности, если при таком отказе производятся те же манипуляции по восстановлению (ремонт, замена), что и при отказе в номинальных режимах.

ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

19.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Результаты испытаний (наблюдений), очищенные предварительной обработкой, подлежат статистической обработке. Статистическая обработка сводится к оценке параметров функций распределения случайных величин, определяющих искомые показатели надежности, т.е. к традиционной задаче математической статистики.

Возможность и целесообразность использования того или иного метода обработки, трудоемкость обработки и качество получаемых оценок существенно зависят от типа оцениваемого показателя надежности, объема априорных сведений о наблюдаемой случайной величине, характера статистического материала, который подлежит обработке.

При экспериментальной оценке показателей надежности многие задачи независимо от конкретного содержания имеют одинаковый алгоритм решения, так как для этапа статистической обработки не существенно:

какое из свойств исследуется — безотказность, долговечность, ремонтпригодность или сохраняемость;

обрабатываются ли результаты испытаний (специальных или совмещенных) или результаты наблюдений в процессе эксплуатации;

производится восстановление отказавших изделий или их замена новыми;

какими единицами измеряется наработка — количеством часов, циклов работы, срабатываний, банок, отливок, отпечатанных знаков и т.п., мерами длины (провода, пружины, пробега автомобиля) или мерами объема (жидкости, раствора, грунта).

Ниже рассматриваются наиболее существенные для этапа статистической обработки факторы:

типы оцениваемых показателей надежности;

характер априорных сведений о наблюдаемой случайной величине;

характер статистического материала при различных стратегиях испытаний.

19.2. ТИПЫ ОЦЕНИВАЕМЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ

При экспериментальных оценках надежности независимо от того, какое свойство исследуется, все многообразие оцениваемых показателей сводится к показателям двух типов:

показатели типа наработки — средняя или γ -процентная (наработка до отказа, между отказами, до предельного состояния, срок сохраняемости, время восстановления и т.п.);

показатели типа вероятности (безотказной работы, исправного состояния в произвольный момент, восстановления за заданное время и т.д.).

При определении показателей типа наработки непосредственно наблюдаемыми величинами являются случайные интервалы — наработки до отказа, между отказами, до предельного состояния, времени восстановления, времени хранения до отказа и т.п.

При определении показателей типа вероятности непосредственно наблюдаемыми случайными величинами являются числа событий в испытаниях — число отказов, число восстановлений, число предельных состояний и т.д.

С точки зрения характера априорных сведений о функции распределения все многообразие практических задач сводится по существу к следующим двум вариантам.

1. Вид функции распределения наблюдаемой случайной величины известен априори. Задача статистической обработки — получение оценок для показателей надежности с учетом вида функции распределения и характера изменяющегося статистического материала.

2. Вид функции распределения наблюдаемой случайной величины неизвестен или известен лишь предположительно. В этом случае на основании анализа процессов, приводящих к отказам, опыта эксплуатации аналогичных изделий и предварительного анализа полученной при испытаниях информации (например, по виду гистограммы) принимается некоторая гипотеза о виде функции распределения. Задача обработки — проверить, не противоречат ли экспериментальные данные принятой гипотезе, и оценить параметры этой функции распределения.

В такой постановке необходима подробная информация о наблюдаемой случайной величине, а процесс статистической обработки более сложен и трудоемок. В этом случае процесс статистической обработки в качестве обязательных должен включать следующие этапы:

- построение вариационного ряда;

- построение гистограммы;

- принятие гипотезы о виде функции распределения;

- оценка точечных значений параметров (для функции распределения предполагаемого типа);

- проверка непротиворечивости экспериментальных данных принятой гипотезы о функции распределения;

- в случае положительных результатов предыдущего этапа может быть проведена оценка интервальных значений параметров функции распределения (показателей надежности); в случае отрицательных результатов процедуры проверки гипотезы процесс статистической обработки повторяется, начиная с этапа принятия гипотезы при другом предположении о виде функции распределения.

Если вид функции распределения не отвергнут результатами проверки, то в остальном процедуры определения точечных и интервальных оценок параметров в обоих вариантах постановок задач практически совпадают.

Особым является случай, когда оценка параметров распределения не производится — требуется оценить непосредственно значение функции распределения в некоторой фиксированной точке, т.е. оценить показатель типа вероятности. Например: вероятность отказа или безотказной работы для фиксированной наработки; вероятность восстановления или невозможности восстановления за фиксированное время; вероятность наступления предельного состояния при заданной наработке; вероятность сохранения или несохранения определенных показателей качества при хранении в течение заданного времени. Задача такого типа в математической статистике носит название непараметрической.

Этот случай является наиболее простым с точки зрения организации испытаний (наблюдений), трудоемкости сбора и статистической обработки информации. В этом случае испытания каждого изделия проводятся в течение фиксированного времени (наработки) не обязательно по всем изделиям одновременно. Контроль функционирования может быть осуществлен только перед началом и по окончании испытаний. Подлежащие статистической обработке результаты испытаний при этом представляют собой только два числа — общее число испытаний фиксированной длительности (число опытов) и число успешных или неуспешных опытов. Естественно, что при этом получаемая в результате статистической обработки оценка несет лишь минимальную информацию — значение функции

распределения в единственной точке, соответствующей фиксированной наработке при испытаниях (наблюдениях). За исключением полученного значения функции, в этой точке мы не имеем никакой информации и не имеем права экстраполировать оценку для других значений наработки.

19.4. ХАРАКТЕР СТАТИСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СТРАТЕГИЯХ ИСПЫТАНИЙ

19.4.1. Типы случайных величин, составляющих выборку. На практике в большинстве случаев нет возможности так организовать испытания, чтобы получить экспериментальные данные по надежности необходимого вида и в достаточном объеме. Обычно задача заключается в том, чтобы оценить показатели надежности по тому статистическому материалу, который имеется. На характер статистического материала существенное влияние оказывает стратегия испытаний (или режим эксплуатации), а именно следующие факторы:

- число изделий, подвергаемых испытаниям;
- порядок контроля функционирования в процессе испытаний (наблюдений);
- порядок восстановления (замены) изделий;
- порядок поступления изделий на испытания;
- критерий окончания испытаний (наблюдений).

Реально перечисленные факторы могут существенно варьироваться в зависимости от конкретных условий, например;

- испытания одного изделия или группы изделий;
- контроль непрерывный или периодический либо только перед началом и по окончании испытаний;
- испытания с восстановлением (заменой) отказавших изделий либо без восстановления (замены);
- одновременное испытание всех изделий либо неодновременное;
- испытания до отказа всех изделий, либо до фиксированного числа отказов, либо до истечения фиксированного времени (наработки).

На практике различные сочетания этих факторов являются причиной большого разнообразия реальных стратегий испытаний.

В настоящее время общеприняты следующие условные обозначения основных факторов испытаний: N — число изделий; U — отсутствие замены или восстановления; R — замена отказавших изделий; M — восстановление отказавших изделий; T — испытания (наблюдения) оканчиваются по истечении фиксированного отрезка времени (наработки); r — испытания (наблюдения) оканчиваются по достижении фиксированного числа реализаций (отказов, восстановлений).

В этих обозначениях конкретная стратегия испытаний обычно записывается сочетанием трех соответствующих символов, например $[NUT]$, $[NRT]$ и т.д. При этом предполагается, что изделия подвергаются испытаниям одновременно и контроль осуществляется непрерывно. Поскольку на практике эти условия зачастую не выполняются, ниже используются дополнительно следующие обозначения для реальных стратегий испытаний.

Если изделия поступают на испытания неодновременно или снимаются с испытаний в произвольные моменты по каким-либо посторонним причинам, то такие нежесткие стратегии обозначаются так же, но заключаются не в квадратные, а в круглые скобки. Если при испытаниях контроль производится периодически, через определенные интервалы времени (наработки), то соответствующее условное обозначение заключается в двойные скобки (круглые или квадратные), например $((NUT))$ — испытываются N изделий, отказавшие изделия не заменяются и не восстанавливаются, контроль производится периодически, испытания оканчиваются по истечении фиксированного отрезка времени (наработки), изделия могут поступать на испытания или сниматься с испытаний по каким-то причинам в произвольные моменты времени.

Наконец, испытания по так называемой непараметрической схеме, когда каждое из N изделий испытывается в течение фиксированной наработки T , а контроль производится только перед началом и по окончании испытаний, обозначаются фигурными скобками: $\{NUT\}$. Эта схема испытаний является предельным случаем периодического контроля. При таком контроле отказавшие изделия выявляются только после окончания испытаний, следовательно, вопрос о замене или восстановлении отказавших изделий в процессе испытаний не возникает.

Перечисленные выше факторы испытаний и соответствующие условные обозначения сведены в табл. 19.1. Классификация стратегий испытаний в условных обозначениях табл. 19.1, учитывая в основном организационный аспект испытаний (наблюдений), не отражает однозначно характер получаемого статистического материала. Между тем при некоторых формально различных стратегиях испытаний характер статистического материала получается одинаковым, и, следовательно, количество типов выборок в действительности существенно меньше количества стратегий испытаний.

С точки зрения характера статистического материала при любых стратегиях испытаний получаются только три типа случайных величин (реализаций), составляющих выборку:

1) наработки до отказа (или наработки между отказами, или наработки до предельного состояния, или время от начала до окончания восстановления, или время хранения до отказа);

Таблица 19.1

Факторы, характеризующие стратегию испытаний,
и их условные обозначения

Фактор, характеризующий стратегию испытаний		Условное обозначение
Число испытываемых изделий	Одно	1
	Более одного	N
Возможность восстановления (замены) изделий при испытаниях	Не восстанавливаются и не заменяются	U
	Не восстанавливаются, но заменяются	R
	Восстанавливаются	M
Критерий прекращения испытаний	Наработка	T
	Число отказов	r
	Наработка или число отказов	r, T
Порядок поступления изделий на испытания	Одновременно	[]
	Неодновременно	()
Режим контроля функционирования изделий при испытаниях	Непрерывно	[] или ()
	Периодически	[] или (())
	Только перед началом и по окончании испытаний	{ }

2) безотказные наработки; 3) наработки к моменту контроля, при котором обнаружен отказ (в случае отсутствия непрерывного контроля).

С учетом реального смысла этих величин ниже они называются соответственно: полные реализации, неполные реализации, условные реализации — и имеют следующие графические обозначения: — $\times$ — полная реализация; — $\bullet$ — неполная реализация; — | — условная реализация.

Если испытания (наблюдения) ведутся до фиксированного числа отказов, то отказ, совпадающий с моментом окончания испытаний, отмечается дополнительно кружком и соответствующая полная реализация обозначается — $\otimes$. В этих обозначениях результат любого испытания на надежность (выборка) может быть представлен графически соответствующим набором реализаций — диаграммой реализаций. Такая диаграмма наглядно и однозначно отражает специфику получаемого статистического материала (тип выборки). При этом оказывается возможным выявить ряд типовых диаграмм реализаций, к которым сводятся результаты многих реальных стратегий испытаний.

19.4.2. Типы диаграмм реализаций. В крупном плане экспериментальные данные разделяются на два типа: тип 1 — экспериментальные данные, получаемые при стратегиях с непрерывным контролем; тип 2 — экспериментальные данные, получаемые при стратегиях с периодическим контролем.

Диаграммы реализаций для испытаний (наблюдений) с непрерывным контролем представлены в табл. 19.2. В частности, при стратегии $[NUN]$ результаты испытаний содержат только полные реализации, причем момент последнего отказа является моментом окончания испытаний. Получаемая при этом выборка (тип 1А) является примером экспериментальных данных классического типа — «полная выборка». Неодновременное поступление изделий на испытания (эксплуатацию) в данном случае не вносит принципиальных изменений в характер получаемой информации, так как при данной стратегии «по определению» каждое изделие, будучи поставлено на испытания, испытывается (или наблюдается) до отказа. Аналогичные по характеру результаты (r полных реализаций) получаются и при стратегии $[1Rr]$ — испытания одного изделия с восстановлением до фиксированного числа отказов r .

При стратегии $[NUT]$, если, например, N_1 изделий отказали, то результаты испытаний содержат N_1 полных реализаций, значения которых не превышают длительности испытаний T и $N - N_1$ одинаковых неполных реализаций (выборка типа 1Б). Такой же характер имеет выборка типа 1В, с той лишь разницей, что в этом случае момент окончания испытаний совпадает с моментом отказа. Выборки типов 1Б и 1В являются примерами так называемой усеченной выборки или, точнее, однократно усеченной сверху. Как видно из табл. 19.2, наиболее общим случаем для испытаний с непрерывным контролем являются выборки типов 1Г и 1Д — многократно усеченные выборки.

Результаты классификации экспериментальных данных для испытаний с периодическим контролем функционирования представлены в табл. 19.3. Если при испытаниях непрерывный контроль отсутствует, то непосредственно зафиксировать момент очередного отказа невозможно. Следовательно, основная особенность экспериментальных данных типа 2 состоит в том, что они содержат только условные и неполные реализации. Значения условных реализаций в этом случае определяются наработкой к моменту контроля, при котором обнаружен отказ. Значения неполных реализаций определяются безотказной наработкой каждого из испытываемых изделий к моменту последнего контроля. Поскольку при периодическом контроле непосредственно зафиксировать момент очередного отказа невозможно, то невозможны, строго говоря, и стратегии с фиксированным числом отказов. Они сводятся в данном случае к стратегиям с фиксированной наработкой.

Предельным случаем периодического контроля является стратегия $\{NUT\}$, при которой контроль функционирования производится только перед началом и

Типы экспериментальных данных при непрерывном контроле функционирования

Условное обозначение стратегии испытаний	Схема процесса испытаний	Диаграмма реализаций	Условное обозначение типа диаграммы (тип выборки)	Стратегии, дающие аналогичные диаграммы
[NUN]			1А	[1Mr] [1Rr] (NUN)
[NUT]			1Б	(NUT)
[NUr]			1В	—
[NRT]			1Г	[NMT] (NMT) (NRT)
[NRr]			1Д	[NMr] (NMr) (NRr) (NUR)

Типы экспериментальных данных при периодическом контроле функционирования

Условное обозначение стратегии испытаний	Схема процесса испытаний	Диаграмма реализаций	Условное обозначение типа диаграммы (тип выборки)	Стратегии, дающие аналогичные диаграммы
$[[NUN]]$			2А	$[[NM_r]]$ $[[1R_r]]$ $((NUN))$ $((NM_r))$
$[[NUT]]$			2Б	$[[NU_r]]$ $((NUT))$
$[[NRT]]$			2В	$[[NR_r]]$ $[[NMT]]$ $((NR_r))$ $((NMT))$ $((NRT))$ $((NU_r))$
$\{NUT\}$			2Г	—

по окончании испытаний. В данном случае испытания состоят из одного межконтрольного периода длительностью T , и, следовательно, результаты испытаний содержат условные и неполные реализации одинаковой величины T .

Заметим в заключение, что комбинированные стратегии $[NU(r, T)]$, $[NR(r, T)]$, $[NM(r, T)]$ не вносят каких-либо особенностей в характер информации. Они дают информацию того или иного типа в пределах изложенной классификации в зависимости от того, как конкретно оканчиваются испытания — по достижении определенного числа отказов или по достижении определенной наработки.

Напомним, что здесь рассмотрены экспериментальные данные, получаемые при испытаниях на безотказность. При этом статистический материал отличается

наибольшим разнообразием. Примерно такой же характер имеют экспериментальные данные, получаемые при исследовании показателей долговечности.

Оценка показателей ремонтпригодности имеет ряд особенностей, существенно влияющих на характер получаемого статистического материала. Во-первых, в большинстве случаев существует возможность введения искусственных неисправностей, и, поскольку время восстановления обычно существенно меньше, чем время безотказной работы, гораздо проще набрать необходимое число реализаций. Во-вторых, данные о времени восстановления обычно содержат информацию о моменте начала и моменте окончания восстановления, что соответствует случаю непрерывного контроля при исследовании показателей безотказности. Поэтому в экспериментальных данных отсутствуют условные и неполные реализации. Следовательно, при оценке показателей ремонтпригодности приходится иметь дело, как правило, с выборкой типа 1А.

При исследовании показателей сохраняемости характерны данные типа 2, так как контроль исправности изделия в условиях хранения может быть осуществлен, как правило, только периодически.

Ниже вопросы практического использования различных методов статистической обработки излагаются на примере оценки показателей безотказности, поскольку в этом случае получаемые статистические данные имеют наиболее сложный вид. Однако изложенное, если это специально не оговорено, в одинаковой мере относится и к оценке соответствующих показателей долговечности, сохраняемости и ремонтпригодности.

19.5. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ ОЦЕНОК

19.5.1. Предварительные замечания. Известные методы точечных оценок можно условно разделить на две группы:

аналитические (метод максимального правдоподобия, метод моментов, метод квантилей и др.);

графические (с использованием вероятностных бумаг и номограмм).

При обработке конкретных результатов испытаний очень существенным является вопрос применимости и критериев предпочтения того или иного метода.

Известно, что формальными критериями качества точечных оценок являются: состоятельность, несмещенность, эффективность. Напомним, что оценка считается состоятельной, если она сходится (по вероятности) к истинному значению оцениваемого параметра с увеличением объема выборки. Оценка называется несмещенной, если ее математическое ожидание равно истинному значению оцениваемого параметра. Несмещенность означает отсутствие систематической ошибки. Из двух состоятельных и несмещенных оценок лучшей является та, которая имеет меньшую дисперсию. Оценка считается эффективной, если она обладает наименьшей дисперсией по сравнению с любыми другими несмещенными оценками.

Ясно, что лучшей является состоятельная несмещенная и эффективная оценка, однако такие оценки могут быть получены не для всех статистических данных. Поэтому выбор метода оценки не всегда диктуется соображениями ее качества, а во многих случаях — теми данными, которыми мы располагаем: наличием априорных сведений о функции распределения и характером полученного статистического материала (типом выборки). При выборе методов оценки необходимо также иметь в виду следующее обстоятельство.

Характерной особенностью работ при экспериментальной оценке показателей надежности является повышенная опасность грубых ошибок. Как показывает практика, такие ошибки возникают даже при корректном (формально) использовании строгого аналитического аппарата и в силу этого остаются в большинстве случаев неосознанными. В частности, для статистической информации о надежности сравнительно высока вероятность попадания в выборку аномальных реализаций — либо как результат ошибки, например, в фиксации момента от-

каза, либо как результат ошибки при классификации отказов. Поскольку результаты анализа статистические методы оценок исходят из доверия к каждому элементу выборки, они, естественно, не чувствительны к такому засорению. Напротив, универсальность и наглядность графических методов позволяют исключить, по крайней мере, грубые ошибки. Поэтому применительно к обработке результатов испытаний на надежность в условиях малого объема статистической информации, низкой ее достоверности и лишь ориентировочных сведений о виде распределения исследуемой случайной величины графические методы приобретают особое значение.

19.5.2. Методы определения точечных оценок при наличии априорных сведений о виде функции распределения. Если вид функции распределения априори известен, то для получения точечных оценок параметров распределений и показателей надежности может быть использован один из методов, описанных ниже. Распределения, наиболее часто используемые в практике надежности, представлены в табл. 19.4.

1. Метод моментов. Идея метода моментов состоит в том, что моменты распределения, зависящие от неизвестных параметров, приравниваются к эмпирическим моментам. Взяв число моментов равным числу неизвестных параметров, получаем необходимое число уравнений.

Использование метода моментов основано на том, что если число отказов n достаточно велико, то в силу закона больших чисел значения эмпирических моментов близки к теоретическим.

Эмпирическим моментом k -го порядка называется величина

$$I_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^k, \quad (19.1)$$

где t_i — зафиксированные при испытаниях наработки между отказами (полные реализации); n — объем выборки (число полных реализаций).

Например, для двухпараметрического распределения Вейбулла — Гнеденко имеющего

$$f(t, a, b) = \frac{b}{a^b} t^{b-1} e^{-(t/a)^b}, \quad (19.2)$$

первый и второй начальные моменты определяются выражениями:

$$m_1 = a \Gamma(1 + 1/b); \quad (19.3)$$

$$m_2 = a^2 \Gamma(1 + 2/b). \quad (19.4)$$

Тогда для нахождения оценок $\hat{a}$ и $\hat{b}$ параметров распределения Вейбулла — Гнеденко можно с учетом (19.1) составить следующие два уравнения:

$$\hat{a} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\hat{b}}\right) = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n}; \quad (19.5)$$

$$\hat{a}^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\hat{b}}\right) = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^2}{n}. \quad (19.6)$$

Оценки параметров некоторых распределений, полученные методом моментов, представлены в табл. 19.5.

Основные характеристики наиболее распространенных распределений

Характеристика	Распределение				
	экспоненциальное	нормальное	логарифмически-нормальное	Вейбулла—Гнеденко	гамма
$E(t)$ —функция распределения	$1 - e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^Z e^{-\frac{u^2}{2}} du,$ $Z = (t - a)/\sigma$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^Z e^{-\frac{u^2}{2}} du,$ $Z = (\ln t - \mu)/\sigma$	$1 - e^{-(t/a)^b}$	$1 - e^{-\frac{t}{\beta}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(-\frac{t}{\beta}\right)^i$
$f(t)$ —плотность распределения	$\lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-a}{\sigma}\right)^2}$ $-\infty < t < \infty$	$\frac{1}{\sigma t\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)^2}$ $0 < t \leq \infty$	$\frac{b t^{b-1}}{a^b} e^{-(t/a)^b}, t \geq 0$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1) \beta^{\alpha+1}} t^{\alpha} e^{-t/\beta},$ $\alpha > -1, \beta > 0, 0 < t < \infty$
M —математическое ожидание	$\frac{1}{\lambda}$	a	$e^{\mu + \sigma^2/2}$	$a \Gamma\left(\frac{1}{b} + 1\right)$	$\beta(\alpha + 1)$
D —дисперсия	$\frac{1}{\lambda^2}$	σ^2	$e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$	$a^2 \left[\Gamma\left(\frac{2}{b} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{b} + 1\right) \right]$	$\beta^2(\alpha + 1)$
M_0 —мода $f'(t)=0$	—	a	$e^{\mu - \sigma^2}$	$a(1 - 1/b)^{1/b}$	$\alpha\beta$
Me —медиана	$0,69 \frac{1}{\lambda}$	a	e^{μ}	$a(\ln 2)^{1/b}$	$e^{-\frac{t}{\beta}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{t}{\beta}\right)^i = 0,5$
$M_{\max}$ —95%-ная квантиль, $F(M_{\max})=0,95$	$3 \frac{1}{\lambda}$	$a + 1,645\sigma$	$e^{(\mu + 1,645\sigma)}$	$a(\ln 20)^{1/b}$	$e^{-\frac{t}{\beta}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{t}{\beta}\right)^i = 0,95$

Оценки параметров некоторых распределений, полученные методом моментов

Вид распределения	Оценки параметров
Экспоненциальное	$\hat{\lambda} = 1/\hat{T}$
Нормальное	$\hat{a} = \hat{T}, \hat{\sigma} = \sqrt{S^2}$
Логарифмически-нормальное	$\hat{\mu} = \hat{u}, \hat{\sigma} = \sqrt{v^2}$

В таблице приняты следующие обозначения:

$$\hat{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \text{ — первый выборочный момент;}$$

$$S^2 = \frac{n \sum_{i=1}^n t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2}{n^2} \text{ — выборочная дисперсия;}$$

$$\hat{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln t_i \text{ — выборочное среднее для логарифмических распределений;}$$

$$v^2 = \frac{n \sum_{i=1}^n (\ln t_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \ln t_i \right)^2}{n(n-1)} \text{ — выборочная дисперсия для логарифмических распределений.}$$

Выше метод моментов рассмотрен применительно к выборке, содержащей только полные реализации (выборка 1А). Аналогично может быть обработана выборка, содержащая только условные реализации (выборка 2А). Метод моментов весьма прост в реализации, однако получаемые этим методом оценки не эффективны и, следовательно, могут быть использованы только при объемах выборки (числе полных реализаций) не менее 30. При применении метода моментов к усеченной выборке для оценки параметров используются только полные реализации, что, очевидно, приводит к систематической ошибке (занижению) оценок относительно истинного значения параметра.

2. Метод квантилей. Для получения оценок параметров методом квантилей используют так же, как и в методе моментов, уравнения, в которых квантиль теоретического распределения приравнивается к эмпирической квантили. При этом используется столько эмпирических квантилей и соответственно уравнений, сколько параметров необходимо оценить.

Например, для оценок $\hat{a}$ и $\hat{b}$ распределения Вейбулла—Гнеденко применяются следующие два уравнения:

$$1 - e^{-(t_1/\hat{a})^{\hat{b}}} = F_1; \quad (19.7)$$

$$1 - e^{-(t_2/\hat{a})^{\hat{b}}} = F_2, \quad (19.8)$$

где $\hat{a}$, $\hat{b}$ — искомые оценки a и b распределения Вейбулла — Гнеденко; t_1, t_2 — квантили эмпирической функции распределения; F_1, F_2 — значения эмпирической функции распределения, соответствующие квантилям t_1 и t_2 .

Оценки параметров некоторых распределений, полученные методом квантилей

Вид распределения	Оценки параметров
Вейбулла — Гнеденко	$\hat{b} = \frac{\ln \ln F_2 - \ln \ln F_1}{\ln \frac{t_2}{t_1}}, \quad \hat{a} = \frac{t_1}{(-\ln F_1)^{\frac{1}{\hat{b}}}}$
Экспоненциальное	$\hat{\lambda} = -\ln F_1 / t_1$
Нормальное	$\hat{a} = \frac{\Phi^{-1}(F_1) t_2 - \Phi^{-1}(F_2) t_1}{\Phi^{-1}(F_1) - \Phi^{-1}(F_2)}, \quad \sigma = \frac{t_1 - \hat{a}}{\ln \ln F_1^{-1}}$

Решением уравнений (19.7) и (19.8) относительно значений $\hat{a}$ и $\hat{b}$ получаются соответствующие формулы для оценок (табл. 19.6).

В таблице приняты следующие обозначения:

t_1, t_2 — квантили эмпирической функции распределения;

F_1, F_2 — значения эмпирической функции распределения, соответствующие квантилям t_1 и t_2 ; $\Phi^{-1}(F_1), \Phi^{-1}(F_2)$ — квантили функций стандартного нормального распределения, соответствующие уровням F_1 и F_2 .

Ясно, что метод квантилей более универсален относительно типа выборки важно только уметь рассчитать для выборок различного типа значения эмпирической функции распределения (см. п. 19.5.3).

Однако оценки, получаемые методом квантилей, обладают значительной дисперсией. В частности, для нормального распределения, если в качестве оценки параметра a методом моментов принято выборочное среднее, а в качестве оценки того же параметра методом квантилей принята медиана выборки (50%-ная квантиль эмпирической функции распределения), то оценка, получаемая методом квантилей, в этом случае имеет в 1,6 раза большую дисперсию.

3. Метод максимального правдоподобия. Метод является универсальным и наиболее мощным с точки зрения эффективности оценок. Идея метода заключается в том, что для фиксированного результата эксперимента составляется функция правдоподобия, выражающая вероятность получить реализовавшийся в эксперименте результат. В качестве искомых точечных оценок принимаются значения параметров, максимизирующие функцию правдоподобия.

Пример 19.1. Обработка результатов непараметрических испытаний. Напомним, что при испытаниях по схеме $\{NUT\}$ мы располагаем только сведениями о количестве изделий, подвергнутых испытаниям, и количестве изделий, отказавших за время испытаний (выборка типа 2Г, табл. 19.3). Единственным показателем, который может быть оценен по такой выборке, является вероятность отказа за время испытаний q . Условия испытаний по схеме $\{NUT\}$, подробно описанные в § 19.3, соответствуют классической схеме независимых испытаний Бернулли.

Решение. Известно, что для схемы испытаний Бернулли, если в результате n опытов получено n отказов, то вероятность такого события, т. е. функция правдоподобия, определяется выражением

$$L(q) = C_N^n q^n (1 - q)^{N-n}, \quad (19.9)$$

которое при фиксированных N и n (результаты испытаний) есть функция, зависящая только от неизвестного параметра q .

Задача определения точечной оценки параметра q сводится к формальной процедуре отыскания координаты точки максимума функции (19.9). Обычно для упрощения операции дифференцирования функцию правдоподобия сначала логарифмируют. В рассматриваемом случае

$$\lg L = \lg C_N^n + n \lg q + (N - n) \lg (1 - q). \quad (19.10)$$

Затем

$$\partial \lg L / \partial q = n/q - (N - n)/(1 - q). \quad (19.11)$$

Тогда уравнение для оценки $\hat{q}$ запишется в виде

$$n/\hat{q} - (N - n)/(1 - \hat{q}) = 0, \quad (19.12)$$

откуда получаем искомую оценку максимального правдоподобия для параметра q :

$$\hat{q} = n/N. \quad (19.13)$$

Оценка, определяемая (19.13), является несмещенной и эффективной.

Пример 19.2. Многократно усеченная выборка. В результате испытаний по плану (NRT) получена выборка типа 1Д (табл. 19.2), содержащая n наработок до отказа (полных реализаций t_i) и l различных безотказных наработок (неполных реализаций τ_j).

Решение. Известно априори, что наработка на отказ испытываемых изделий подчиняется распределению Вейбулла—Гнеденко вида

$$F(t) = 1 - e^{-(t/a)^b} \quad (19.14)$$

с плотностью

$$f(t) = \frac{b}{a} \left(\frac{t}{a} \right)^{b-1} e^{-(t/a)^b}. \quad (19.15)$$

Логарифм функции правдоподобия для условий примера имеет вид

$$L = \sum_{i=1}^n \ln f(t_i) + \sum_{j=1}^l \ln [1 - F(\tau_j)] \quad (19.16)$$

или с учетом (19.15) и (19.16)

$$L = n \ln b - nb \ln a + (b-1) \sum_{i=1}^n \ln t_i - a^{-b} \left(\sum_{i=1}^n t_i^b + \sum_{j=1}^l \tau_j^b \right). \quad (19.17)$$

Для получения оценок параметров используется система уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial b} = 0. \quad (19.18)$$

Из (19.17) после дифференцирования и алгебраических преобразований получаем следующие выражения для оценок $\hat{a}$ и $\hat{b}$:

$$\hat{a} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \hat{t}_i^b + \sum_{j=1}^l \hat{\tau}_j^b}{n} \right)^{1/\hat{b}}; \quad (19.19)$$

$$1 + \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n \ln t_i = \frac{\hat{b} \left(\sum_{i=1}^n \hat{t}_i^b \ln t_i + \sum_{j=1}^l \hat{\tau}_j^b \ln \tau_j \right)}{\sum_{i=1}^n \hat{t}_i^b + \sum_{j=1}^l \hat{\tau}_j^b}. \quad (19.20)$$

Уравнение (19.20) решается методом последовательных приближений. При этом в качестве первого приближения для оценки $\hat{b}$ можно принять значение, получаемое методом моментов, или значение, получаемое графическим методом (см. п. 19.5.3). После определения $\hat{b}$ из (19.19) находится значение $\hat{a}$.

Метод максимального правдоподобия наилучшим образом использует всю информацию, содержащуюся в экспериментальных данных. Однако в ряде случаев получение оценок связано с необходимостью решения громоздких уравнений.

В отечественной практике оценки максимального правдоподобия для параметров наиболее распространенных распределений регламентированы государственными стандартами.

В заключение отметим, что достоверность оценок, получаемых любым из аналитических методов, существенно зависит от достоверности сведений о виде функции распределения исследуемой случайной величины. Поэтому даже в том случае, когда вид функции распределения считается априори известным, настоятельно рекомендуется прежде, чем использовать какую-либо из формальных процедур для точечных оценок параметров, провести проверку согласия опытного распределения с теоретическим (априори заданным) по вероятностной бумаге (см. п. 19.5.3).

19.5.3. Методы определения точечных оценок при отсутствии априорных сведений о виде функции распределения. Если вид функции распределения априори неизвестен, процедура статистической обработки должна предусматривать более детальное исследование выборки:

- построение вариационного ряда;
- построение гистограммы и функции интенсивности отказов (если позволяет объем выборки);
- оценка значений эмпирической функции распределения;
- предварительная оценка непротиворечивости экспериментальных данных принятому (гипотетическому) распределению по вероятностной бумаге;
- оценка точечных значений параметров (при положительном результате предыдущего этапа);
- оценка согласия опытного распределения с гипотетическим по количественному критерию.

Этот перечень свидетельствует, что в данном случае значительное место в статистической обработке занимает графическая интерпретация экспериментальных данных как весьма чувствительный инструмент исследования.

1. Вариационный ряд. Упорядоченный в порядке возрастания (неубывания) ряд значений случайных величин, составляющих выборку, называется вариационным рядом.

Пример 19.3. В результате испытаний по плану [NUN] получены следующие значения наработок до отказа — полных реализаций (в часах): 34, 101, 11, 69, 125, 24, 148, 13, 15, 103, 21, 29, 4, 38, 80, 35, 57, 3, 126, 56, 38, 9, 60 (выборка 1А).

Решение. Упорядочение реализаций, составляющих выборку в порядке возрастания, дает следующий вариационный ряд: 3, 4, 9, 11, 13, 15, 21, 24, 29, 34, 35, 38, 38, 56, 57, 60, 69, 80, 101, 103, 125, 126, 148.

Общее число членов вариационного ряда n (число элементов выборки) называется объемом выборки. В примере $n = 23$. Простейшими функциями элементов выборки являются так называемые порядковые статистики. В упорядоченном (вариационном) ряду i -й по порядку член называется i -й порядковой статистикой. Так, число 13 является в условиях примера пятой порядковой статистикой. Первый (наименьший) и последний (наибольший) члены вариационного ряда называются крайними порядковыми статистиками (число 3 и число 148). Разность между крайними порядковыми статистиками составляет размах V вариационного ряда.

В частности, в условиях примера 19.3 $V = 148 - 3 = 145$ ч. Центральная порядковая статистика вариационного ряда, т. е. член с номером $k = (n + 1)/2$, называется выборочной медианой. В рассмотренном примере медианой является 12-й член ряда ($\bar{Me} = 38$ ч). Если объем выборки n — четное число, то выборочная медиана определяется как среднее (полусумма) двух центральных порядковых статистик. При обработке результатов экспериментов широко употребляются также выборочное среднее и выборочная дисперсия, которые определяются по формулам:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad (19.21)$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (19.22)$$

Для рассматриваемой выборки $\bar{x} \simeq 52$ ч; $\bar{\sigma}^2 \simeq 1795$ ч.

Для статистических данных более сложного вида — усеченных выборок типа 1Б (1Д) составляется общий вариационный ряд, включающий как полные реализации, так и неполные, причем неполные реализации отмечаются каким-нибудь значком, например звездочкой.

Пример 19.4. При испытаниях по плану [NRT] кроме наработок до отказа — полных реализаций, представленных в примере 19.3, получены следующие безотказные наработки — неполные реализации (в часах); 7, 13, 18, 60, 60, 120, 150, 170, 170, 170, 170.

В этом случае общий вариационный ряд: 3, 4, 7*, 9, 11, 13, 13*, 15, 18*, 21, 24, 29, 34, 35, 38, 38, 56, 57, 60, 60*, 60*, 69, 80, 101, 103, 120*, 125, 126, 148, 150*, 170*, 170*, 170*, 170*.

При этом объем выборки n и размах вариационного ряда V вычисляются по полным реализациям, т. е. в данном случае остаются теми же, что и в примере 19.3. Общее число реализаций в такой выборке в дальнейшем будем обозначать через N , а число неполных реализаций через l . В данном случае $l = 11$, а $N = n + l = 34$. Для экспериментальных данных подобного общего вида удобно в качестве графического аналога вариационного ряда использовать ранжированную диаграмму реализаций, в которой полные реализации расположены в порядке возрастания, а затем неполные в порядке убывания величин реализаций. Ранжированная диаграмма для вариационного ряда примера 19.4 показана на рис. 19.1.

При испытаниях с периодическим контролем результаты получаются естественным образом группированными по интервалам контроля (выборки второго типа, табл. 19.3). В простейшем случае выборка содержит только условные реализации (тип 2А). Пример ранжированной диаграммы для группированных данных общего вида (выборка 2В) показан на рис. 19.2.

Вариационный ряд и диаграмма реализаций являются простейшими формами представления экспериментальных данных. Более информативны гистограмма и эмпирическая функция распределения.

2. Гистограмма. Для вычисления гистограммы используется вариационный ряд по следующему правилу:

размах вариационного ряда делится на k интервалов (не обязательно одинаковых);

для каждого из интервалов вычисляется значение

$$\bar{f}_i(x) = \frac{m_i}{n\Delta_i}, \quad (19.23)$$

где m_i , $i = 1, \dots, k$, — число членов вариационного ряда, попавших в i -й интервал; Δ_i — ширина интервала.

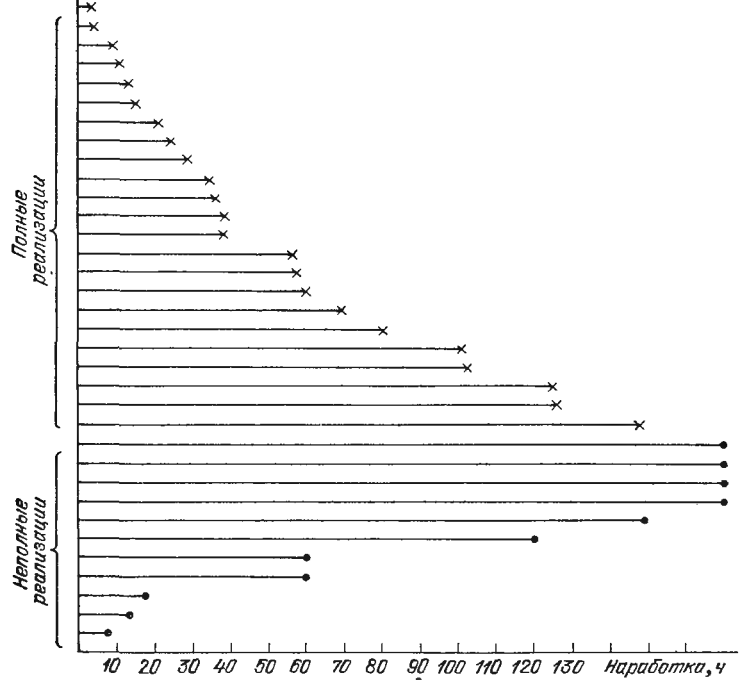


Рис. 19.1. Ранжированная диаграмма реализаций к примеру 19.4

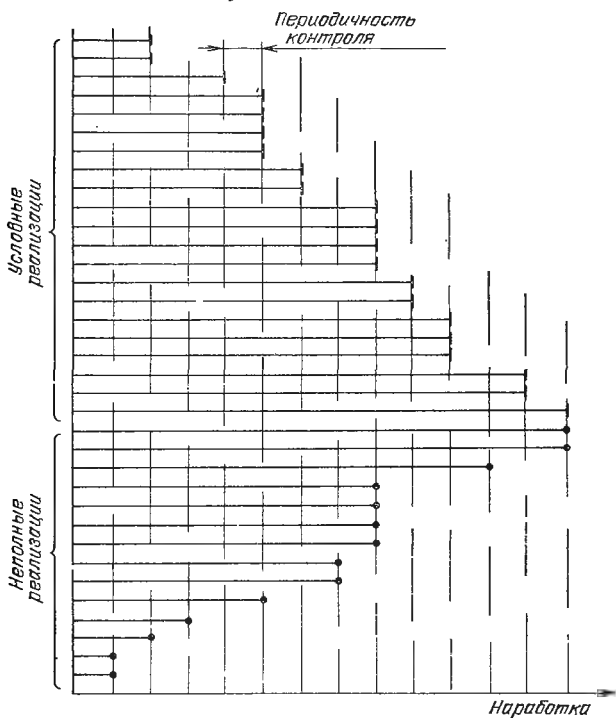


Рис. 19.2. Пример ранжированной диаграммы для выборки типа 2В

Графически гистограмма изображается рядом прямоугольников шириной Δ_i и высотой $\bar{f}_i(x)$. Гистограмма является важным вспомогательным средством при принятии гипотезы о виде функции распределения. Поэтому важно построить ее так, чтобы извлечь максимум необходимой информации. Дело в том, что форма гистограммы зависит от числа и величины интервалов разбиения. К сожалению, не существует правила, которое указывало бы оптимальное разбиение. Построение удачной гистограммы все еще остается предметом интуиции и искусства исследователя. Действительно, при слишком малом числе интервалов разбиения (интервал велик) плохо выявляются характерные особенности распределения. С ростом числа интервалов характерные особенности выявляются все лучше, но лишь до определенного предела. При слишком большом числе интервалов (интервал слишком мал) гистограмма снова теряет характерные особенности распределения, превращаясь в пределе (когда в каждом интервале не более одного значения x_i) в чередование «пустых» интервалов и одинаковых по высоте прямоугольников.

Число интервалов иногда определяют по формуле

$$k \simeq 1 + 3,3 \lg n, \quad (19.24)$$

где n — объем выборки.

Согласно этому правилу при объеме выборки до тысячи полных реализаций рекомендуемое число интервалов разбиения не превышает одиннадцати. Для объемов выборки $n < 50$, с которыми в основном приходится иметь дело при обработке результатов испытаний на надежность, вид гистограмм слишком чувствителен к способу разбиения, поэтому правило (19.24) можно использовать лишь как ориентировочное. В этих случаях рекомендуется построить несколько вариантов гистограмм для различных способов разбиения вариационного ряда — для $k = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ и т. д. Лучшей естественно считать гистограмму, имеющую меньшее число инверсий. Признаком инверсии считается изменение знака приращения высоты прямоугольника, определяемой выражением (19.23). Среди гистограмм с одинаковым числом инверсий лучшей следует считать ту, которая имеет большее число интервалов. Практически критерий инверсий реализуется следующим образом. Для каждого варианта гистограммы определяется средневзвешенное число инверсий h по правилу

$$h = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{k-1} (m_i + m_{i+1}) \xi_i,$$

где n — объем выборки; k — число интервалов разбиения для данного варианта гистограммы; m_i, m_{i+1} — числа элементов выборки в i -м и $(i+1)$ -м интервалах;

$\xi_i = \begin{cases} 0 & \text{при отсутствии инверсии при переходе от } i\text{-го к } (i+1)\text{-у интервалу,} \\ 1 & \text{при наличии инверсии при переходе от } i\text{-го к } (i+1)\text{-у интервалу.} \end{cases}$

Лучшей считается гистограмма, имеющая меньшее значение h , а при одинаковых h — гистограмма, имеющая большее число интервалов. Это правило позволяет учесть значимость инверсии — больший вес приписывается инверсии, приходящейся на область больших значений $\bar{f}(x)$.

В качестве примера на рис. 19.3 изображены гистограммы, построенные по данным примера 19.3 при разбиении размаха вариационного ряда соответственно на три, пять, семь, восемь, двенадцать и двадцать равных интервалов. Как видно из рисунка, существуют две гистограммы — при разбиении на три и на семь интервалов, удовлетворяющие критерию минимума инверсий (гистограммы не имеют инверсий). В качестве лучшей принимается гистограмма, имеющая семь интервалов (рис. 19.3, в). Правило (19.24) в данном случае дает для числа интервалов разбиения значение $k = 1 + 3,3 \lg 23 = 5,5$, т.е. рекомендует пять-шесть интервалов.

Иногда для построения гистограммы используется так называемый метод «равночастотных интервалов», смысл которого состоит в том, чтобы вместо деления размаха на k равных интервалов, объем выборки делился на k равных частей. При этом интервалы, естественно, различны. Значение k выбирается по правилу (19.24). Предполагается, что это позволяет рационально группировать данные при выборках небольшого объема.

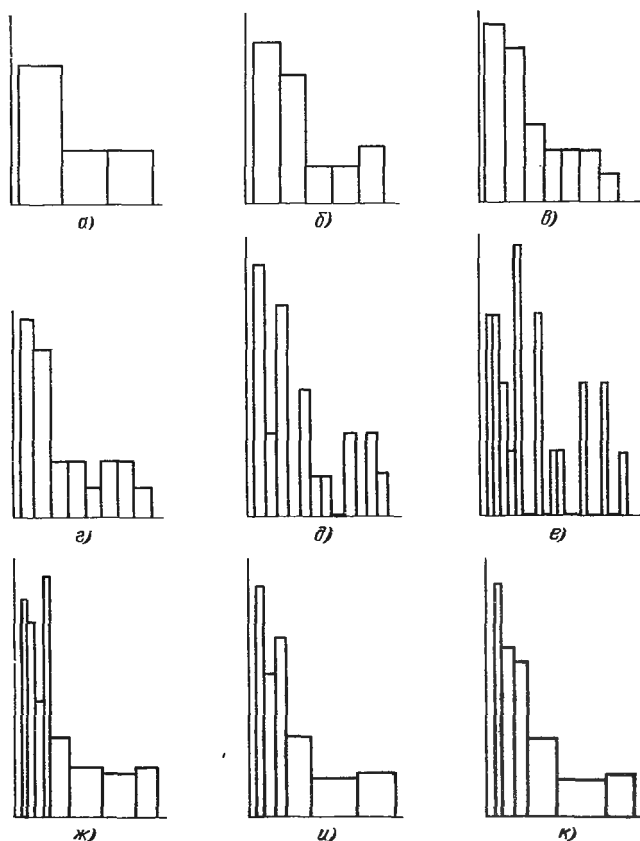


Рис. 19.3. Вид гистограмм при различных способах разбиения вариационного ряда (по данным примера 19.3)

Однако метод равночастотных интервалов не представляется наиболее предпочтительным в любом случае, так как он имеет некоторую неоднозначность, если объем выборки таков, что не может быть разделен на целое число равных частей. Эта неоднозначность тем чувствительнее, чем меньше объем выборки.

На рис. 19.3, ж, и для данных примера 19.3 приведены гистограммы, построенные методом равночастотных интервалов при числе отказов в каждом из интервалов три и четыре соответственно. Для сравнения на рис. 19.3, к приведена гистограмма, построенная по тем же данным, в которой, однако, «частоты» в интервалах скорректированы по критерию минимума инверсий. При этом количество реализаций в интервалах (начиная с первого) распределилось следующим образом: 5, 3, 3, 6, 3, 3. Сравнение гистограмм, приведенных на рис. 19.3, показывает, что для экспериментальных данных примера 19.3 при построении гистограмм любым методом можно найти наиболее удачное разбиение на интервалы.

Если принять в данном случае в качестве гипотезы экспоненциальное распределение, то меры расхождения по критерию χ^2 для гистограмм, приведенных на

рис. 19.3, составяют соответственно: 4,5; 4,5; 1,6; 4,6; 16,2; 66,2; 5,0; 3,1; 2,3, т. е. лучшее согласие дает гистограмма, представленная на рис. 19.3, в.

В случае усеченных выборок типа 1Б—1Г гистограмма рассчитывается по правилу

$$\bar{f}_i(x) = m_i / (N - l_i) \Delta_i, \quad (19.25)$$

где m_i — число полных реализаций вариационного ряда в интервале Δ_i ; Δ_i — ширина i -го интервала; N — общее число реализаций в выборке (число членов вариационного ряда); l_i — число неполных реализаций, не превышающих правой границы рассматриваемого интервала.

Изложенные выше рекомендации относительно разбиения вариационного ряда на интервалы остаются справедливыми и в данном случае.

Если объем выборки (число полных реализаций) $n < 20$, гистограмма не является информативной. Соответствующий этап обработки опускается. Для экспериментальных данных, группированных по интервалам контроля (см. табл. 19.3), при построении гистограммы можно воспользоваться естественными интервалами группирования. Осуществить разбиение выборки на меньшие интервалы невозможно, так как моменты отказов неизвестны. Единственной возможностью в данном случае является укрупнение интервалов путем объединения нескольких естественных интервалов группирования в один. С учетом этого все изложенные выше рекомендации относительно построения гистограмм остаются справедливыми и в данном случае, с той лишь разницей, что роль полных реализаций выполняют здесь условные реализации. При варьировании ширины интервала группирования (в сторону увеличения) может быть также использован критерий минимума инверсий. Если объем выборки (в данном случае число условных реализаций) не превышает 20, этап построения гистограммы опускается.

Если позволяет объем выборки (число полных или условных реализаций более 50), целесообразно построить эмпирическую функцию интенсивности отказов. Функция интенсивности отказов может дать важную дополнительную информацию для принятия гипотезы о виде функции распределения исследуемой случайной величины.

Для построения эмпирической функции интенсивности отказов используется разбиение вариационного ряда на интервалы, принятое при построении гистограммы. Значения функции интенсивности отказов для каждого интервала вычисляются по формуле

$$\bar{\lambda}_i = \frac{m_i}{(N - n_i - l_i) \Delta_i}, \quad (19.26)$$

где m_i — число полных или условных реализаций (членов вариационного ряда) в интервале Δ_i ; Δ_i — ширина i -го интервала; N — общее число реализаций в выборке; n_i — суммарное число полных или условных реализаций, не превышающих правой границы рассматриваемого интервала; l_i — суммарное число неполных реализаций, не превышающих правой границы рассматриваемого интервала.

3. Оценка значений эмпирической функции распределения (ЭФР). Оценка значений ЭФР по выборке состоит в том, что значения полных (или условных) реализаций, составляющих выборку (вариационный ряд), принимаются в качестве эмпирических квантилей, а значения функции распределения, соответствующие этим квантилям, рассчитываются. Для расчета значений ЭФР могут быть использованы различные функции выборки. В частности, для полной негруппированной выборки (тип 1А) простейшей оценкой эмпирической функции распределения является выражение

$$\hat{F}_i = i/n, \quad (19.27)$$

где i — порядковый номер члена вариационного ряда; n — общее число членов вариационного ряда.

Многие руководства рекомендуют использовать для оценки ЭФР математическое ожидание i -й порядковой статистики, определяемое выражением

$$\widehat{F}_i = i/(n + 1). \quad (19.28)$$

Эффективные и почти несмещенные оценки для значений ЭФР могут быть получены по правилу

$$\widehat{F}_i = (i - \alpha)/(n - \alpha - \beta + 1) \quad (19.29)$$

при следующих значениях коэффициентов α и β :

для распределения Вейбулла с параметром формы b

$$\alpha = 0,52 \left(\frac{b-1}{b} \right); \quad \beta = 0,5 - 0,2 \left(\frac{b-1}{b} \right);$$

для экспоненциального распределения $\alpha = 0; \beta = 0,5$;

для нормального распределения $\alpha = \beta = 0,375$.

Для выборки, однократно усеченной справа (тип 1Б), значения ЭФР могут быть вычислены по формулам (19.27), (19.28) или (19.29), с той лишь разницей, что вместо n подставляется N -суммарное число элементов выборки (полных и неполных реализаций).

Наиболее сложной является обработка многократно усеченной выборки (типов 1Г, 1Д). Для этого случая можно рекомендовать следующее правило, позволяющее использовать информацию, которую несут содержащиеся в выборке неполные реализации. Для каждой из полных реализаций выборки рекомендуется вычислять значения ЭФР по формуле

$$\widehat{F}_i = r_i/(N + 1), \quad (19.30)$$

где N — суммарное число элементов выборки (полных и неполных реализаций); r_i — условный ранг полной реализации, вычисляемый для каждой из полных реализаций по формуле

$$r_i = r_{i-1} + \frac{N+1-r_{i-1}}{M_i+1}; \quad r_0 = 0, \quad (19.31)$$

где M_i — суммарное число полных и неполных реализаций выборки, не меньших, чем значение рассматриваемой i -й реализации.

В тех случаях когда усложнения, связанные с вычислением условных рангов неоправданны, можно использовать упрощенную оценку ЭФР по формуле

$$\widehat{F}_i = i/(N - l_i + 1), \quad (19.32)$$

где i — порядковый номер соответствующей полной реализации в вариационном ряду (неполные реализации не нумеруются); l_i — суммарное количество неполных реализаций, меньших, чем рассматриваемая i -й реализация.

Может быть предложена следующая процедура несмещенного оценивания вероятности безотказной работы за время t_0 по результатам цензурированных испытаний (по усеченным выборкам).

Обозначим через d_j число неполных реализаций, т. е. испытаний, прекращенных в момент r_j (в момент наблюдения j -го отказа, либо в любой момент времени до $(j+1)$ -го отказа. Будем находить последовательно следующие величины, идя от конца испытаний к началу:

$$n_{(1)} = 1; \quad N_{(1)} = N - d - s - \Delta_d; \quad Q_{(1)} = \frac{n_{(1)}}{N_{(1)}}$$

(здесь d — число отказов (полных реализаций) в выборке, s — число неполных реализаций в выборке; Δ_d — число неполных реализаций в интервале между $(d-1)$ -м и d -м отказами);

$$n_{(2)} = n_{(1)} + 1 + Q_{(1)}\Delta_d; \\ N_{(2)} = N_{(1)} + 1 + \Delta_d; \quad Q_{(2)} = \frac{n_{(2)}}{N_{(2)}}$$

$$n_{(k)} = n_{(k-1)} + 1 + Q_{(k-1)} \Delta_{d-k+2};$$

$$N_{(k)} = N_{(k-1)} + 1 + \Delta_{d-k+1}; \quad Q_{(k)} = \frac{n_{(k)}}{N_{(k)}}.$$

Искомая оценка имеет вид

$$\widehat{P}(t_0) = 1 - Q_{(d)},$$

где Q_d — величина, вычисляемая по описанному выше алгоритму.

4. Предварительная оценка непротиворечивости экспериментальных данных принятому (гипотетическому) распределению. Предварительная оценка производится графически по вероятностной бумаге соответствующего распределения. При этом значения ЭФР, вычисленные в соответствии с рекомендациями п. 3, для каждой из полных реализаций вариационного ряда наносятся на вероятностную бумагу, соответствующую принятому (гипотетическому) распределению. Результаты оценки считаются положительными, если траектория точек ЭФР на вероятностной бумаге может быть аппроксимирована прямой линией.

Наиболее ответственный момент на этом этапе обработки — принятие гипотезы о виде функции распределения. Основным при выборе гипотезы является анализ физики процессов, приводящих к отказам, а также опыт эксплуатации и оценки изделий-аналогов. Дополнительная информация может быть получена из анализа гистограммы и функции интенсивности отказов.

Следующий важный момент — наличие вероятностной бумаги соответствующего масштаба. Готовые бланки вероятностных бумаг охватывают обычно очень большой диапазон значений по оси ординат (от 0,001 до 0,999) в расчете «на все случаи жизни». Такую бумагу можно эффективно применять только при объеме выборки более 200—300, поэтому в каждом конкретном случае желательно иметь вероятностную шкалу соответствующего масштаба, что позволяет лучше использовать площадь листа, увеличить масштаб построений и повысить точность оценок. Вместо специальной вероятностной бумаги можно применять обычную миллиметровую, наклеив на нее крупномасштабные вероятностные шкалы.

Необходимо отметить, что в группе распределений, используемых в практике надежности, распределение Вейбулла — Гнеденко наиболее универсально, поэтому при обработке экспериментальных данных о надежности, если вид функции распределения априори неизвестен, в первую очередь рекомендуется воспользоваться вероятностной бумагой распределения Вейбулла — Гнеденко.

Крупномасштабные шкалы для распределения Вейбулла — Гнеденко представлены на рис. 19.4.

Следующий шаг — нанесение точек эмпирической функции распределения на вероятностную бумагу:

первое (наименьшее) значение функции $\widehat{F}_1$ наносится в точке, соответствующей по оси абсцисс (оси наработок) величине первой (наименьшей) полной реализации;

второе значение функции $\widehat{F}_2$ наносится в точке, соответствующей величине второй полной реализации, и т. д. для каждой из полных реализаций выборки.

При испытаниях с периодическим контролем экспериментальные данные оказываются естественным образом сгруппированными по межконтрольным интервалам (данные типа 2). При построении эмпирической функции распределения для статистических данных типа 2 весьма существен вопрос о том, к какому значению наработки относить рассчитанное значение функции. Поскольку точки, попавшие в интервал группирования, должны быть представлены одной точкой, то это, естественно, должна быть точка, соответствующая последнему скачку функции в данном интервале, т. е. точка, соответствующая окончанию наибольшей из реализаций (в данном интервале).

Если предположить, что наработки (реализации), сгруппированные в каждом интервале, представляют собой k случайных величин, которые распределены в интервале группирования независимо и равномерно, то задача отыскания положения последнего k -го отказа в интервале шириной Δ сводится формально к оценке математического ожидания k -й порядковой статистики k независимых наблюдений.

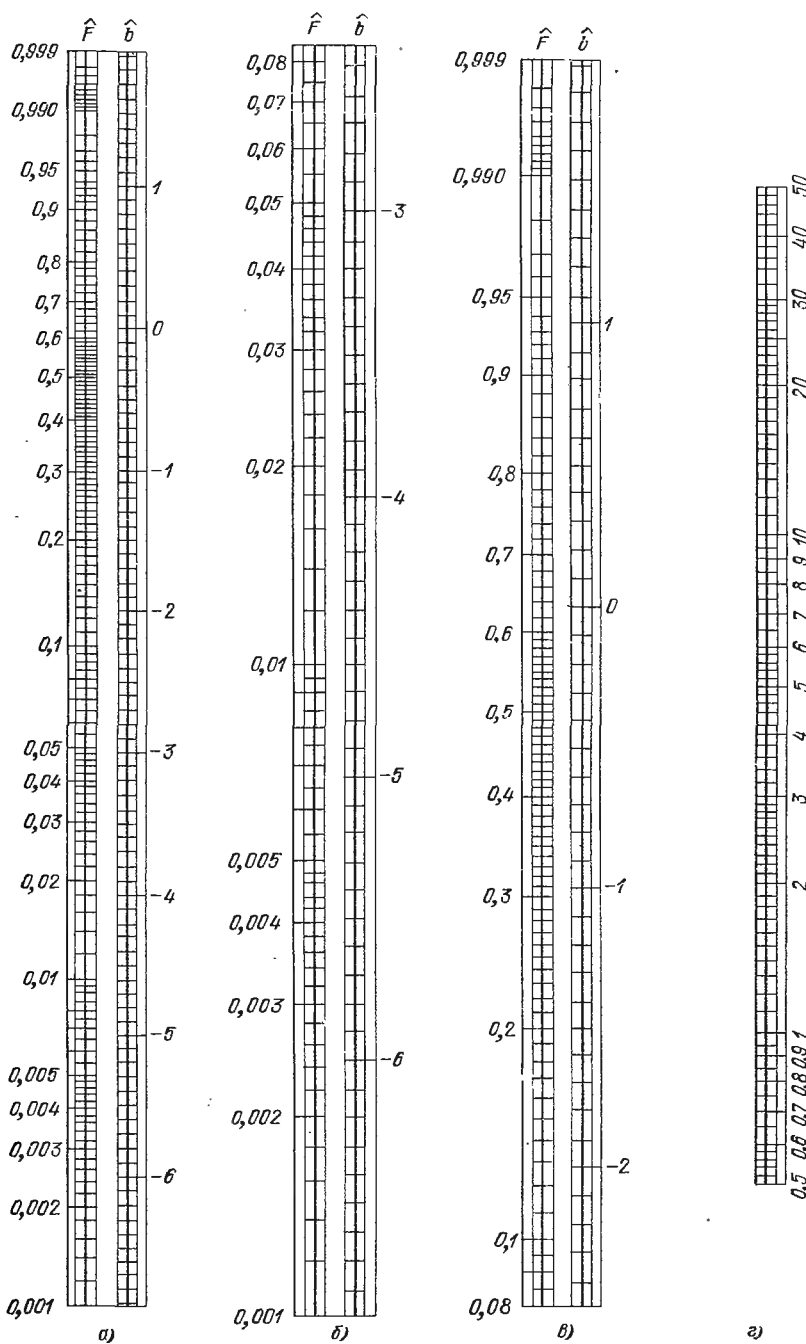


Рис. 19.4. Шкалы к вероятностной бумаге распределения Вейбулла—Гнеденко: а) ось ординат; б), в) ось ординат удвоенного масштаба; г) ось абсцисс (шкала наработок)

Известно, что если $x_k^{(1)} < \dots < x_k^{(k)}$ — порядковые статистики совокупности k независимых наблюдений $x_1, \dots, x_k$, распределенных равномерно на $[0, 1]$ каждое, то плотность распределения j -й порядковой статистики определяется выражением

$$f_k^{(j)}(x) = kC \binom{k-1}{j-1} x^{j-1} (1-x)^{k-j}, \quad 0 < x < 1, \quad 1 \leq j \leq k,$$

а математическое ожидание

$$Ex_k^{(j)} = j/(k+1), \quad 1 \leq j \leq k. \quad (19.33)$$

Используя (19.33) при условии $j = k$, определяем положение последнего k -го скачка относительно начала интервала шириной Δ :

$$x_k = \Delta k/(k+1), \quad (19.34)$$

откуда при $k = 1$ $x_1 = \Delta/2$; при $k \gg 1$ $x_k \simeq \Delta$.

Следовательно, середина интервала группирования может быть использована при нанесении точки эмпирической функции распределения только в частном случае, когда в интервале оказывается лишь один отказ (одна условная реализация). Правый конец интервала группирования может быть использован для нанесения точки эмпирической функции только как предельный случай при достаточно большом числе реализаций в интервале группирования. В общем случае применение правых концов интервалов группирования приводит к правому сдвигу аппроксимирующей прямой и, как следствие, к смещению оценки в сторону завышения. Чтобы минимизировать смещение оценки, рекомендуется определять положения точек эмпирической функции распределения на каждом интервале группирования по правилу (19.34).

Наконец, необходимо отметить еще одно обстоятельство. В тех интервалах, в которых отказы (условные реализации) отсутствуют ($k = 0$), значения эмпирической функции распределения формально могут быть вычислены, но наносить эти значения на вероятностную бумагу не следует (это «пустые» интервалы).

Если точки эмпирической функции распределения на вероятностной бумаге удовлетворительно аппроксимируются прямой, то можно переходить к следующему этапу обработки — оценке точечных значений параметров. В противном случае переходят к другой вероятностной бумаге или пытаются линеаризовать траекторию точек ЭФР введением дополнительного параметра — параметра сдвига распределения.

5. Оценка точечных значений параметров. Точечные значения параметров могут быть оценены каким-либо из аналитических методов или графически по положению прямой, аппроксимирующей точки ЭФР на вероятностной бумаге. Наиболее привлекательными свойствами графического метода являются простота и универсальность, а основным недостатком традиционно считается невысокая точность. Однако применительно к задачам экспериментальной оценки показателей надежности «инструментальная» грубость графического метода не столько существенна по сравнению с другими возможными источниками ошибок. Использование графического метода в данном случае хорошо согласуется с известным условием «равнопрочности всех элементов прикладного исследования». Процедуры оценки точечных значений параметров распределений по вероятностным бумагам достаточно полно описаны в литературе.

19.6. ПРОЦЕДУРА ПРОВЕРКИ СОГЛАСИЯ ОПЫТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ТЕОРЕТИЧЕСКИМ

После того как каким-либо из методов получены оценки для неизвестных параметров (параметра), можно перейти к следующему этапу математической обработки — процедуре проверки гипотезы о виде функции распределения. Качест-

венно такая проверка проводится на первых этапах статистической обработки по расположению точек эмпирической функции на вероятностной бумаге. На заключительном этапе обработки после оценки неизвестных параметров имеется возможность проверить гипотезу по количественному критерию. Ниже кратко описаны процедуры проверки согласия по двум наиболее употребительным критериям — Пирсона и Колмогорова.

19.6.1. Критерий Пирсона. При использовании критерия Пирсона (χ^2 -критерий) в качестве меры расхождения теоретического и эмпирического распределений принимается некоторое число H , которое вычисляется по следующему правилу:

$$H = \sum_{i=1}^m \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i}, \quad (19.35)$$

где n — объем выборки (число отказов); m — число интервалов разбиения вариационного ряда; v_i — число членов вариационного ряда (число отказов), попавших в i -й интервал; p_i — вероятность того, что наработка на отказ примет значение в пределах i -го интервала при данном виде функции распределения и найденных оценках параметров.

Вычисленная по этому правилу мера расхождения H есть случайная величина, имеющая χ^2 -распределение с числом степеней свободы $l = m - 1 - S$, где S — число параметров функции распределения, оцениваемых по одной и той же статистике.

Заключительным этапом рассматриваемой процедуры проверки гипотезы является сравнение вычисленной меры расхождения с квантилью χ^2 -распределения по уровню $\gamma = 1 - \varepsilon$ с l степенями свободы ($\chi^2_{\gamma, l}$). Здесь ε — уровень значимости (вероятность ошибки) — определяет максимальное значение меры расхождения, которое еще можно считать случайным.

Если в результате сравнения оказывается, что вычисленное значение H не превышает квантили $\chi^2_{\gamma, l}$, то делается заключение, что нет оснований отвергнуть принятую гипотезу. Если же $H > \chi^2_{\gamma, l}$, гипотеза отвергается и вся последовательность статистической обработки повторяется, начиная с уточнения гипотезы о виде функции распределения.

Таким образом, процедура проверки гипотезы о виде функции распределения по χ^2 -критерию состоит из следующих этапов:

построение вариационного ряда и гистограммы. При этом определяются число интервалов разбиения, ширина интервала разбиения и фактическое число отказов v_i , попавших в i -й интервал;

принятие гипотезы о виде функции распределения и оценка параметров этого распределения;

вычисление вероятностей p_i ; вероятности p_i вычисляются как разности значений функции распределения в точках начала и конца каждого из интервалов: $p_i = F_i - F_{i-1}$;

вычисление значений np_i — ожидаемые (теоретические) числа отказов для каждого из интервалов при принятом виде функции распределения и найденных оценках параметров;

вычисление значений $(v_i - np_i)^2 / np_i$ и меры расхождения H по формуле (19.35);

определение значения квантили $\chi^2_{\gamma, l}$ и сравнение с вычисленным ранее значением H . Квантиль $\chi^2_{\gamma, l}$ определяется по таблицам χ^2 -распределения либо по номограмме, приведенной далее.

Если число отказов по результатам испытаний мало, гистограмма не является информативной и, следовательно, критерий Пирсона неприменим. Строго говоря, использование критерия Пирсона не рекомендуется уже при $n < 100$.

19.6.2. Критерий Колмогорова. При использовании критерия Колмогорова в качестве меры расхождения теоретического и эмпирического распределений принимается число D^* , которое вычисляется по правилам:

$$D_n^* = D_{\max} \quad \text{при } n \leq 100; \quad (19.36)$$

$$D^* = \sqrt{n} D_{\max} \quad \text{при } n > 100, \quad (19.37)$$

где $D_{\max}$ — максимальное абсолютное значение разности эмпирической и теоретической функций распределения; n — объем выборки (число отказов).

Вычисленная по правилу (19.37) мера расхождения D^* есть случайная величина, имеющая распределение Колмогорова. При $n \leq 100$ распределение D_n^* зависит от n .

Заключительным этапом процедуры проверки гипотезы по критерию Колмогорова является сравнение вычисленной меры расхождения D^* с квантилью распределения Колмогорова y_α по уровню $\gamma = 1 - \epsilon$. Здесь, так же как и ранее, ϵ — уровень значимости (вероятность ошибки) — определяет максимальное значение меры расхождения, которое еще можно считать случайным. Если в результате сравнения оказывается, что вычисленное значение D^* не превышает квантили y_α , то делается заключение, что нет оснований отвергнуть принятую гипотезу о виде функции распределения. Если же $D^* > y_\alpha$, то принятая на начальном этапе гипотеза отвергается и вся последовательность обработки информации повторяется, начиная с уточнения гипотезы о виде функции распределения.

При $n \leq 100$ процедура проверки гипотезы проводится аналогично, с той лишь разницей, что вычисляется мера D_n^* и сравнивается с критическим значением $D_{\epsilon, n}$ (табулированная функция).

Таким образом, процедура проверки гипотезы по критерию Колмогорова состоит из следующих этапов:

- построение вариационного ряда и эмпирической функции распределения;
- принятие гипотезы о виде функции распределения и оценка параметров этого распределения;

- вычисление значений теоретической функции распределения в точках τ_i , соответствующих скачкам эмпирической функции распределения;

- вычисление в каждой из точек τ_i абсолютного значения разности $D_i = |\hat{F}(\tau_i) - F(\tau_i)|$;

- выбор максимального значения разности $D_{\max}$ и определение меры расхождения по правилу (19.36) или (19.37);

- сравнение меры расхождения с квантилью распределения Колмогорова или при $n < 100$ с критическим значением максимального отклонения эмпирической функции распределения от теоретической.

19.7. ИНТЕРВАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ

19.7.1. Предварительные замечания. Любая точечная оценка, если даже она удовлетворяет всем критериям качества, обладает принципиально существенным недостатком в том смысле, что она сама представляет собой лишь частное значение случайной величины. Мы не имеем представления о степени доверия к этой оценке, о степени ее точности. Недостатки точечных оценок особенно четко проявляются в следующих примерах.

Пример 19.5. Проведено два независимых испытания одних и тех же изделий. Распределение наработки на отказ экспоненциальное, количество изделий в первом и втором случаях одинаково: $N = 500$ шт. Продолжительность первого испытания $T_1 = 100$ ч, второго $T_2 = 200$ ч. При этом числа отказов соответственно $n_1 = 5$, $n_2 = 10$.

Точечные оценки для интенсивности отказов в первом и во втором случаях

получаются одинаковыми: $\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2 = 10^{-4} \text{ ч}^{-1}$, однако интуитивно ясно, что во втором случае оценка более достоверная.

Если, например, в результате испытаний тех же изделий число отказов $n = 0$, то точечная оценка при любой наработке $\hat{\lambda} = 0$. Но $\hat{\lambda} = 0$ означает абсолютную безотказность изделия, чего в принципе быть не может.

Поэтому кроме точечной оценки желательно знать практически надежные границы для оцениваемого параметра, т. е. найти такой интервал оценок, который с достаточно высокой вероятностью «накрывает» неизвестный параметр.

Ясно, что достоверными границами для параметров и показателей надежности (абсолютно надежными границами) являются: для T и λ $[0, \infty]$; для $P(t)$ и $q(t)$ $[0, 1]$.

Указание других границ сопряжено с риском совершить ошибку. Вероятности ошибок ε_1 и ε_2 называются уровнями значимости оценок: ε_1 — вероятность того, что найденный интервал не накроет параметр своим левым концом; ε_2 — вероятность того, что найденный интервал не накроет неизвестный параметр своим правым концом.

В качестве меры достоверности оценки — доверительной вероятности в математической статистике — принимается величина $\gamma^* = 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, показывающая, с какой вероятностью можно утверждать, что доверительный интервал накрывает истинное значение параметра:

$$\gamma^* = P \{T_n < T < T_v\},$$

где T_n — нижняя граница доверительного интервала (нижняя доверительная граница для параметра T); T_v — верхняя граница доверительного интервала (верхняя доверительная граница для параметра T).

Итак, доверительный интервал — случайный интервал, длина и положение которого зависят от исходов наблюдений. При фиксированной точности (величине доверительного интервала) коэффициент доверия (доверительная вероятность) будет возрастать по мере увеличения числа отказов. При фиксированном числе отказов невозможно повысить доверительную вероятность, не уменьшая точность оценки, т. е. не расширяя доверительный интервал, и наоборот, нельзя увеличить точность оценки, не уменьшая доверительную вероятность.

Чаще всего вероятности ε_1 и ε_2 выбираются одинаковыми; тогда $\gamma^* = 1 - 2\varepsilon$ и, следовательно, каждая из доверительных границ определяется с уровнем значимости $\varepsilon = 1 - \gamma^*/2$ или с односторонней доверительной вероятностью (коэффициентом доверия), $\gamma = (1 + \gamma^*)/2$.

Если известен вид функции распределения оценки, то принцип вычисления доверительных интервалов состоит в том, что в качестве нижней и верхней доверительных границ принимаются квантили этого распределения по соответствующему уровню. Нижняя доверительная граница определяется как квантиль по уровню ε , а верхняя — как квантиль по уровню $\gamma = 1 - \varepsilon$. Вид распределения оценки определяется, в свою очередь, видом распределения исследуемой случайной величины и теми функциональными преобразованиями, которые производятся над исходной статистикой при получении оценок. Например, если оценка для математического ожидания дается выражением

$$\hat{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tau_i,$$

то распределение $\hat{T}$ есть распределение суммы n независимых случайных величин, которое целиком определяется распределением исходной случайной величины τ_i и числом отказов n (числом полных реализаций). В частности, если слагаемые τ_i имеют экспоненциальное распределение, то оценка $\hat{T}$ имеет γ -распределение с

n степенями свободы, что совпадает с χ^2 -распределением с числом степеней свободы $2n$. Если τ_i — независимые нормально распределенные случайные величины со средним T и дисперсией σ^2 , то оценка $\hat{T}$ имеет нормальное распределение со средним T и дисперсией σ^2/n .

19.7.2. Доверительный интервал для параметра экспоненциального распределения. Расчетные формулы для доверительных границ $\lambda_{\text{н}}$ и $\lambda_{\text{в}}$ параметра λ экспоненциального распределения для различных типов выборок приведены в табл. 19.7.

В таблице приняты следующие обозначения: χ^2 — квантиль χ^2 -распределения по уровню ϵ или $1 - \epsilon$ с числом степеней свободы $2n$ или $2n + 2$; n — суммарное число отказов, зафиксированных при испытаниях (полных реализаций); t_{Σ} — суммарная наработка изделий при испытаниях.

На практике часто принимается $\epsilon = 0,1$, что соответствует доверительной вероятности $\gamma^* = 0,8$. Квантили χ^2 -распределения выбираются по таблицам либо, что еще удобнее, по номограмме (см. п. 19.7.5).

Если в результате испытаний число отказов $n = 0$ (частный случай выборки 1Г), то $\lambda_{\text{н}} = 0$. При этом определяется лишь одна доверительная граница, а именно $\lambda_{\text{в}}$ — односторонний доверительный интервал.

В этом случае, так как одна из границ является достоверной, значение $\lambda_{\text{в}}$ с доверительной вероятностью γ определяется выражением

$$\lambda_{\text{в}} = \chi_{\gamma, 2}^2 / 2t_{\Sigma},$$

где $\chi_{\gamma, 2}$ — квантиль χ^2 -распределения по уровню γ с числом степеней свободы 2.

Выборка типа 1Б для стратегии испытаний [NUT] в таблице не представлена, поскольку определение значений $\lambda_{\text{н}}$ и $\lambda_{\text{в}}$ в этом случае связано с решением уравнений (19.38) и (19.39). Решением этих уравнений находятся доверительные границы $q_{\text{н}}$ и $q_{\text{в}}$ для вероятности отказа изделия за время испытания T . Значения $\lambda_{\text{н}}$ и $\lambda_{\text{в}}$ определяются затем по формулам

$$\lambda_{\text{н}} = \frac{1}{T} \ln \frac{1}{1 - q_{\text{н}}}; \quad \lambda_{\text{в}} = \frac{1}{T} \ln \frac{1}{1 - q_{\text{в}}}.$$

19.7.3. Доверительные интервалы для параметров распределения Вейбулла — Гнеденко. Если в распределении $F(t, a, b) = 1 - e^{-(t/a)^b}$ коэффициент формы b известен, то, введя замену $t^* = t^b$ и $\alpha = a^{-b}$, получаем экспоненциальное распределение $F(t^*, \alpha) = 1 - e^{-\alpha t^*}$ с параметром масштаба α . Доверительные границы $\alpha_{\text{н}}$ и $\alpha_{\text{в}}$ для параметра α определяются тогда по формулам табл. 19.7 для соответствующих стратегий испытаний (типов выборок). При этом, учитывая замену переменной, значения t_{Σ} , входящие в формулы табл. 19.7, рассчитываются по правилу

$$t_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \tau_i^b + \sum_{j=1}^m t_j^b,$$

где τ_i — значения наработок до отказа (полные реализации); n — количество полных реализаций (отказов); t_j — значения безотказных наработок (неполные реализации); m — количество неполных реализаций.

После определения $\alpha_{\text{н}}$ и $\alpha_{\text{в}}$ значения доверительных границ для параметра масштаба «а» находятся из выражения

$$\ln a = -(\lg \alpha)/b.$$

Таблица 19.7

Доверительные границы для параметра экспоненциального распределения

Тип выборки	$\lambda_{\text{н}}$	$\lambda_{\text{в}}$
1А 1Б 1Д	$\frac{\chi_{\epsilon, 2n}^2}{2t_{\Sigma}}$	$\frac{\chi_{1-\epsilon, 2n}^2}{2t_{\Sigma}}$
1Г	$\frac{\chi_{\epsilon, 2n}^2}{2t_{\Sigma}}$	$\frac{\chi_{1-\epsilon, 2n+2}^2}{2t_{\Sigma}}$

Если по экспериментальным данным определить оба параметра распределения Вейбулла, то приближенное решение задачи определения доверительных интервалов для параметров a и b можно получить в предположении нормального распределения оценок.

19.7.4. Доверительный интервал для параметра биномиального распределения. При испытаниях по непараметрической схеме $\{NUT\}$ мы располагаем только сведениями о числе изделий, подвергнутых испытаниям, и числе изделий, отказавших за время испытаний T (выборка $2Г$). При этом единственным показателем, который может быть оценен, является вероятность отказа q за время испытания.

Оценка максимального правдоподобия для вероятности отказа определяется (см. пример 19.1) выражением $\hat{q} = n/N$, где n — число отказавших изделий (число условных реализаций выборки); N — число изделий, поставленных на испытание.

Известно, что оценка $\hat{q}$ является случайной величиной, имеющей биномиальное распределение. Поэтому верхняя q_v и нижняя q_n доверительные границы для вероятности отказа определяются решениями уравнений:

$$\sum_{i=0}^n C_N^i q_v^i (1 - q_v)^{N-i} = \varepsilon; \quad (19.38)$$

$$\sum_{i=n}^N C_N^i q_n^i (1 - q_n)^{N-i} = \varepsilon, \quad (19.39)$$

где ε — уровни значимости.

Численное решение этих уравнений очень громоздко.

Компактным и удобным инструментом решения многих задач, связанных с биномиальным распределением, является номограмма, приведенная далее. Номограмма позволяет, в частности, просто и с достаточной для практики точностью определять q_n и q_v для любых значений доверительной вероятности $\gamma = 1 - \varepsilon$, в том числе и не предусмотренных таблицами.

Таблицы и номограмма реализуют функцию вида (19.38). Поэтому уравнение (19.39) обычно преобразуют. Используя известное свойство биномиального распределения $\sum_{i=0}^N = \sum_{i=0}^{n-1} + \sum_{i=n}^N = 1$, уравнение (19.39) приводят к виду

$$\sum_{i=0}^{n-1} C_N^i q_n^i (1 - q_n)^{N-i} = 1 - \varepsilon. \quad (19.40)$$

19.7.5. Определение интервальных оценок с использованием номограмм. Для получения интервальных оценок параметров (показателей надежности) используются таблицы квантилей различных распределений. Для определения квантилей χ^2 -распределения, F -распределения, распределений Стьюдента и биномиального можно вместо таблиц воспользоваться номограммами. Методика работы с номограммами демонстрируется далее на конкретных примерах.

1. Номограмма χ^2 -распределения¹.

Пример 19.6. В результате испытаний по плану $[NRT]$ при суммарной наработке изделий $t_\Sigma = 1000$ ч зафиксировано $n = 5$ отказов. Распределение времени безотказной работы изделий экспоненциальное. Определить с доверительной вероятностью $\gamma^* = 0,8$ доверительный интервал для наработки на отказ. Напомним, что если доверительный интервал находится с доверительной вероятностью γ^* , то каждая доверительная граница определяется с уровнем значимости $\varepsilon =$

¹ Смирнов С. В., Потапов М. К. Номограмма для функции распределения χ^2 . — Теория вероятностей и ее применение, 1961, т. VI, вып. I.

$= (1 - \gamma^*)/2$, т. е. в данном случае с коэффициентом доверия $\gamma = 0,9$ (односторонняя доверительная вероятность).

Решение. Верхняя и нижняя границы доверительного интервала для наработки на отказ в этом случае определяются выражениями:

$$T_B = 2t_{\Sigma}/\chi_{\epsilon, 2n}^2; \quad T_H = 2t_{\Sigma}/\chi_{1-\epsilon, 2n+2}^2,$$

где $\chi_{\epsilon, 2n}^2$ и $\chi_{1-\epsilon, 2n+2}^2$ — квантили χ^2 -распределения по уровням ϵ и $1 - \epsilon$ с числом степеней свободы $2n$ и $2n + 2$.

Номограмма χ^2 -распределения представлена на рис. 19.5. Левая шкала номограммы — шкала уровней значимости, на которой отмечаются значения ϵ и $1 - \epsilon$. Правая шкала — шкала степеней свободы, на которой откладываются значения $2n + 2$ и $2n$. Криволинейная шкала в центре номограммы — шкала значений квантилей χ^2 -распределения.

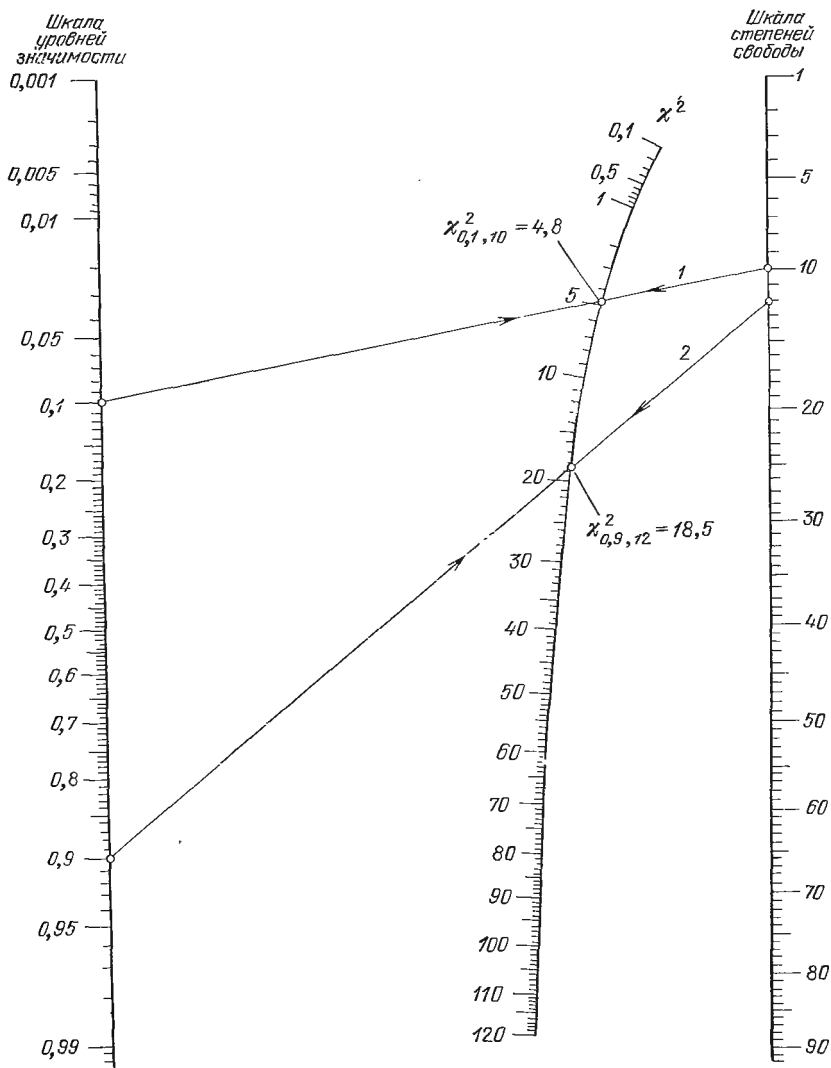


Рис. 19.5. Номограмма χ^2 -распределения

Определение квантилей по номограмме осуществляется следующим образом: между точкой $\varepsilon = 0,1$ на левой шкале и точкой $2n = 10$ на правой проводится линия 1;

между точкой $1 - \varepsilon = 0,9$ на левой шкале и точкой $2n + 2 = 12$ на правой шкале проводится линия 2;

в точке пересечения линии 1 со шкалой χ^2 считывается значение $\chi^2_{0,1; 10} = 4,8$ (табличное значение 4,87);

в точке пересечения линии 2 со шкалой χ^2 считывается значение $\chi^2_{0,9; 12} = 18,5$ (табличное значение 18,5).

Следовательно, искомые значения границ доверительного интервала для наработки на отказ составляют:

$$T_B = 2 \cdot 1000 / 4,8 = 417 \text{ ч}; \quad T_H = 2 \cdot 1000 / 18,5 = 108 \text{ ч}.$$

Распределение χ^2 очень широко применяется в различных задачах математической статистики. Во всех случаях квантили распределения практически для любого уровня и числа степеней свободы до 90 могут быть определены по номограмме.

2. Номограмма распределения Стьюдента¹. Рассмотрим следующий пример.

Пример 19.7. На испытаниях некоторого устройства, имеющего время работы до отказа, распределенное по нормальному закону, получено $n = 10$ полных реализаций (наработок до отказа) x_i : 120, 110, 80, 130, 120, 140, 80, 150, 130 и 140 ч. Требуется найти с доверительной вероятностью $\gamma^* = 0,9$ доверительные интервалы для наработки на отказ T и дисперсии D .

Решение. Верхняя и нижняя доверительные границы для наработки на отказ в этом случае определяются выражением

$$T_{B,H} = \hat{T} \pm t_{\gamma, n-1} \sqrt{\hat{D}/(n-1)},$$

где $\hat{T}$ и $\hat{D}$ — точечные оценки для наработки на отказ и дисперсии; $t_{\gamma, n-1}$ — квантиль распределения Стьюдента по уровню γ при числе степеней свободы $n - 1$.

Значения $\hat{T}$ и $\hat{D}$ определяются по экспериментальным данным:

$$\hat{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 120 \text{ ч}; \quad \hat{D} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{T})^2 = 576 \text{ ч}^2.$$

Значение квантили $t_{\gamma, n-1}$ определяется по номограмме распределения Стьюдента (рис. 19.6). Левая криволинейная шкала номограммы — шкала степеней свободы, на которой отмечается значение $n - 1$. Правая криволинейная шкала номограммы — шкала доверительных уровней, на которой отмечается значение γ . Шкала в центре номограммы — шкала значений квантилей распределения Стьюдента.

Распределение Стьюдента (t -распределение) относится к классу симметричных, поэтому шкала уровней значимости на номограмме представлена только значениями $1 - \varepsilon$ и называется, соответственно, шкалой доверительных уровней.

Для определения значения квантили между точкой $n - 1 = 9$ на левой шкале и точкой $\gamma = 0,95$ на правой проводится линия, в точке пересечения которой со шкалой t номограммы считывается ответ: $t_{0,95; 9} = 1,87$.

Следовательно, искомые значения доверительных границ для наработки на отказ составляют

$$T_{B,H} = 120 \pm 1,87 \sqrt{576/9} = 120 \text{ ч} \pm 15 \text{ ч}.$$

¹ Теория вероятностей и ее применение, 1956, т. I, вып. 2.

Верхняя и нижняя доверительные границы для дисперсии определяются выражениями:

$$D_{\text{в}} = n\hat{D}/\chi^2_{\varepsilon, n-1}; \quad D_{\text{н}} = \frac{n\hat{D}}{\chi^2_{1-\varepsilon, n-1}},$$

где $\chi^2_{\varepsilon, n-1}$ и $\chi^2_{1-\varepsilon, n-1}$ — квантили, определяемые по номограмме χ^2 -распределения (см. рис. 19.5).

По номограмме χ^2 -распределения получаем: $\chi^2_{0,05; 9} = 3,2$; $\chi^2_{0,95; 9} = 17$.

Следовательно, искомые значения границ доверительного интервала для дисперсии составляют:

$$D_{\text{в}} = 10 \cdot 576 / 3,2 = 1800 \text{ ч}^2; \quad D_{\text{н}} = 10 \cdot 576 / 17 = 340 \text{ ч}^2.$$

3. Номограмма биномиального распределения¹. Номограмма на рис. 19.7 реализует функцию биномиального распределения. Она позволяет весьма просто определять значения $q_{\text{в}}$ и $q_{\text{н}}$, заданные уравнениями (19.38) и (19.39). Шкалы

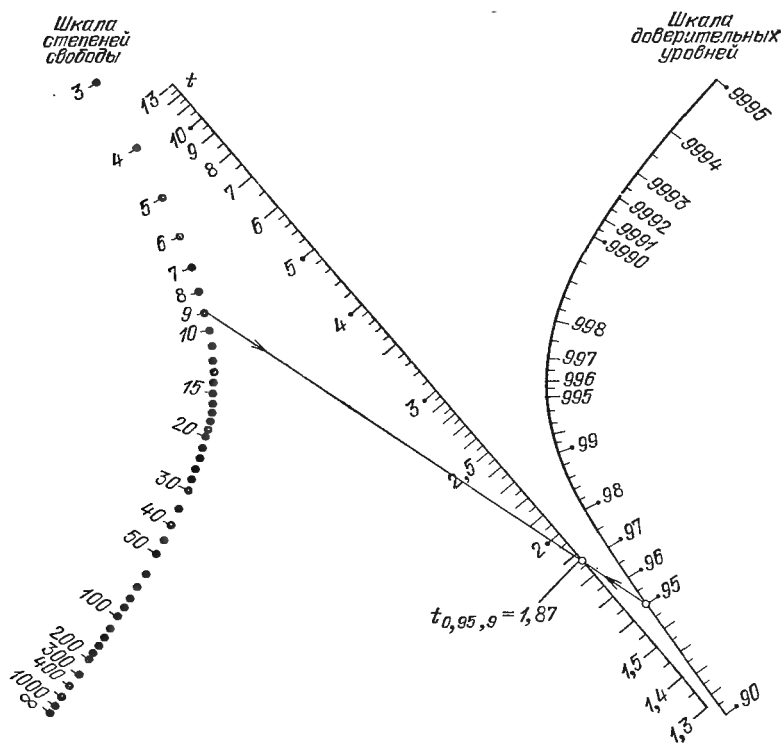


Рис. 19.6. Номограмма распределения Стьюдента

номограммы в этом случае имеют следующий смысл: левая шкала — шкала вероятностей q , по которой считываются искомые значения доверительных границ $q_{\text{в}}$ и $q_{\text{н}}$; правая шкала — шкала уровней значимости, на которой отмечаются значения ε и $1 - \varepsilon$; на сетке номограммы дугообразные линии соответствуют числу циклов испытаний N , а прямые наклонные линии — полученному при испытаниях числу отказов n .

Пример 19.8. При 16 циклах испытаний зафиксировано 3 отказа. Определить доверительный интервал для вероятности отказа за цикл испытаний с доверитель-

¹ Фишбейн Ф. И. Номограмма, реализующая функцию биномиального распределения. — Надежность и контроль качества, 1972, № 12.

ной вероятностью $\gamma^* = 0,7$ (каждая доверительная граница определяется с уровнем значимости $\varepsilon = 0,15$ или коэффициентом доверия $\gamma = 0,85$).

Решение. На сетке номограммы отмечается точка A , соответствующая паре чисел $N = 16$, $n = 3$, и точка B , соответствующая паре чисел $N = 16$, $n - 1 = 2$ (рис. 19.8, а).

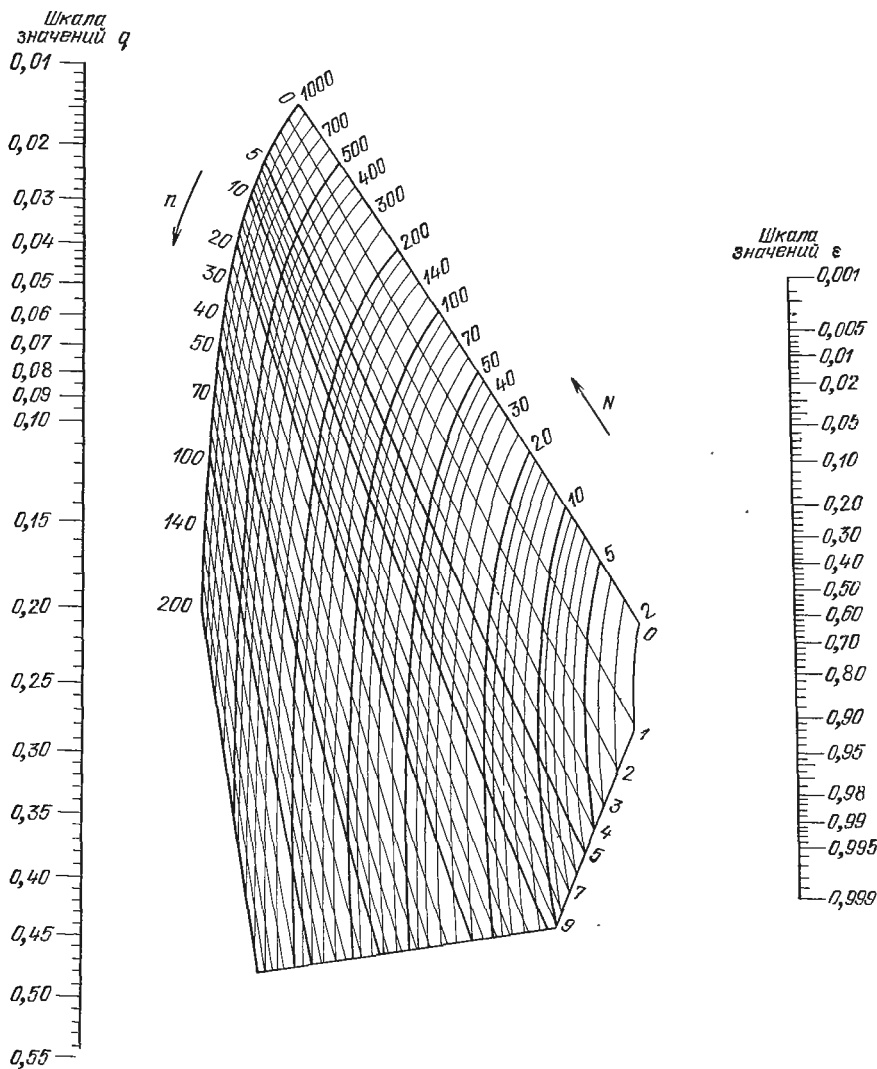


Рис. 19.7. Номограмма биномиального распределения

От точки, соответствующей значению $\varepsilon = 0,15$ на правой шкале, через точку A на сетке номограммы проводится линия 1 до пересечения с левой шкалой номограммы, по которой считывается значение $q_{\text{в}} = 0,34$, — решение уравнения (19.38). От точки, соответствующей значению $1 - \varepsilon = 0,85$ на правой шкале, через точку B на сетке номограммы проводится линия 2 до пересечения с левой шкалой, по которой считывается значение $q_{\text{н}} = 0,085$, — решение уравнения (19.40).

Если при испытаниях 16 изделий отказов не зафиксировано ($n = 0$), то нижняя доверительная граница для вероятности отказа $q_{\text{н}} = 0$. Для определения значения $q_{\text{в}}$ с односторонней доверительной вероятностью $\gamma = 0,7$ от точки

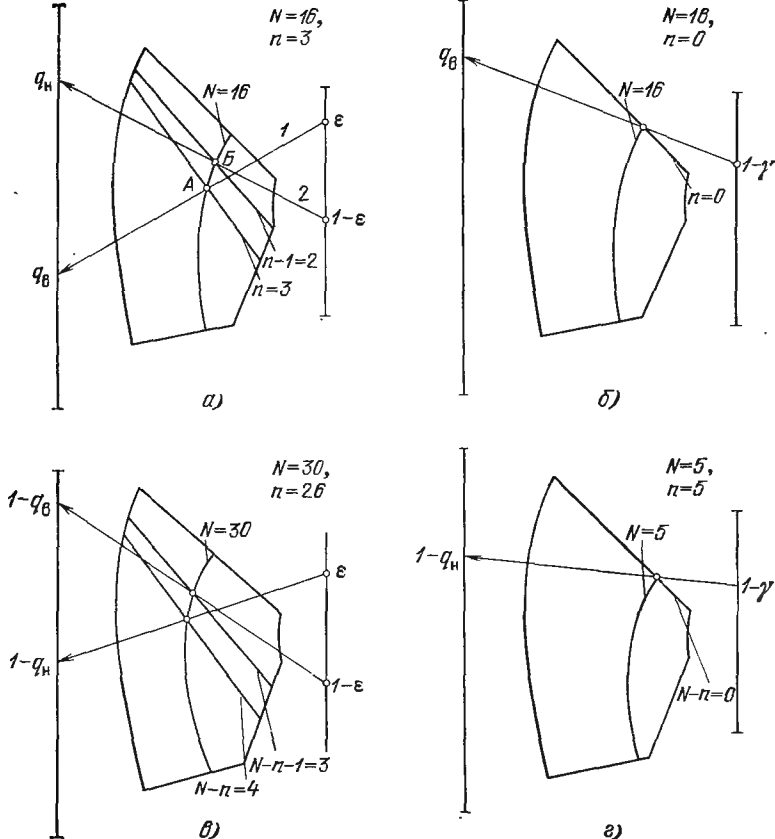


Рис. 19.8. Схемы пользования номограммой биномиального распределения

1 — $\gamma = 0,3$ на правой шкале номограммы (см. рис. 19.8, б) через точку $N = 16$, $n = 0$ на сетке номограммы проводится линия до пересечения с левой шкалой, по которой считывается значение $q_0 = 0,072$, — решение уравнения (19.38) при $n = 0$.

Если искомое значение верхней доверительной границы для вероятности отказа превышает максимальное значение левой шкалы номограммы, используется следующее свойство биномиального распределения:

$$\sum_{i=0}^n C_N^i q^i (1-q)^{N-i} = 1 - \sum_{i=0}^{N-n-1} C_N^i (1-q)^i q^{N-i}. \quad (19.41)$$

Поэтому по номограмме вместо значений q_n и q_0 можно решением уравнений

$$\sum_{i=0}^{N-n} C_N^i (1-q_n)^i q_n^{N-i} = \varepsilon; \quad (19.42)$$

$$\sum_{i=0}^{N-n-1} C_N^i (1-q_0)^i q_0^{N-i} = 1 - \varepsilon \quad (19.43)$$

определить значения $1 - q_n$ и $1 - q_0$ (см. рис. 19.8, в). Например, если $N = 30$, $n = 26$, $\gamma^* = 0,8$ ($\varepsilon = 0,1$), то по этой схеме находим:

$1 - q_0 = 0,06$; $1 - q_n = 0,248$, откуда $q_0 = 0,94$; $q_n = 0,752$.

Если в результате испытаний отказывают все изделия ($n = N$), то $q_B = 1$, а значение $1 - q_H$, как решение уравнения (19.42), определяется по схеме на рис. 19.8, а. Например, если $N = 5$, $n = 5$, $\gamma = 0,7$, то через точку $1 - \gamma = 0,3$ на правой шкале и точку $N = 5$, $N - n = 0$ на сетке номограммы проводится линия до пересечения с левой шкалой, по которой считывается значение $1 - q_H = 0,21$, откуда $q_H = 0,79$.

Если значения N и n таковы, что линия, проводимая через точку N , $n - 1$ (точку B на рис. 19.8, а), выходит за верхний край левой шкалы, и в случае, если $N > 1000$, для использования номограммы следует число N уменьшить до такого значения N' , чтобы линия, проводимая через точку N' , $n - 1$, не выходила за верхний край левой шкалы. Удобно, чтобы значение N' было целым числом, совпадающим с одним из значений шкалы N номограммы. Затем для точек N' , n и N' , $n - 1$ по номограмме (см. рис. 19.8, а или в) определяются значения q'_B и q'_H . Границы доверительного интервала вычисляются по формулам:

$$q_B = q'_B N' / N; \quad q_H = q'_H N' / N.$$

Пример 19.9. При передаче по каналу связи 7510 сообщений зафиксировано 9 искажений ($N = 7510$, $n = 9$). Определить доверительный интервал (q_H и q_B) для вероятности искажения сообщения в канале связи с доверительной вероятностью $\gamma^* = 0,8$ ($\epsilon = 0,1$).

Решение. Поскольку $N > 1000$, выбирается $N' = 200$. Для точки $N' = 200$, $n - 1 = 8$ и точки $N' = 200$, $n = 9$ так же, как и в примере 19.8, определяются значения $q'_H = 0,0275$ и $q'_B = 0,07$. Вычисляются искомые доверительные границы:

$$q_H = q'_H N' / N = 7,7 \cdot 10^{-4}; \quad q_B = q'_B N' / N = 19,6 \cdot 10^{-4}.$$

4. Использование номограммы биномиального распределения для определения квантилей F -распределения. Если время безотказной работы и время восстановления изделия подчиняются экспоненциальному распределению, то верхняя и нижняя доверительные границы для коэффициента готовности определяются выражениями:

$$K_B = 1 \left/ \left(1 + \frac{\widehat{\tau}}{\widehat{T}} F_{\epsilon, (2k, 2m)} \right) \right.; \quad (19.44)$$

$$K_H = 1 \left/ \left(1 + \frac{\widehat{\tau}}{\widehat{T}} F_{1-\epsilon, (2k, 2m)} \right) \right., \quad (19.45)$$

где $\widehat{T}$, $\widehat{\tau}$ — точечные оценки соответственно для наработки на отказ и времени восстановления; k , m — числа отказов и восстановлений, по которым определены оценки $\widehat{T}$ и $\widehat{\tau}$; $F_{\epsilon, (2k, 2m)}$, $F_{1-\epsilon, (2k, 2m)}$ — квантили F -распределения соответственно по уровням ϵ и $1 - \epsilon$ с числом степеней свободы $(2k, 2m)$.

В свою очередь, квантили F -распределения могут быть выражены через квантили биномиального распределения следующим образом:

$$F_{\epsilon, (2k, 2m)} = m(1 - q_B) / kq_B; \quad (19.46)$$

$$F_{1-\epsilon, (2k, 2m)} = m(1 - q_H) / kq_H, \quad (19.47)$$

где q_B — квантиль биномиального распределения по уровню ϵ , определяемая по номограмме, причем в качестве чисел N и n принимаются: $N = k + m - 1$; $n = m - 1$; q_H — квантиль биномиального распределения по уровню $1 - \epsilon$, определяемая по номограмме, при тех же значениях N и n ($N = k + m - 1$; $n = m - 1$).

Пример 19.10. В результате испытаний имеются статистические данные о 20 отказах изделия ($N = 20$) и 15 восстановлениях ($m = 15$). По этим данным определены точечные оценки наработки на отказ, времени восстановления и ко-

эффективности готовности: $\hat{T} = 70$ ч; $\tau = 1,5$ ч; $K = 1/(1 + \hat{\tau}/\hat{T}) = 0,979$. Время безотказной работы и время восстановления подчиняются экспоненциальному распределению. Определить с доверительной вероятностью $\gamma^* = 0,8$ доверительный интервал для коэффициента готовности (каждая граница доверительного интервала находится с уровнем значимости $\varepsilon = 0,1$).

Решение. На сетке номограммы биномиального распределения отмечается точка, соответствующая паре чисел: $N = 20 + 15 - 1 = 34$ и $n = 15 - 1 = 14$.

От точки $\varepsilon = 0,1$ на правой шкале через отмеченную точку на сетке номограммы ($N = 34$; $n = 14$) проводится прямая до пересечения с левой шкалой, по которой считывается значение $q_v = 0,54$.

От точки $1 - \varepsilon = 0,9$ на правой шкале через ту же точку ($N = 34$; $n = 14$) на сетке номограммы проводится прямая до пересечения с левой шкалой, по которой считывается значение $q_n = 0,327$.

По формулам (19.46) и (19.47) определяются квантили F -распределения

$$F_{0,1; (40, 30)} = 15 (1 - 0,54)/20 \cdot 0,54 = 0,638;$$

$$F_{0,9; (40, 30)} = 15 (1 - 0,327)/20 \cdot 0,327 = 1,53.$$

Доверительные границы для коэффициента готовности определяются по формулам (19.44) и (19.45):

$$K_v = 1 / \left(1 + \frac{1,5}{70} \cdot 0,638 \right) = 0,986;$$

$$K_n = 1 / \left(1 + \frac{1,5}{70} \cdot 1,53 \right) = 0,967.$$

19.8. СПОСОБ ОБРАБОТКИ НЕПОЛНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Рассмотрим задачу оценки наработки на отказ восстанавливаемого объекта, когда экспериментальные данные об отказах или их отсутствие достоверно известны лишь за некоторый период времени J , непосредственно предшествующий обследованию. Такие данные представляют собой специфический случай усечения слева.

Диаграмма, поясняющая процесс образования выборки, представлена на рис. 19.9.

На практике описываемый тип экспериментальных данных встречается при обследовании и ремонтных предприятий, ремонтирующих изделия разных лет (месяцев) выпуска, не располагающих данными о предыдущих отказах объектов при эксплуатации, а также в ряде случаев, когда предыстория эксплуатации изделий не может быть известна по организационно-техническим причинам.

В процессе решения происходит восстановление недостающих данных путем расчета вероятностей отказов объектов в периоды, когда наблюдение за ними не производилось.

Необходимым условием решения задачи является существенно различная наработка объектов.

Пусть имеется v одинаковых восстанавливаемых объектов. С периодом θ осуществляется контроль работоспособности объектов. Объекты достаточно вы-

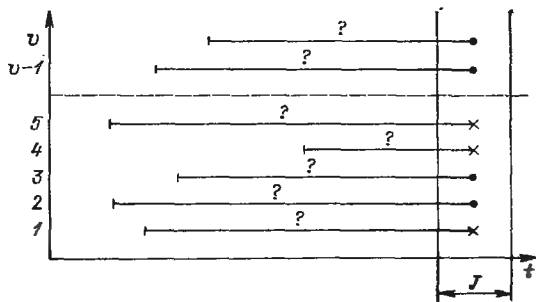


Рис. 19.9. Временная диаграмма, поясняющая процесс образования выборки

Исходные данные

Наработка изделия, период	0,5	1,5	2,5	...	$M-0,5$
Число отказавших объектов в изделиях с такой наработкой	m_1	m_2	m_3	...	m_M
Общее число обследованных объектов в изделиях с такой наработкой	v_1	v_2	v_3	...	v_M

соконадёжны, так что вероятностью двух и более отказов одного и того же объекта в течение периода θ можно пренебречь. Продолжительность интервала J , достаточного для проведения контроля работоспособности и восстановления объектов, значительно меньше, чем θ .

Специфичной особенностью экспериментальных данных является то, что в r -й период контроля изделия неизвестно число предшествующих отказов объекта; известен лишь факт его безотказности или отказа за r -й период θ . Если наработку изделий выразить в числах периодов θ (с абсолютной погрешностью $\theta/2$), то исходные данные могут быть представлены табл. 19.8.

Обозначим вероятность отказа объекта за один (первый) период работы P (0; 1) через p_1 , за второй — P (1; 2) = p_2 и т. д., P ($M-1$; M) = p_M .

Построим графы возможных исходов для объектов, имеющих в среднем наработку 0,5; 1,5 и 2,5 периода (рис. 19.10, а, б, в).

За один (первый) период работы с вероятностью p_1 будет зарегистрирован отказ объекта, а с вероятностью $1 - p_1$ — безотказная наработка.

В соответствии с исходными данными $p_1 = m_1/v_1$. Вероятность того, что при обследовании изделия с наработкой в среднем 1,5 периода будет обнаружен отказ объекта, равна (см. соответствующий граф) $p_1^2 + p_2 = m_2/v_2$, а с наработкой в среднем 2,5 периода $p_1^3 + 2p_1p_2 + p_3 = m_3/v_3$.

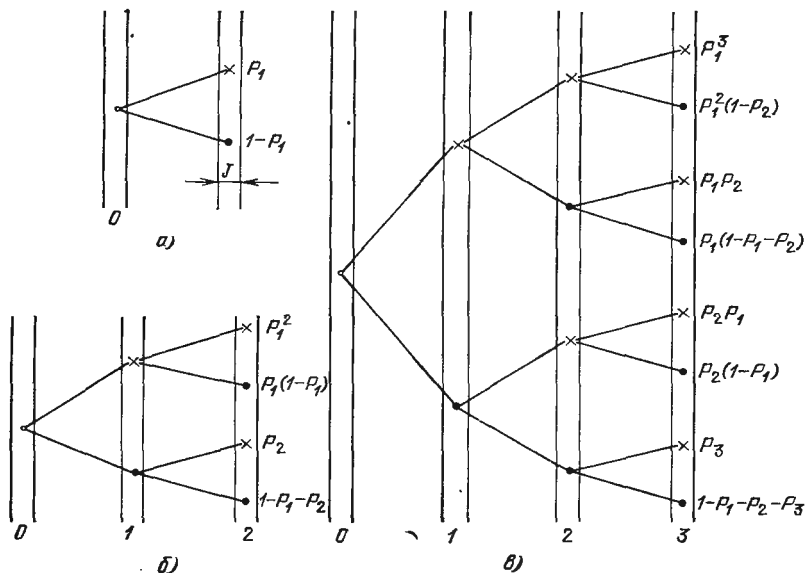


Рис. 19.10. Графы возможных исходов

Результаты расчетов к примеру 19.11

Наработка, год	Число обследо- ванных объектов v	Число отка- завших объ- ектов m	$p_r^0 = m_r / v_r$	p_r	$\hat{F}(r)$	$\ln r$	$\ln \ln \frac{1}{1-F(r)} = l(r)$	$l(r) \ln r$	$\ln^2 r$
1	140	1	0,007	0,007	0,007	0	-4,96	0	0
2	230	4	0,017	0,017	0,024	0,69	-3,63	-2,52	0,48
3	191	10	0,052	0,052	0,076	1,10	-2,53	-2,78	1,21
4	112	12	0,107	0,106	0,182	1,39	-1,61	-2,24	1,93
5	139	16	0,115	0,112	0,294	1,61	-1,06	-1,71	2,59
6	84	8	0,095	0,087	0,381	1,79	-0,73	-1,31	3,20
7	88	15	0,170	0,154	0,535	1,95	-0,27	-0,53	3,80
8	102	10	0,098	0,069	0,604	2,08	-0,08	-0,16	4,33
9	157	9	0,157	0,117	0,721	2,20	0,24	0,53	4,84
Сумма						12,81	-14,62	-10,71	22,38

Обозначим m_j/v_j через p_j^0 . Тогда:

$$\begin{aligned}
 p_2 &= p_2^0 - p_1 p_2^0; \\
 p_3 &= p_3^0 - p_1 p_3^0 - p_2 p_3^0; \\
 &\vdots \\
 p_r &= p_r^0 - \sum_{r=1}^{M-1} p_r p_{M-r}^0.
 \end{aligned}$$

Точки эмпирической функции распределения рассчитываются следующим образом:

$$\hat{F}(0) = 0; \quad \hat{F}(1) = p_1, \quad \hat{F}(2) = p_1 + p_2, \dots, \quad \hat{F}(r) = \sum_{k=1}^r p_k, \dots,$$

Оценка параметров распределения может быть выполнена графическим методом или методом НК.

Пример 19.11. В течение полугода подверглись обследованию 1143 объекта, наработки которых, выраженные с абсолютной погрешностью 0,5 года, занимают диапазон 1—9 лет (табл. 19.9). Объекты восстанавливаемые. Требуется оценить наработку на отказ объекта.

Р е ш е н и е. Результаты расчетов приведены в табл. 19.9. Если нанести точки эмпирической функции распределения на вероятностную бумагу распределения Вейбулла—Гнеденко можно убедиться в том, что они хорошо ложатся на прямую, и явных противопоказаний к применению этого распределения не имеется.

Вычислим оценки параметров распределения методом НК:

$$\hat{b} = 2,44; \quad \ln \hat{a} = 2,09,$$

откуда

$$\hat{a} = e^{-2,09} = 8,1 \text{ и } \hat{T} = 8,1 \cdot 0,887 \simeq 7,5 \text{ лет.}$$

КОНТРОЛЬ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ

20.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Как указывалось ранее, цель контроля (контрольной процедуры) — установить, соответствует ли изделие заданным требованиям. Результатом контроля является решение о соответствии или несоответствии изделия требованиям (приемка или браковка изделия). На языке математической статистики задача контроля показателя надежности формулируется как задача проверки гипотез о его значениях. Все изложенное в этой главе относится к случаю, когда показатель надежности R возрастает с надежностью (например, T или $P(t)$).

Если в технической документации указано требуемое значение показателя $R_{тр}$, то при разработке контрольной процедуры стремятся обеспечить приемку изделий с уровнем надежности $R \geq R_{тр}$ и браковку изделий с уровнем надежности $R < R_{тр}$.

На рис. 20.1 показана зависимость вероятности приемки изделия L от его надежности R , называемая оперативной характеристикой плана контроля. Идеальная оперативная характеристика показана на рис. 20.1 жирной линией. Однако практически она недостижима, так как требует бесконечного объема наблюдений (времени наблюдений, числа образцов, опытов и т. п.). Реальная оперативная характеристика представлена на рис. 20.1 тонкой линией.

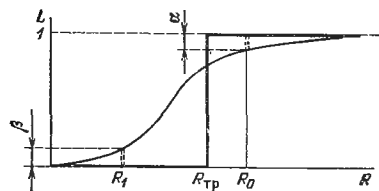


Рис. 20.1. Оперативная характеристика

Вводят два уровня контролируемого показателя надежности: приемочный R_0 и браковочный R_1 — и оговаривают значения $L(R)$ в этих точках. При этом считается, что изделия с уровнем надежности $R \geq R_0$, безусловно, приемлемы для потребителя и должны приниматься с достаточно высокой вероятностью не ниже $L(R_0)$, а изделия с уровнем $R \leq R_1$ неприемлемы и должны с высокой вероятностью (не ниже $1 - L(R_1)$) браковаться. Вероятностями противоположных событий $\alpha = 1 - L(R_0)$ и $\beta = L(R_1)$, т. е. вероятностями ошибочных выводов, принято характеризовать степень уверенности контролеров в правильности принимаемых решений. Вероятности α и β называются рисками поставщика и потребителя соответственно. Таким образом, проверка гипотезы $R \geq R_{тр}$ против гипотезы $R < R_{тр}$ заменена проверкой гипотезы $R \geq R_0$ против гипотезы $R \leq R_1$.

Как видно из рис. 20.1, величины α и β характеризуют максимально возможные вероятности ошибок в областях $R > R_0$ и $R \leq R_1$ соответственно. Это позволяет проверку сложных гипотез $R \geq R_0$ и $R \leq R_1$ заменить проверкой простых гипотез $R = R_0$ и $R = R_1$. Контроль, обеспечивающий заданные риски в этих точках, обеспечит такие же и меньшие риски в областях $R \geq R_0$ и $R \leq R_1$.

Четыре числа R_0 , R_1 , α и β определяют две точки оперативной характеристики, что при выбранной процедуре контроля (одноступенчатая, последовательная), в свою очередь, определяет план контроля, включая объем наблюдений V . Объем V является единственным ограничением, не позволяющим произвольно уменьшать риски и сближать приемочный и браковочный уровни. Поэтому при планировании контроля следует выбирать R_0 , R_1 , α и β таким образом, чтобы использовать имеющиеся возможности, не выходя за пределы последних. На различных этапах разработки, производства и эксплуатации изделий эти возможности различны, поэтому указанные параметры целесообразно выбирать на стадии разработки программы и методики контроля надежности для соответствующего этапа.

Размещение интервала $[R_1, R_0]$ относительно заданного значения $R_{тр}$ при $\alpha = \beta$ должно выбираться с учетом ущерба, наносимого потребителю приемкой плохих изделий и поставщику браковкой хороших. Если ущерб потребителя сопоставим с ущербом поставщика, интервал $[R_1, R_0]$ размещается симметрично около $R_{тр}$ так, чтобы $L(R_{тр}) \simeq 0,5$. Если ущерб потребителя невелик по сравнению с ущербом поставщика, интервал $[R_1, R_0]$ смещается влево вплоть до крайнего положения, когда $R_0 = R_{тр}$. При обратном соотношении (ущерб поставщика невелик по сравнению с ущербом потребителя) интервал смещается вправо (крайнее положение $R_1 = R_{тр}$). Вообще говоря, точки с координатами R_1 , β , и R_0 , α должны выбираться как точки равного ущерба (для поставщика и потребителя).

В главе рассматривается только случай, когда контролируемый показатель надежности является одномерной величиной типа наработки или вероятности.

Важно иметь в виду, что если для изделия нормировано несколько таких показателей надежности, то применение методов гл. 20 к каждому из них обеспечивает для изделия в целом совершенно не те риски, которые обеспечиваются для отдельных показателей надежности.

Поскольку при планировании контроля нет априорной информации, любое планирование рассчитывается на наихудший (с точки зрения различения гипотез R_0 и R_1) результат, т. е. средний, неопределенный, близкий к середине между R_0 и R_1 . Однако реальный результат $\hat{R}$ после окончания наблюдений может заметно изменять уверенность в правильности принятого решения. Принятые для планирования риски α и β характеризуют только план контроля и не могут служить мерой этой уверенности, поэтому после контроля вместо них целесообразно использовать так называемые наблюдаемые риски (см. п. 20.2.4):

после браковки наблюдаемый риск поставщика $\hat{\alpha}$ — вероятность результата, который не лучше реально полученного $\hat{R}$, при условии $R = R_0$;

после приемки наблюдаемый риск потребителя $\hat{\beta}$ — вероятность результата, который не хуже реального $\hat{R}$, при условии $R = R_1$.

В отличие от наблюдаемых обычные планируемые риски α и β определяются до испытаний. Отметим, что и те и другие риски являются условными вероятностями — при условиях $R = R_0$ или $R = R_1$. Поскольку α и β относятся к гипотетическому наихудшему результату наблюдений, а $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ — к реальному, имеют место соотношения $\hat{\alpha} \leq \alpha$ и $\hat{\beta} \leq \beta$. На рис. 20.1 области значений $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ обозначены двойной штриховой линией.

Контроль показателей надежности может производиться и без предварительного планирования объема наблюдений, когда контроль надежности совмещается с испытаниями изделий по другим параметрам или с эксплуатацией изделий. Этот случай рассмотрен в п. 20.2.5.

В процессе разработки изделий контроль надежности проводят как минимум один раз на приемочных испытаниях, зачастую используя также статистику предварительных и других испытаний. При серийном производстве изделий контроль надежности обычно предусматривают в составе периодических испытаний. Контроль надежности высоконадежных малосерийных изделий целесообразно вводить в состав типовых испытаний (обычно проводимых при изменениях конструкции, технологии или комплектующих), указывая, что основанием для проведения контроля надежности могут быть сведения о ее недостаточном уровне, полученные по результатам каких-либо испытаний или эксплуатации изделия. В каждом таком случае составляется методика контроля, учитывающая характер поступивших сведений и имеющиеся возможности. Контроль надежности больших сложных изделий с широким применением резервирования может быть включен в состав приемочно-сдаточных испытаний, поскольку большой объем получаемой ста-

истики и применение расчетно-экспериментального метода позволяет проводить контроль ПН, совмещая его с другими проверками и практически не увеличивая общее время испытаний.

Общие рекомендации гл. 18 о классификации отказов, организации наблюдений и т. д., очевидно, должны соблюдаться и при контроле надежности.

20.2. ОДНОСТУПЕНЧАТЫЙ КОНТРОЛЬ

В данном параграфе приводятся планы контроля (формулы и таблицы) показателей типа наработки и вероятности для наиболее распространенных случаев. Кроме того, излагаются общий метод одноступенчатого контроля, метод определения наблюдаемых рисков после контроля, а также методы контроля без предварительного планирования.

20.2.1. Одноступенчатый контроль показателей типа наработки. Рассмотрим контроль показателей типа наработки для случая, когда наработка между отказами имеет экспоненциальное распределение. Продолжительность контроля ограничена некоторым предельным временем (наработкой). Для выбора плана контроля абсолютные значения уровней $R_0 = T_0$ и $R_1 = T_1$ несущественны, план определяется лишь их отношением T_0/T_1 и рисками α и β . Для некоторого упрощения контрольной процедуры приемку (браковку) в данном случае принято проводить не по уровню самого контролируемого показателя надежности, а по связанному с ним числу возникших отказов.

В процессе контроля наработки на отказ фиксируется суммарное по всем N контролируемым образцам изделия число отказов r , а также суммарная наработка $t_\Sigma = \sum_i t_{ni}$, где t_{ni} — наработка i -го образца, значения которой могут быть различными. План контроля представляет собой пару чисел: браковочное число отказов $r_{бр}$ и предельную суммарную наработку t_{max} . Контроль прекращается, как только будет достигнуто одно из этих значений.

Если первым достигается $r = r_{бр}$ при $t_\Sigma < t_{max}$, то изделие бракуется; если первым достигается $t_\Sigma = t_{max}$ при $r < r_{бр}$, то изделие принимается.

План выбирается в соответствии с табл. 20.1. Поскольку число отказов дискретно, при заданных значениях α и β отношение T_0/T_1 , соответствующее точному решению задачи, также принимает дискретные значения. Для справок в таблице также приведено значение средней (суммарно по всем образцам) продолжительности контрольной процедуры $\bar{t}_k$ для изделия, показатель надежности которого соответствует приемочному уровню T_0 . Величины $\bar{t}_k$ и t_{max} приводятся в единицах T_0 (в таблице указаны отношения $\bar{t}_k/T_0$ и t_{max}/T_0). Отношение T_0/T_1 вычислено для каждой пары значений α и β для 18 значений $r_{бр}$ по формуле

$$T_0/T_1 = \chi_{1-\beta, 2r_{бр}}^2 / \chi_{\alpha, 2r_{бр}}^2,$$

где $\chi_{1-\beta, 2r_{бр}}^2$ и $\chi_{\alpha, 2r_{бр}}^2$ — квантили уровней $1 - \beta$ и α χ^2 -распределения с $2r_{бр}$ степенями свободы.

Величина t_{max}/T_0 вычислена по формуле

$$t_{max}/T_0 = 1/2\chi_{\alpha, 2r_{бр}}^2.$$

Оперативная характеристика любого из приведенных в таблице планов может быть построена по формуле

$$L(T) = \sum_{r=0}^{r_{бр}-1} \frac{(t_{max}/T)^r e^{-t_{max}/T}}{r!}.$$

Общую продолжительность контроля можно по желанию изменять в широких пределах за счет пропорционального изменения числа контролируемых образцов с единственным условием: обеспечить требуемую суммарную наработку

**Характеристики планов испытаний для показателей
типа наработки при одноступенчатом контроле**

Исходные данные T_0/T_1 для β , равного				План контроля		$\bar{t}_K/T_0$
0,05	0,10	0,20	0,30	r_{6p}	t_{max}/T_0	
1	2	3	4	5	6	
$\alpha=0,05$						
58,82	45,45	31,25	23,25	1	0,052	0,04898
13,33	10,99	8,403	6,850	2	0,356	0,3385
7,692	6,493	5,235	4,425	3	0,817	0,803
5,682	4,878	4,032	3,484	4	1,366	1,344
4,651	4,065	3,413	2,994	5	1,970	1,944
4,032	3,546	3,030	2,681	6	2,613	2,587
3,646	3,205	2,762	2,469	7	3,285	3,252
3,350	2,958	2,570	2,315	8	3,981	3,945
3,077	2,770	2,427	2,193	9	4,695	4,652
2,898	2,618	2,309	2,102	10	5,425	5,376
2,747	2,500	2,217	2,020	11	6,169	6,120
2,631	2,398	2,137	1,957	12	6,924	6,876
2,531	2,315	2,070	1,901	13	7,689	7,635
2,445	2,242	2,012	1,855	14	8,464	8,413
2,369	2,178	1,961	1,815	15	9,246	9,190
2,096	1,961	1,779	1,658	20	13,2	13,134
1,942	1,815	1,669	1,567	25	17,3	17,230
1,835	1,721	1,597	1,515	30	21,5	21,414
$\alpha=0,10$						
28,57	21,74	15,38	11,36	1	0,105	0,095
8,928	7,299	5,650	4,587	2	0,532	0,503
5,714	4,831	3,891	3,278	3	1,102	1,069
4,444	3,831	3,164	2,732	4	1,745	1,694
3,769	3,289	2,762	2,421	5	2,432	2,374
3,333	2,941	2,519	2,222	6	3,152	3,082
3,039	2,703	2,331	2,083	7	3,895	3,813
2,825	2,525	2,198	1,980	8	4,656	4,568
2,659	2,392	2,096	1,897	9	5,432	5,340
2,525	2,283	2,012	1,831	10	6,221	6,121
2,415	2,193	1,945	1,776	11	7,020	6,915
2,325	2,118	1,887	1,730	12	7,829	7,711
2,247	2,057	1,838	1,692	13	8,646	8,524
2,183	2,004	1,798	1,658	14	9,469	9,336
2,127	1,953	1,760	1,628	15	10,30	10,166
1,915	1,792	1,626	1,515	20	14,52	14,346
1,792	1,672	1,538	1,445	25	18,84	18,651
1,706	1,602	1,486	1,408	30	23,23	23,020
$\alpha=0,20$						
13,51	10,31	7,246	5,405	1	0,223	0,197
5,747	4,717	3,636	2,958	2	0,824	0,753
4,098	3,472	2,785	2,358	3	1,535	1,430
3,378	2,907	2,404	2,074	4	2,297	2,258
2,967	2,590	2,174	1,908	5	3,089	2,925
2,695	2,375	2,024	1,795	6	3,903	3,727
2,500	2,227	1,919	1,715	7	4,733	4,529
2,358	2,110	1,835	1,653	8	5,576	5,347
2,247	2,020	1,770	1,602	9	6,428	6,190
2,155	1,949	1,718	1,562	10	7,289	7,027
2,079	1,890	1,675	1,529	11	8,157	7,880
2,016	1,838	1,636	1,501	12	9,031	8,742
1,961	1,795	1,605	1,475	13	9,910	9,603
1,916	1,757	1,577	1,453	14	10,79	10,466
1,872	1,724	1,553	1,435	15	11,68	11,341
1,718	1,608	1,460	1,360	20	16,17	15,782

Исходные данные T_0/T_1 для β , равного				План контроля		$\bar{t}_K/T_0$
0,05	0,10	0,20	0,30	r_{6p}	t_{max}/T_0	
1	2	3	4	5	6	
1,628	1,520	1,398	1,316	25	20,72	20,264
1,565	1,468	1,362	1292	30	25,32	24,814
$\alpha=0,30$						
8,403	6,451	4,525	3,378	1	0,356	0,263
4,329	3,546	2,732	2,222	2	1,097	0,935
3,289	2,785	2,237	1,890	3	1,914	1,719
2,809	2,415	1,996	1,724	4	2,763	2,509
2,519	2,202	1,852	1,621	5	3,633	3,339
2,325	2,053	1,751	1,550	6	4,517	4,187
2,188	1,945	1,678	1,499	7	5,410	5,042
2,083	1,865	1,621	1,460	8	6,312	5,908
2,000	1,798	1,577	1,426	9	7,220	6,787
1,930	1,748	1,538	1,400	10	8,133	7,661
1,876	1,703	1,508	1,377	11	9,050	8,552
1,825	1,664	1,481	1,358	12	9,971	9,442
1,786	1,631	1,460	1,342	13	10,90	10,344
1,748	1,602	1,439	1,328	14	11,82	11,229
1,715	1,577	1,420	1,314	15	12,75	12,138
1,595	1,490	1,353	1,261	20	17,44	16,742
1,524	1,422	1,309	1,230	25	22,16	21,340
1,473	1,383	1,282	1,215	30	26,90	25,985

t_{max} . Если предельная продолжительность контроля $t_{пред}$ задана, все образцы работают одновременно, а отказавшие заменяются (или полностью восстанавливаются), то необходимое число образцов можно определить по формуле

$$N = t_{max}/t_{пред}.$$

Если отказавшие изделия не заменяются и не восстанавливаются, число образцов для достижения той же суммарной наработки при той же общей продолжительности контроля следует увеличить, чтобы суммарная наработка добавочных образцов ΔN скомпенсировала потери наработки отказавших. В среднем $\Delta N = t_{max}/T$, где T — ожидаемое реальное значение показателя надежности изделия; во всяком случае, ΔN не превышает $r_{6p} - 1$.

Иногда используется вариант контроля, продолжительность которого ограничена некоторым заранее вычисленным числом отказов $r_{пред}$: планы $[Nur]$ и $[NRr]$. По достижении этого числа отказов подсчитывается суммарная наработка контролируемых образцов t_{Σ} и определяется точечная оценка наработки на отказ $\hat{T} = t_{\Sigma}/r_{пред}$. Если $\hat{T}$ не менее оценочного норматива C , изделие принимается, если менее — бракуется. Очевидно, что после достижения наработки $t_{\Sigma} = Cr_{пред}$ продолжать контроль не имеет смысла — приемка гарантируется. Таким образом, контроль следует продолжать либо до заданного числа отказов $r_{пред}$, если $t_{\Sigma} < Cr_{пред}$ (при этом изделие бракуется), либо до указанной наработки $t_{\Sigma} = Cr_{пред}$, если $r < r_{пред}$ (при этом изделие принимается). Это соответствует плану $[NR r_{пред} t_{\Sigma}]$ или $[Nur_{пред} t_{\Sigma}]$ и полностью эквивалентно контролю, описанному выше.

При распределении наработки между отказами (до отказа), отличным от экспоненциальным, а также при более сложных планах испытаний (усеченные выборки) для планирования одноступенчатого контроля T следует применять общие методы (см. п. 20.2.3).

20.2.2. Одноступенчатый контроль показателей типа вероятности. Контроль производится следующим образом. Если показатель надежности представ-

ляет собой вероятность наступления некоторого события A , то организуется N независимых опытов по осуществлению этого события и в каждом опыте фиксируется результат: успех, если событие A имело место, и неуспех (отказ, срыв) в противном случае. Например, при контроле $P(t)$ в каждом опыте фиксируется, проработало ли изделие безотказно время t ; при контроле K фиксируется, работоспособно ли изделие в выбранный момент времени (прямой экспериментальный метод). После N -го опыта изделие принимается, если суммарное число отказов не больше заранее вычисленного оценочного норматива $r_{бр}$, и бракуется в противном случае. Опыты могут проводиться как на одном, так и на нескольких (до N) образцах изделия при условии, что независимость опытов обеспечена либо за счет полного восстановления образца к началу очередного опыта, либо за счет разнесения опытов по времени или по образцам. Таким образом, план контроля представляет собой пару чисел $N, r_{бр}$.

План определяется по заданным P_0, P_1, α и β с помощью табл. 20.2. Значения N и $r_{бр}$, приведенные в таблице, определены решением системы уравнений:

$$\sum_{i=0}^{r_{бр}-1} C_N^i P_0^{N-i} (1-P_0)^i = 1-\alpha; \quad (20.1)$$

$$\sum_{i=0}^{r_{бр}-1} C_N^i P_1^{N-i} (1-P_1)^i = \beta. \quad (20.2)$$

Число образцов изделия находится исходя из требования независимости всех N опытов. Независимость опытов при контроле различных ПН обеспечивается по-разному.

Если контролируется показатель $P(t)$ и распределение времени безотказной работы изделия экспоненциальное, то организовать N циклов работы длительностью t можно с любым числом образцов от 1 до N . При таком распределении можно считать, что в каждом цикле изделие работает как новое, очередной цикл можно начинать сразу же после окончания предыдущего (или после ремонта, если был отказ), поскольку «предыстория» изделия в данном случае не имеет значения. Если же распределение существенно отличается от экспоненциального или оно неизвестно, то каждый цикл необходимо проводить с отдельным образцом, т. е. всего необходимо N образцов.

Если контролируется K , то контроль сводится к организации N проверок работоспособности изделия в случайные моменты времени. Проверки одного и того же образца должны быть разнесены по времени (интервал между проверками должен быть больше среднего времени безотказной работы и восстановления изделия).

При контроле $R(t)$ должны выполняться все требования, необходимые для контроля K и $P(t)$.

Пример 20.1. Определить план контроля надежности гальванических элементов, если заданы два уровня вероятности безотказной работы $P(t)$, $t = 20$ ч: $P_0 = 0,98$ и $P_1 = 0,96$, а также риски $\alpha = \beta = 0,1$.

Решение. По табл. 20.2 для заданных P_0, P_1, α и β находим $N = 473$ и $r_{бр} = 14$. Это означает, что для контроля необходимо организовать 473 цикла работы изделия длительностью 20 ч каждый. Контроль прекращается либо при возникновении 14-го отказа решением о браковке изделия, либо по окончании 473-го цикла решением о приемке, если к этому моменту число зафиксированных отказов было меньше 14.

Поскольку элемент, отработавший 20 ч, не может считаться новым (неэкспоненциальное распределение), для контроля необходимо 473 элемента.

Если исходные данные для того или иного конкретного случая отсутствуют в таблице, можно использовать номограмму, приведенную на рис. 19.7. Определение плана по номограмме осуществляется следующим образом. Между точ-

Число опытов N при одноступенчатом контроле

P_0	$\alpha = \beta = 0,1$				$\alpha = \beta = 0,2$			
	$\frac{1-P_1}{1-P_0} = 2,0$	2,5	3,0	4,0	2,0	2,5	3,0	4,0
	$r_{бр} = 14$	8	6	4	6	4	3	2
0,999	9470	4655	3150	1745	3905	2295	1535	825
0,998	3735	2328	1575	872	1953	1148	768	413
0,997	3158	1552	1050	582	1302	765	512	275
0,996	1369	1164	788	436	977	574	384	207
0,995	1895	931	630	349	781	459	307	165
0,994	1578	776	525	291	651	382	256	138
0,993	1353	665	450	249	558	328	220	118
0,992	1884	582	394	218	489	287	192	103
0,991	1052	518	350	194	434	255	171	92
0,990	947	466	315	175	391	230	154	83
0,980	473	233	158	87	196	115	77	42
0,970	315	155	105	58	131	77	52	28
0,960	237	116	79	44	98	58	39	21
0,950	189	93	63	35	78	46	31	17
0,940	158	78	53	29	66	38	26	14
0,930	135	67	45	25	56	33	22	12
0,920	118	58	40	22	49	29	20	11
0,910	106	52	35	20	44	26	17	10
0,900	95	47	32	18	37	23	16	9

кой 1 — P_0 на левой шкале и точкой 1 — α на правой проводится прямая линия. Другая прямая проводится между точкой 1 — P_1 на левой шкале и точкой β на правой. Числа N и $r_{бр}$, соответствующие ближайшей точке пересечения двух прямых на сетке номограммы, определяют искомый план контроля. Пересечения сетки номограммы соответствуют точным решениям уравнений (20.1), (20.2).

При $P_0 > 0,99$ план по номограмме определяется следующим образом. Вычисляется коэффициент $K = 0,01 (1 - P_0)$, затем находятся скорректированные уровни приемки и браковки:

$$P'_0 = 0,99; P'_1 = 1 - K (1 - P_1).$$

После этого по номограмме определяется план контроля N' , $r_{бр}$, соответствующий P'_0 , P'_1 , α и β . Чтобы теперь получить искомый план для заданных P_0 и P_1 , нужно N' умножить на K .

Пример 20.2. Заданы: $P_0 = 0,995$; $P_1 = 0,982$; $\alpha = \beta = 0,2$. Определить план испытаний.

Решение. Вычисляем $K = 0,01/0,05 = 2$ и $P'_1 = 1 - 2 \cdot 0,018 = 0,964$. По номограмме для $P'_0 = 0,99$, $P'_1 = 0,964$, $\alpha = \beta = 0,2$ находим $N' = 80$, $r_{бр} = 2$. Следовательно, искомый план контроля будет: $N = 2N' = 160$; $r_{бр} = 2$.

Оперативная характеристика выбранного тем или иным способом плана в координатах P , $L(P)$ может быть построена с помощью номограммы на рис. 19.7. Для очередного значения абсциссы P ордината $L(P)$ определяется по правой шкале. Для этого нужно провести прямую через точку 1 — P на левой шкале и точку выбранного плана N , $r_{бр}$. Точка пересечения этой прямой с правой шкалой и будет соответствовать $L(P)$, т. е. вероятности приемки изделия с показателем надежности, равным P , при данном плане контроля.

20.2.3. Одноступенчатый контроль в одномерном случае. Общий подход. Во всех случаях одноступенчатый контроль так или иначе сводится к организации наблюдений объема V с фиксацией некоторого набора (вектора) результатов наблюдений $x_1, x_2, \dots, x_n$. По окончании наблюдений вычисляется некоторая функ-

ция результатов наблюдений $\widehat{X}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, область определения которой разделена на две непересекающиеся области X_1 и X_2 . Тем самым разделяется на две области и выборочное пространство — пространство результатов наблюдений. Решение о приемке (браковке) изделия принимается на основе значения $\widehat{X}(x_1, x_2, \dots, x_n)$: если оно попадает в область X_1 , изделие принимается, если в область X_2 — бракуется. Существует множество способов разделения выборочного пространства на две области с помощью различных функций $\widehat{X}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Эти способы могут иметь различные достоинства, ценность которых определяется конкретными условиями их использования. Особое место среди них занимает критерий Неймана—Пирсона, оптимальный в следующем смысле: при заданном риске $\alpha = 1 - L(R_0)$ он обеспечивает наименьшее значение другого риска $\beta = L(R_1)$. На практике это означает также, что при двух заданных рисках для контроля по критерию Неймана—Пирсона требуется наименьший объем наблюдений.

В этом случае роль функции $\widehat{X}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ выполняет отношение правдоподобия $l(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$l(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n | R_1)}{f(x_1, x_2, \dots, x_n | R_0)},$$

где $f(x_1, x_2, \dots, x_n | R_1)$ и $f(x_1, x_2, \dots, x_n | R_0)$ — функции плотности распределения выборки $x_1, x_2, \dots, x_n$ при условии, что истинная надежность изделия находится на браковочном или приемочном уровне соответственно.

Изделие принимается, если

$$l(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq C, \quad (20.3)$$

и бракуется, если

$$l(x_1, x_2, \dots, x_n) > C, \quad (20.4)$$

где C — некоторый оценочный норматив.

Поскольку распределение наблюдаемых величин $x_1, x_2, \dots, x_n$ зависит от истинной (неизвестной) надежности изделия R и объема наблюдений V , распределение отношения правдоподобия $l(x_1, x_2, \dots, x_n)$ также зависит от R и V . Меняя объем V и оценочный норматив C , можно обеспечить заданные значения обоих рисков. Значения V и C (план контроля) определяются решением системы уравнений:

$$P\{l(x_1, x_2, \dots, x_n) > C | R = R_0; V\} = \alpha; \quad (20.5)$$

$$P\{l(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq C | R = R_1; V\} = \beta. \quad (20.6)$$

Решение задачи контроля существенно облегчается, если $x_1, x_2, \dots, x_n$ представляют собой независимые и одинаково распределенные величины с плотностью распределения $f(y, R)$. Тогда плотность распределения выборки $f(x_1, x_2, \dots, x_n | R)$ равна произведению $\prod_{i=1}^n f(x_i, R)$.

Общепринятым вычислительным приемом, облегчающим решение, является замена соотношений (20.3), (20.4) аналогичными соотношениями для соответствующих логарифмов:

условие браковки

$$\ln l(x_1, x_2, \dots, x_n) > \ln C = C'; \quad (20.7)$$

условие приемки

$$\ln l(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq C'; \quad (20.8)$$

уравнения для планирования:

$$P \{ \ln l(x_1, x_2, \dots, x_n) > C' | R = R_0; V \} = \alpha;$$

$$P \{ \ln l(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq C' | R = R_1; V \} = \beta.$$

Оперативная характеристика выбранного плана контроля V, C вычисляется как вероятность выполнения условия приемки в виде (20.3) или (20.8) при различных значениях R .

Примером применения изложенного метода являются варианты контроля, изложенные в пп. 20.2.1 и 20.2.2.

Необходимо отметить, что одноступенчатый контроль может быть прекращен не только по достижении запланированного объема наблюдений V , но и раньше, если по уже накопленной статистике можно принять решение, которое последующая статистика не в состоянии изменить. Так, можно забраковать изделие, как только число отказов достигнет браковочного числа.

Заслуживает упоминания также способ контроля надежности, использующий в качестве функции $\hat{X}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ точечную оценку заданного показателя надежности $\hat{R}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. В эксперименте объема V фиксируют статистику, необходимую для вычисления точечной оценки.

При

$$\hat{R}(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq C \quad (20.9)$$

изделие принимается, а при

$$\hat{R}(x_1, x_2, \dots, x_n) < C \quad (20.10)$$

— бракуется. План контроля V, C определяется как решение системы уравнений

$$F(C, R_1, V) = 1 - \beta; F(C, R_0, V) = \alpha,$$

где $F(y, R, V) = P \{ \hat{R} < y | R, V \}$ — функция распределения выборочной точечной оценки $\hat{R}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при фактической надежности изделия R и объеме наблюдений V . Оперативную характеристику выбранного плана можно вычислить по формуле

$$L(R) = 1 - F(C, R, V).$$

Критерий (20.9), (20.10) может не обладать оптимальными свойствами критерия (20.3), (20.4). Его целесообразно использовать, если не удастся применить (20.3), (20.4). Если выписать аналитическое выражение для $F(y, R, V)$ затруднительно, можно применить нормальное приближение или моделирование на ЭВМ.

Если имеются удобные формулы (способы) для вычисления доверительных границ $\bar{R}_{1-\beta}(\hat{R}, V)$ и $\underline{R}_{\gamma_2}(\hat{R}, V)$, контроль по точечной оценке заданного показателя надежности может быть сформулирован на основе этих границ. Тогда условие приемки (20.9) переходит в условие

$$\underline{R}_{1-\beta}(\hat{R}, V) \geq R_1; \bar{R}_{1-\alpha}(\hat{R}, V) > R_0, \quad (20.11)$$

а условие браковки (20.10) — в условие

$$\underline{R}_{1-\beta}(\hat{R}, V) < R_1; \bar{R}_{1-\alpha}(\hat{R}, V) \leq R_0. \quad (20.12)$$

Применение доверительных границ не меняет необходимого объема наблюдений по сравнению с обычным одноступенчатым контролем. Оценочный норматив также сохраняется, приняв, однако, форму условий (20.11), (20.12). Планирование контроля сводится к решению системы двух уравнений:

$$\bar{R}_{1-\alpha}(\hat{R}, V) = R_0; \quad (20.13)$$

$$\underline{R}_{1-\beta}(\hat{R}, V) = R_1. \quad (20.14)$$

Значения R^* и V^* , удовлетворяющие уравнениям (20.13), (20.14), совпадают с оценочным нормативом C и требуемым объемом V , которые используются при одноступенчатом контроле (20.9), (20.10). Это справедливо по крайней мере для случая, когда доверительные границы $\underline{R}_{\gamma_2}(\hat{R}, V)$ и $\bar{R}_{\gamma_1}(\hat{R}, V)$ монотонны по $\hat{R}$ и по V , а именно $\underline{R}_{\gamma_2}$ и $\bar{R}_{\gamma_1}$ сближаются при увеличении V и возрастают при увеличении $\hat{R}$. Значение R^* можно использовать как оценочный норматив C в обычной форме (20.9), (20.10).

Из изложенного следует, что если известны формулы или таблицы планов обычного одноступенчатого контроля, их можно использовать для определения требуемого объема контроля по доверительным границам, не решая системы (20.13), (20.14). И обратно, если таких формул нет, но есть способ вычисления доверительных границ, то система (20.13), (20.14) позволяет определить план обычного контроля, включая оценочный норматив.

20.2.4. Определение наблюдаемых рисков после контроля. Планируемые до наблюдений риски α и β в качестве меры ошибочности принятых решений не различают лучших и худших изделий, так как не зависят от результата наблюдений. После контроля, когда этот результат известен, более целесообразно в качестве такой меры использовать наблюдаемые риски $\hat{\alpha}$ или $\hat{\beta}$:

$$\hat{\alpha} = P \{ \hat{R} \leq \bar{R} | R_0 \}; \quad \hat{\beta} = P \{ \hat{R} \geq \bar{R} | R_1 \}.$$

где $\hat{R}$ — результат наблюдений. Напомним, что $\alpha = P \{ \hat{R} < C | R_0 \}$, $\beta = P \{ \hat{R} \geq C | R_1 \}$, т. е. и те и другие риски относятся к гипотетическим изделиям с $R = R_0$ или $R = R_1$, но планируемые риски относятся еще и к гипотетическому результату наблюдений C , наихудшему с точки зрения различения гипотез R_0 и R_1 . Поскольку в случае приемки заведомо $\bar{R} \geq C$, то $\hat{\alpha} \leq \alpha$; в случае браковки $\bar{R} < C$ и $\hat{\beta} \leq \beta$.

Использование наблюдаемых рисков не меняет принимаемых решений о приемке (браковке), но может существенно изменить представление о достаточности объема наблюдений, по которым принималось решение, и о достоверности последнего. Оно позволяет различать лучшие и худшие изделия среди принятых, разделять их по сортам и т. п.¹

Наблюдаемый риск поставщика $\hat{\alpha}$ определяется из соотношения

$$\bar{R}_{1-\hat{\alpha}}(\hat{R}, V) = R_0, \quad (20.15)$$

т. е. подбором доверительной вероятности $\hat{\gamma} = 1 - \hat{\alpha}$ верхняя граница одностороннего доверительного интервала контролируемого показателя совмещается с приемочным уровнем R_0 .

Наблюдаемый риск заказчика $\hat{\beta}$ определяется из соотношения

$$\underline{R}_{1-\hat{\beta}}(\hat{R}, V) = R_1. \quad (20.16)$$

¹ Дзиркал Э. В. Статистический контроль с помощью доверительных границ при фиксированном объеме наблюдений. Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика, 1982, № 2.

Пример 20.3. Заданы два уровня работки на отказ: T_0 и $T_1 = T_0/2$, $\alpha = \beta = 0,1$. Проверяются восстанавливаемые изделия с экспоненциальным распределением наработки между отказами.

Решение. По табл. 20.1 определяем план одноступенчатого контроля: $t_2 = 9,47 T_0$; $r_{бр} = 14$. Пусть при контроле одной партии изделия зафиксировано 13 отказов, при контроле другой 9. Обе партии принимаются; однако несомненно, что во втором случае вероятность ошибки существенно меньше. Значение наблюдаемого риска потребителя это подтверждает: условие (20.16) выполняется для первой партии при $\hat{\beta} = 0,1$, а для второй — при $\hat{\beta} = 0,01$. Обычный же подход позволяет утверждать только одно: риск β (планируемый) в обоих случаях равен 0,1; партии формально одинаковы. Отметим, что первая партия по числу отказов отличается от второй существенно больше, чем от партии с числом отказов $r = 14$, которая была бы уже забракована.

20.2.5. Контроль без предварительного планирования. Рассмотрим случай, когда объем наблюдений определяется организационно-техническими соображениями: используются все экспериментальные данные, позволяющие увеличить статистику, пригодную для контроля. Так, при испытаниях опытных образцов изделий контроль надежности может частично (и даже полностью) совмещаться с проверками других показателей и проводиться по данным об отказах, восстановлении и т. п., накопленным в ходе этих проверок. Аналогичная задача возникает и тогда, когда контроль планируется, но после окончания плановых наблюдений появляется возможность продолжать накопление данных — такую возможность всегда желательно использовать. Объем наблюдений может не быть известным заранее: например, при контроле надежности в ходе эксплуатации изделий используется наработка подконтрольных образцов за отчетный период (квартал, год) — величина случайная, меняющаяся зачастую в очень широких пределах.

В указанных условиях по окончании наблюдений можно применить обычную процедуру планирования пп. 20.2.1 — 20.2.3, подбирая планируемые риски так, чтобы расчетный объем наблюдений V был равен фактическому. Целью этой процедуры является вычисление оценочного норматива C , чтобы принять решение о приемке или браковке. Подобранные таким образом риски α (или β) могут использоваться в качестве меры ошибочности решения как верхняя граница наблюдаемых рисков. Однако, поскольку наблюдения уже закончены, естественнее в качестве этой меры использовать непосредственно $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$, определив их согласно п. 20.2.4.

Другим способом решения задачи является контроль с помощью доверительных границ. Процедура контроля состоит в следующем. Когда наблюдения по той или иной причине прекращаются, по накопленной статистике определяют доверительный интервал $[\bar{R}_{\gamma_1}, R_{\gamma_2}]$, подбирая γ_1 и γ_2 так, чтобы выполнялось одно из условий:

$$\bar{R}_{\gamma_2} = R_1, \bar{R}_{\gamma_1} > R_0; \quad (20.17)$$

$$\bar{R}_{\gamma_2} < R_1, \bar{R}_{\gamma_1} = R_0. \quad (20.18)$$

Меняя γ_1 и γ_2 , следует соблюдать заранее выбранное соотношение между ними (рекомендуется $\gamma_1 = \gamma_2$). При увеличении γ_1 и γ_2 доверительный интервал сужается, а при уменьшении — расширяется (с обеих сторон). Если при некоторых $\hat{\gamma}_1$ и $\hat{\gamma}_2$ выполняется (20.17), т. е. доверительный интервал левой границей совмещается с левой границей заданного интервала $[R_1, R_0]$, оставаясь шире последнего (рис. 20.2), то выносится решение о приемке и аналогично (20.16) определяется наблюдаемый риск потребителя: $\hat{\beta} = 1 - \hat{\gamma}_2$. Если выполняется (20.18), т. е. интервалы совмещаются правыми границами (рис. 20.2), то выносится решение о

браковке и аналогично (20.15) определяется наблюдаемый риск поставщика: $\hat{\alpha} = 1 - \hat{\gamma}_1$. Таким образом, если доверительный интервал смещен вправо от заданного, изделие принимается, если влево — бракуется. Очевидно, что при согласованном изменении γ_1 и γ_2 выполняется одно, и только одно, из условий (20.17), (20.18).

Строгого совмещения границ интервалов не требуется. Необходимо лишь их смещение; полное перекрытие одного другим должно быть исключено. При этом имеют место неравенства: $\hat{\beta} \leq 1 - \hat{\gamma}_2$ при $\underline{R}_{\hat{\gamma}_2} \geq R_1$ и $\bar{R}_{\hat{\gamma}_1} > R_0$; $\hat{\alpha} \leq 1 - \hat{\gamma}_1$ при $\underline{R}_{\hat{\gamma}_2} < R_1$ и $\bar{R}_{\hat{\gamma}_1} \leq R_0$.

Пример 20.4. Испытан один образец восстанавливаемого изделия с экспоненциальным распределением наработки между отказами. Установлены два уровня наработки на отказ: T_0 и $T_1 = T_0/2$; вероятности ошибок должны быть одинаковы: $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Наработка t_Σ за время испытаний составила $4T_0$, число отказов $r = 2$. Требуется решить вопрос о соответствии или несоответствии изделия заданным требованиям и указать наблюдаемый риск.

Решение. Используя соответствующие формулы расчета доверительных границ из гл. 19, записываем условие (20.17) в виде уравнений:

$$\underline{T}_{-\gamma} = T_0/2; \quad \bar{T}_{-\gamma} > T_0,$$

$$\text{или } \chi^2_{1-\gamma}(2r+2) = 4t_\Sigma/T_0; \quad \chi^2_\gamma(2r) < 2t_\Sigma/T_0$$

и условие (20.18) в виде уравнений:

$$\underline{T}_{-\gamma} < T_0/2; \quad \bar{T}_{-\gamma} = T_0$$

$$\text{или } \chi^2_{1-\gamma}(2r+2) > 4t_\Sigma/T_0; \quad \chi^2_\gamma(2r) = 2t_\Sigma/T_0.$$

Пользуясь любой стандартной таблицей χ^2 -распределения, легко видеть, что в условиях данного примера удовлетворяется условие (20.17), причем $\hat{\gamma} = 0,985$:

$$\chi^2_{0,015}(6) = 16; \quad \chi^2_{0,985}(4) = 0,36 < 8; \quad \underline{T}_{0,985} = T_0/2; \quad \bar{T}_{0,985} = 22T_0.$$

Таким образом, выносится решение о приемке изделия (наблюдаемый риск потребителя $\hat{\beta} = 0,015$).

Посмотрим, как меняются решения и риски в условиях данного примера при различном числе отказов r :

$r = 0$; тогда $\underline{T} = T_0/2$ при $\hat{\gamma} > 0,999$, а $\bar{T}_{\hat{\gamma}} = \infty$. Изделие принимается при $\hat{\beta} < 0,001$;

$$r = 1; \quad \underline{T}_{-\gamma} = T_0/2 \text{ при } \hat{\gamma} \simeq 0,995; \quad \hat{\beta} \simeq 0,005; \quad \bar{T}_{0,995} \simeq 80T_0;$$

$$r = 2; \text{ как мы уже видели, } \hat{\beta} = 0,015, \quad \bar{T}_{0,985} = 22T_0;$$

$$r = 3; \quad \underline{T}_{-\gamma} = T_0/2 \text{ при } \hat{\gamma} = 0,95; \quad \hat{\beta} \simeq 0,05; \quad \bar{T}_{0,95} = 4,9T_0;$$

$$r = 4; \quad \underline{T}_{-\gamma} = T_0/2 \text{ при } \hat{\gamma} = 0,90; \quad \hat{\beta} = 0,10; \quad \bar{T}_{0,90} = 2,3T_0;$$

$$r = 5; \quad \underline{T}_{-\gamma} = T_0/2 \text{ при } \hat{\gamma} = 0,80; \quad \hat{\beta} = 0,20; \quad \bar{T}_{0,80} = 1,3T_0$$

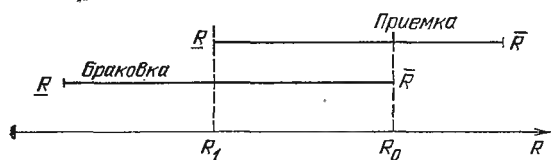


Рис. 20.2. Положение интервалов при браковке и приемке

$r = 6$; начиная с этого значения, выполняется условие браковки; $\bar{T}_v = T_0$
 при $\hat{\gamma} = 0,80$; $\hat{\alpha} = 0,20$; $\bar{T}_{0,80} = 0,44 T_0 < T_1$;

$$r = 7; \bar{T}_{\hat{\gamma}} = T_0 \text{ при } \hat{\gamma} = 0,87; \hat{\alpha} = 0,13; \bar{T}_{0,87} = 0,36 T_0;$$

$$r = 8; \bar{T}_{\hat{\gamma}} = T_0 \text{ при } \hat{\gamma} = 0,95; \hat{\alpha} = 0,05; \bar{T}_{0,95} = 0,28 T_0$$

и т. д.

Отметим, что максимальные значения рисков $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ равны 0,2. Как и следовало ожидать, они соответствуют значениям $r = 5$ и $r = 6$, т. е. результатам, при которых различить гипотезы T_0 и $T_0/2$ труднее всего. Легко убедиться, что если бы объем контроля $4T_0$ был запланирован заранее, а исходя из него (и заданного отношения $T_0/T = 2$) потребовалось бы подобрать план обычного одноступенчатого контроля, то согласно табл. 20.1 этот план был бы именно таким: $\alpha = \beta = 0,2$; $t_{\Sigma} = 4T_0$; $r_{6p} = 6$.

20.3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ КОНТРОЛЬ

В данном параграфе приводятся формулы и таблицы для построения зон приемки и браковки при последовательном контроле показателей надежности типа наработки и вероятности.

Продолжительность последовательного контроля случайна, поэтому требуемый объем наблюдений может превысить объем испытаний, достаточный для одноступенчатого контроля. В связи с этим используют усечение последовательного контроля. Однако это приводит к некоторому возрастанию рисков α и β , оценки

которых известны только для «классического» контроля Вальда при контроле показателя типа «наработка» и экспоненциальном распределении (см. п. 20.3.1).

20.3.1. Последовательный контроль показателей типа наработки. Экспоненциальное распределение. В процессе контроля фиксируются суммарная наработка t_{Σ} по всем наблюдаемым образцам и суммарное число отказов. Приемка и браковка производятся на основании числа отказов. Изделия могут восстанавливаться (заменяться) или не восстанавливаться. Планирование (рис. 20.3) состоит в построении двух границ областей приемки и браковки в системе координат, «наработка t_{Σ}/T_0 — число отказов r ».

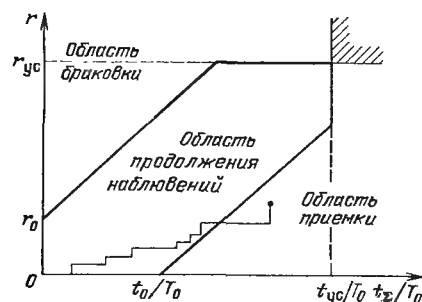


Рис. 20.3. Границы областей браковки и приемки для T

Положение этих границ в указанных координатах не зависит от абсолютных значений T_0 и T_1 , а полностью определяется их отношением. В ходе контроля на рис. 20.3 с заранее заготовленными границами строится ступенчатый график числа отказов как функции суммарной наработки. В момент каждого очередного отказа принимается одно из трех решений:

приемка, если функция $r(t_{\Sigma})$ находится в области приемки;
 браковка, если функция $r(t_{\Sigma})$ находится в области браковки;
 продолжение наблюдений, если функция $r(t_{\Sigma})$ находится в промежуточной области — области продолжения наблюдений.

Границы областей приемки и браковки представляют собой две бесконечные параллельные прямые линии. Для усечения контроля ограничивают число отказов и суммарную наработку значениями r_{yc} и t_{yc} , причем по достижении r_{yc}

при $t_2 < t_{yc}$ изделие бракуется, а по достижении t_2 при $r < r_{yc}$ — изделие принимается.

Таким образом, результирующие (с учетом усечения) границы областей приемки и браковки представляют собой ломаные линии, состоящие каждая из двух отрезков (см. рис. 20.3).

Уравнения наклонных прямых: $r = at/T_0 + r_0$ — граница области браковки; $r = a(t/T_0 - t_0/T_0)$ — граница области приемки, где r_0 и t_0/T_0 — точки пересечения прямых с осями координат.

Численные значения констант a , r_0 и t_0/T_0 определяются по табл. 20.3 как функции заданных значений α , β и отношения T_0/T_1 . В таблице приведены константы как для значений T_0/T_1 , соответствующих точным решениям задачи одноступенчатого контроля, так и для округленных значений, чаще применяемых на практике. Константы вычисляются по формулам:

$$a = \frac{T_0/T_1 - 1}{\ln(T_0/T_1)}; \quad r_0 = \frac{\ln[(1-\beta)/\alpha]}{\ln(T_0/T_1)};$$

$$\frac{t_0}{T_0} = -\frac{\ln[\beta/(1-\alpha)]}{T_0/T_1 - 1}.$$

Если $\alpha = \beta$, то $r_0 = at_0/T_0$ и уравнения прямых имеют вид $r = at/T_0 \pm r_0$. Отметим, что наклон прямых (коэффициент a) зависит только от отношения T_0/T_1 и не зависит от рисков.

Нижняя оценка средней продолжительности контроля $\bar{t}/T_0$ для восстанавливаемого образца изделия при $T = T_0$ также указана в табл. 20.3. Эта величина вычисляется по формуле

$$\frac{\bar{t}}{T_0} = \frac{(1-\alpha) \ln[(1-\alpha)/\beta] - \alpha \ln[(1-\beta)/\alpha]}{T_0/T_1 - 1 - \ln(T_0/T_1)}.$$

Число образцов изделия определяется так, чтобы обеспечивалось усечение методом одноступенчатого контроля.

Уровень усечения последовательного контроля следует выбирать, учитывая, с одной стороны, организационно-технические возможности, а с другой — связанное с усечением возрастание рисков α и β . Возрастание рисков $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ тем меньше, чем дальше (по наработке, по числу отказов) проводится усечение.

Верхние оценки $\Delta\bar{\alpha}$ и $\Delta\bar{\beta}$ можно вычислить по формулам:

$$\Delta\bar{\alpha} \leq P \left\{ \frac{2 \{ (r_{yc} \ln(T_0/T_1) - \ln[(1-\beta)/\alpha]) \}}{T_0/T_1 - 1} \leq \chi^2(2r_{yc}) < \frac{2r_{yc} \ln(T_0/T_1)}{T_0/T_1 - 1} \right\};$$

(20.19)

$$\Delta\bar{\beta} \leq P \left\{ \frac{2r_{yc} (T_0/T_1) \ln(T_0/T_1)}{T_0/T_1 - 1} \leq \chi^2(2r_{yc}) < \frac{2T_0/T_1 (r_{yc} \ln T_0/T_1 - \ln[\beta/(1-\alpha)])}{T_0/T_1 - 1} \right\},$$

где $\chi^2(2r_{yc})$ — аргумент функции χ^2 -распределения с $2r_{yc}$ степенями свободы¹.

Оценки $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ сильно завышены и имеют большой разброс при различных параметрах плана контроля. Расчеты дают следующие значения α и β (в процентах от номинальных значений α и β): 30—110 при $r_{yc} = r_{бр}$; 10—50 при $r_{yc} = 2r_{бр}$; 1—10 при $r_{yc} = 3r_{бр}$.

Учитывая то, что оценки завышены, можно рекомендовать для практики усечение на уровне $r_{yc} = (1,5-2,5) r_{бр}$.

Отметим, что требуемое для данного метода условие — принятие решения только в момент очередного отказа — не позволяет сразу принять изделие при пересечении границы зоны приемки, а требует продолжения наблюдений по край-

¹ Вскобойников В. В. Измерение величин рисков поставщика и потребителя при усечении последовательных испытаний на надежность. — Надежность и контроль качества. 1976, № 2.

Характеристики планов испытаний для показателей типа наработки при последовательном контроле (экспоненциальное распределение)

Исходные данные T_0/T_1	План контроля			$\bar{t}/T_0$	Исходные данные T_0/T_1	План контроля			$\bar{t}/T_0$
	a	r_0	t_0/T_0			a	r_0	t_0/T_0	
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
$\alpha = \beta = 0,05$									
58,8	14,2	0,72	0,049	0,049	3,50	2,00	1,11	0,555	0,667
13,3	4,76	1,14	0,239	0,272	3,00	1,82	1,26	0,693	0,923
7,69	3,28	1,44	0,440	0,570	2,79	1,74	1,35	0,777	1,09
5,68	2,69	1,70	0,629	0,90	2,50	1,64	1,51	0,924	1,42
5,00	2,49	1,83	0,736	1,11	2,40	1,60	1,58	0,987	1,58
4,65	2,38	1,92	0,806	1,25	2,17	1,51	1,79	1,18	2,09
4,03	2,17	2,11	0,971	1,62	2,02	1,45	1,97	1,35	2,61
4,00	2,16	2,12	0,981	1,64	2,00	1,44	2,00	1,39	2,71
3,64	2,04	2,28	1,12	1,97	1,92	1,43	2,13	1,51	3,11
3,50	2,00	2,35	1,18	2,12	1,84	1,38	2,28	1,66	3,65
3,30	1,93	2,47	1,28	2,40	1,77	1,35	2,43	1,80	4,18
3,08	1,85	2,62	1,42	2,78	1,72	1,33	2,56	1,93	4,70
3,00	1,82	2,68	1,47	2,94	1,68	1,31	2,69	2,05	5,23
2,90	1,78	2,77	1,55	3,18	1,64	1,29	2,81	2,18	5,79
2,75	1,73	2,91	1,69	3,60	1,61	1,28	2,93	2,29	6,31
2,63	1,69	3,04	1,81	3,99	1,58	1,27	3,04	2,40	6,85
2,53	1,65	3,17	1,92	4,40	1,55	1,26	3,15	2,51	7,86
2,50	1,64	3,21	1,96	4,54	1,50	1,23	3,42	2,77	8,80
2,45	1,62	3,29	2,04	4,81	1,46	1,22	3,66	3,47	10,2
2,37	1,59	3,41	2,15	5,23	1,40	1,19	4,13	3,48	13,2
2,10	1,48	3,98	2,69	7,44	1,36	1,17	4,48	3,83	15,7
2,00	1,44	4,25	2,94	8,64					
1,94	1,42	4,44	3,13	9,52					
1,84	1,38	4,85	3,53	11,6					
1,50	1,23	7,26	5,89	28,0					
$\alpha = \beta = 0,1$									
21,7	6,74	0,713	0,106	0,0995					
7,30	3,17	1,11	0,349	0,408					
5,00	2,49	1,37	0,549	0,735	5,00	2,49	0,526	0,212	0,142
4,83	2,43	1,40	0,574	0,780	4,00	2,16	0,611	0,282	0,210
4,00	2,16	1,59	0,732	1,09	3,50	2,00	0,676	0,339	0,272
3,83	2,11	1,64	0,776	1,18	3,38	1,95	0,696	0,356	0,292
3,50	2,00	1,75	0,879	1,41	3,00	1,82	0,771	0,424	0,376
3,29	1,92	1,85	0,960	1,60	2,50	1,64	0,925	0,565	0,581
3,00	1,82	2,00	1,10	1,95	2,22	1,53	1,06	0,693	0,800
2,94	1,80	2,04	1,13	2,04	2,00	1,44	1,22	0,847	1,10
2,70	1,71	2,21	1,29	2,48	1,89	1,40	1,33	0,952	1,34
2,53	1,65	2,38	1,44	2,94	1,72	1,33	1,56	1,170	1,89
2,50	1,64	2,40	1,46	3,01	1,62	1,29	1,75	1,364	2,46
2,39	1,60	2,52	1,58	3,38	1,55	1,26	1,93	1,54	3,03
2,28	1,55	2,66	1,71	3,84	1,50	1,23	2,09	1,69	3,58
2,19	1,52	2,81	1,84	4,31	1,46	1,22	2,24	1,84	4,16
2,12	1,49	2,93	1,97	4,78	1,43	1,20	2,39	1,99	4,76
2,06	1,47	3,05	2,08	5,24	1,40	1,19	2,52	2,12	5,33
2,00	1,44	3,16	2,19	5,69	1,38	1,18	2,65	2,25	5,94
1,95	1,42	3,28	2,31	6,20	1,36	1,17	2,76	2,37	6,52
1,79	1,36	3,77	2,77	8,42	1,34	1,16	2,88	2,48	7,08
1,67	1,31	4,27	3,27	11,1	1,33	1,16	2,99	2,58	7,65
1,60	1,28	4,66	3,65	13,4	1,31	1,15	3,10	2,70	8,28
1,50	1,23	5,42	4,39	18,6	1,26	1,13	3,65	3,25	11,6
					1,23	1,11	4,09	3,68	14,7
					1,22	1,10	4,35	3,94	16,7
$\alpha = \beta = 0,2$									
7,25	3,15	0,70	0,222	0,195					
5,00	2,49	0,712	0,347	0,348					
4,00	2,16	1,00	0,462	0,515					
3,64	2,04	1,07	0,526	0,618					

Значения r

$\frac{T_0}{T_1}$	r'_0 при α и β , равных				$\frac{T_0}{T_1}$	r'_0 при α и β , равных			
	0,05	0,1	0,2	0,3		0,05	0,1	0,2	0,3
8,0	1,01	0,80	...	...	3,5	2,01	1,44	0,82	...
7,5	1,08	0,82	...	...	3,0	2,35	1,67	0,93	0,432
7,0	1,16	0,85	0,32	...	2,5	2,88	2,06	1,16	0,641
6,5	1,24	0,88	0,38	...	2,0	3,92	3,06	1,67	0,899
6,0	1,32	0,91	0,44	...	1,9	4,25	3,09	1,82	0,961
5,5	1,41	0,94	0,50	...	1,8	4,68	3,41	2,02	1,07
5,0	1,52	0,99	0,57	...	1,7	5,21	3,81	2,28	1,26
4,5	1,64	1,09	0,64	...	1,6	5,93	4,34	2,62	1,48
4,0	1,79	1,25	0,73	...	1,5	6,93	5,08	3,08	1,76

ней мере до очередного отказа. В момент отказа ломаная $r(t_2)$ может вернуться в зону продолжения контроля, и в дальнейшем процесс может пойти как угодно. Однако существует несколько модифицированный вариант последовательного контроля, свободный от этого неудобства.

Последовательный контроль с непрерывным временем специально рассчитан на такую процедуру, при которой решение о приемке изделия принимается сразу, как только линия $r(t_2)$ пересечет границу зоны приемки. Поскольку метод более рационально использует данные о наработке контролируемых образцов изделия, средняя продолжительность контроля несколько уменьшается.

Зона приемки не меняется; граница зоны браковки смещается вниз:

$$r = at/T_0 + r'_0.$$

Значение r'_0 определяется по табл. 20.4.

20.3.2. Последовательный контроль показателей типа наработки. Распределение Вейбулла. Распределение наработки до отказа имеет вид

$$P\{t < y\} = F(y) = 1 - e^{-y^S/T}, \quad (20.20)$$

где T , S — параметры распределения. Значение S (параметр формы) считается известным. Процедура контроля аналогична указанной в п. 20.3.1, однако вместо суммарной наработки образцов фиксируется сумма $\sum_i^r (t_i/T_0)^S$, где t_i — i -я наработка. В случае восстановления образцов необходимо обеспечить их восстановление строго до исходного состояния.

Области приемки и браковки строят в координатах $\sum_i^r (t_i/T_0)^S$, r . Уравнения наклонных прямых: $r = a \sum_i^r (t_i/T_0)^S + r_0$ — граница области браковки; $r = a (\sum_i^r (t_i/T_0)^S - t_0/T_0)$ — граница области приемки.

Коэффициенты a , t_0 и r_0 определяются по формулам:

$$a = \frac{(T_0/T_1)^S - 1}{S \ln(T_0/T_1)}; \quad \frac{t_0}{T_0} = \frac{\ln[(1-\alpha)/\beta]}{(T_0/T_1)^S - 1};$$

$$r_0 = \frac{\ln[(1-\beta)/\alpha]}{S \ln(T_0/T_1)}. \quad (20.21)$$

Эти коэффициенты можно определять по табл. 20.3, используя в качестве T_0/T_1 величину $(T_0/T_1)^S$.

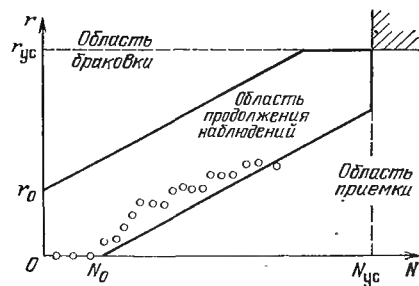


Рис. 20.4. Границы областей браковки и приемки для $P(t)$

Среднее число отказов, после возникновения которых контроль можно прекратить (при $T = T_0$), вычисляется по формуле

$$\bar{r} \approx \frac{(1-\alpha) \ln [\beta/(1-\alpha)] + \alpha \ln [(1-\beta)/\alpha]}{1 + S \ln (T_0/T_1) - (T_0/T_1)^S}. \quad (20.22)$$

20.3.3. Последовательный контроль показателей типа наработки. Усеченное нормальное распределение. Распределение наработки до отказа имеет вид

$$P\{t < y\} = F(y) = 1 - \frac{\Phi\left(\frac{T-y}{\sigma}\right)}{\Phi(T/\sigma)}, \quad y > 0, \quad (20.23)$$

где $\Phi(z)$ — стандартная функция нормального распределения; T — средняя наработка до отказа; σ — среднее квадратическое отклонение. Считается, что σ известно. Решение принимается в момент очередного отказа. Контроль может проводиться как с восстановлением отказавших образцов, так и без него. При отказе любого образца фиксируются суммарная наработка всех N образцов t_Σ и сумма всех отказов r .¹

Границы областей приемки и браковки задаются уравнениями:

$$\frac{\sigma^2}{T_1 - T_0} \ln \frac{1-\beta}{\alpha} + \frac{N(T_0 + T_1)}{2} r + \frac{r\sigma^2}{T_0 - T_1} \ln \frac{\Phi(T_1 \sqrt{N}/\sigma)}{\Phi(T_0 \sqrt{N}/\sigma)} = t_\Sigma; \quad (20.24)$$

$$\frac{\sigma^2}{T_1 - T_0} \ln \frac{\beta}{1-\alpha} + \frac{N(T_0 + T_1)}{2} r + \frac{r\sigma^2}{T_0 - T_1} \ln \frac{\Phi(T_1 \sqrt{N}/\sigma)}{\Phi(T_0 \sqrt{N}/\sigma)} = t_\Sigma. \quad (20.25)$$

Средняя продолжительность контроля при $T = T_0$

$$\bar{t} = \bar{r} \left[\frac{N(T_0 + T_1)}{2} + \frac{\sigma^2}{T_0 - T_1} \ln \frac{\Phi(T_0 \sqrt{N}/\sigma)}{\Phi(T_1 \sqrt{N}/\sigma)} \right] + \frac{\sigma^2}{T_0 - T_1} \ln \frac{\alpha}{1-\beta}, \quad (20.26)$$

где

$$\bar{r} = \frac{(1-\alpha) \left(\ln \frac{1-\alpha}{\beta} - \ln \frac{\alpha}{1-\beta} \right) + \ln \frac{\alpha}{1-\beta}}{\frac{N}{2\sigma^2} (T_0 - T_1)^2 - \ln [\Phi(T_1 \sqrt{N}/\sigma) / \Phi(T_0 \sqrt{N}/\sigma)]}.$$

20.3.4. Последовательный контроль показателей типа вероятности. Если показатель надежности представляет собой вероятность некоторого события A , то контроль этого показателя $P\{A\}$ организуется в виде ряда опытов по осуществлению этого события. В каждом опыте фиксируется результат: успех, если событие A имело место, и неуспех (отказ, срыв) в противном случае. После каждого опыта на основе общего числа опытов N и числа зафиксированных отказов r проверяется выполнение условий приемки, браковки, или продолжения наблюдений. Это делается с помощью графика, аналогичного представленному на рис. 20.3, но в координатах N, r (рис. 20.4). Контроль прекращается, как только ступенчатая функция $r(N)$ пересечет границу области приемки или браковки.

Законы распределения случайных величин, определяющих контролируемый показатель надежности, не имеют значения, поскольку независимо от них оценка имеет биномиальное распределение. Контроль может проводиться как на одном,

¹ Горалио И. Е., Марченко В. Г. Некоторые вопросы планирования испытаний изданий на технический ресурс. — Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика, 1969, № 5.

так и на нескольких образцах изделия при условии независимости опытов (см. п. 20.2.2).

Уравнения наклонных прямых: $r = aN + r_0$ — граница области браковки; $r = a(N - N_0)$ — граница области приемки, где r_0 и N_0 — точки пересечения прямых с осями координат (см. рис. 20.4). Константы a , r_0 и N_0 вычисляются по формулам:

$$a = \frac{\ln \frac{P_0}{P_1}}{\ln \frac{1-P_1}{1-P_0} + \ln \frac{P_0}{P_1}}; \quad r_0 = \frac{\ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{\ln \frac{1-P_1}{1-P_0} + \ln \frac{P_0}{P_1}}; \quad N_0 = \frac{\ln \frac{1-\alpha}{\beta}}{\ln \left(\frac{P_0}{P_1} \right)}.$$

Если $\alpha = \beta$, то $r_0 = aN_0$ и уравнения прямых имеют вид $r = aN \pm r_0$.

Средняя продолжительность контроля (среднее число опытов N) при $P = P_0$ определяется по формуле

$$\bar{N} \simeq \frac{(1-\alpha) \ln \frac{1-\alpha}{\beta} - \alpha \ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{P_0 \ln (P_0/P_1) - (1-P_0) \ln (1-P_1)/(1-P_0)}.$$

Отметим, что наклон прямых a зависит только от P_0 и P_1 и не зависит от рисков.

Значения a , r_0 , N_0 и $\bar{N}$ для наиболее встречающихся на практике значений P_0 , P_1 , α и β приведены в табл. 20.5.

Оперативная характеристика вычисляется по формуле:

$$L(1-P) \simeq \frac{1 - \left(\frac{1-\beta}{\alpha} \right)^{h(P)}}{\left(\frac{\beta}{1-\alpha} \right)^{h(P)} - \left(\frac{1-\beta}{\alpha} \right)^{h(P)}},$$

где функция $h(P)$ определяется уравнением

$$\left[\left(\frac{1-P_1}{1-P_0} \right)^h - 1 \right] / \left[\left(\frac{1-P_1}{1-P_0} \right)^h - \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^h \right] = P.$$

Усечение контроля можно производить методом, изложенным в п. 20.2.2, принимая $r_{yc} = (2 - 3) r_{бр}$.

20.3.5. Последовательный контроль в одномерном случае. Общий подход. Контроль состоит в организации независимых наблюдений на стадиях 1, 2, ..., m , в каждом из которых фиксируется некоторый результат x_m . Таким образом, на m -й стадии имеется выборка $x_1, x_2, \dots, x_m$. Известна плотность распределения величины x_m , т. е. $f[x_m] = P\{y = x_m | R\} = f(y_m, R)$ как функция контролируемого показателя надежности R . На каждой стадии контроля проверяется выполнение соотношений:

$$l = \frac{f(x_1, R_1) f(x_2, R_1) \dots f(x_m, R_1)}{f(x_1, R_0) f(x_2, R_0) \dots f(x_m, R_0)} \leq B; \quad (20.27)$$

$$l \geq A; \quad (20.28)$$

$$A > l > B, \quad (20.29)$$

где A и B — некоторые константы; l — отношение правдоподобия. При выполнении (20.27) изделие принимается, при выполнении (20.28) — бракуется, при выполнении (20.29) контроль продолжается.

Как показал Вальд, справедливы неравенства:

$$B \geq \beta / (1 - \alpha); \quad A \leq (1 - \beta) / \alpha. \quad (20.30)$$

Планирование контроля сводится к построению областей приемки и браковки в координатах, наиболее удобных для практики. Во всех случаях граница области приемки $l = B$, граница области браковки $l = A$.

**Характеристики планов испытаний для показателя типа вероятности
при последовательном контроле**

Исходные данные		План контроля			Средний объем
P_0	P_1	α	r_0	N_0	$\bar{N}$
1	2	3	4	5	6

$\alpha = \beta = 0,05$

0,999	0,998	0,00144	4,24	2940	8620
	0,997	0,00182	2,68	1470	2930
	0,996	0,00216	2,12	980	1640
	0,995	0,00249	1,82	730	1110
0,998	0,996	0,00289	4,24	1470	4300
	0,994	0,00364	2,67	733	1460
	0,992	0,00432	2,12	488	816
	0,990	0,00495	1,82	366	550
0,997	0,994	0,00433	4,23	977	2870
	0,991	0,00545	2,66	488	973
	0,988	0,00647	2,11	325	543
	0,985	0,00746	1,82	243	366
0,996	0,992	0,00577	4,22	732	2140
	0,988	0,00729	2,66	370	728
	0,984	0,00865	2,10	240	406
	0,980	0,00996	1,81	180	273
0,995	0,990	0,00722	4,22	584	1710
	0,985	0,00906	2,66	290	581
	0,980	0,0108	2,10	190	324
	0,975	0,01244	1,81	150	218
0,994	0,988	0,00866	4,21	490	1430
	0,982	0,0109	2,65	240	483
	0,976	0,0130	2,10	160	269
	0,970	0,0150	1,80	120	181
0,993	0,986	0,0101	4,21	420	1220
	0,979	0,0128	2,64	210	413
	0,972	0,0152	2,09	140	230
	0,965	0,0175	1,80	100	155
0,992	0,984	0,0115	4,20	370	1060
	0,976	0,0146	2,64	180	361
	0,968	0,0173	2,09	120	201
	0,960	0,0200	1,79	89,8	135
0,991	0,982	0,0129	4,19	320	945
	0,973	0,0164	2,64	160	320
	0,964	0,0196	2,08	110	178
	0,955	0,0225	1,79	79,6	119
0,990	0,980	0,0144	4,19	290	850
	0,970	0,0182	2,63	140	287
	0,960	0,0217	2,08	100	160
	0,950	0,0250	1,78	71,4	107
0,980	0,960	0,0289	4,12	143	418
	0,940	0,0365	2,58	70,7	140
	0,920	0,0436	2,03	46,6	78
	0,900	0,0502	1,74	34,6	52
0,970	0,940	0,0434	4,06	93,7	274
	0,910	0,0550	2,53	46,1	91
	0,880	0,0656	1,98	30,2	50,1
	0,850	0,0758	1,69	22,3	33,2
0,960	0,920	0,0578	4,00	69,2	202
	0,880	0,0734	2,48	33,8	66,9
	0,840	0,0878	1,94	22,1	36,4
	0,800	0,1027	1,64	16,1	23,9
0,950	0,900	0,0723	3,94	54,5	159
	0,850	0,0919	2,43	20,4	52,2
	0,800	0,1100	1,89	17,1	28,2
	0,750	0,1280	1,60	12,5	18,4

Исходные данные		План контроля			Средний объем
P_0	P_1	a	r_0	N_0	$\bar{N}$
1	2	3	4	5	6
0,940	0,880	0,0869	3,88	44,6	130
	0,820	0,111	2,38	21,6	42,4
	0,760	0,133	1,84	13,9	22,7
	0,700	0,155	1,55	10,0	14,7
0,930	0,860	0,101	3,82	37,6	109
	0,790	0,129	2,33	18,0	35,4
	0,720	0,156	1,79	11,5	18,8
	0,650	0,182	1,53	8,22	12
0,920	0,840	0,116	3,76	32,4	93,8
	0,760	0,148	2,28	15,4	30,2
	0,680	0,179	1,74	9,74	15,8
	0,600	0,210	1,45	6,89	10,0
0,910	0,820	0,131	3,69	28,3	81,8
	0,730	0,167	2,23	13,4	26,1
	0,640	0,202	1,69	8,37	13,5
	0,550	0,238	1,39	5,85	8,5
0,900	0,800	0,145	3,63	25,0	72
	0,700	0,186	2,18	11,7	23
	0,600	0,226	1,64	7,26	11,7
	0,500	0,268	1,34	5,01	7,20
0,890	0,780	0,160	3,57	22,3	64,4
	0,670	0,205	2,13	10,4	20,0
	0,560	0,250	1,59	6,36	10,2
	0,450	0,298	1,28	4,32	6,16
0,880	0,760	0,175	3,51	20,1	57,8
	0,640	0,225	2,08	9,25	17,9
	0,520	0,275	1,54	5,60	8,93
	0,400	0,329	1,23	3,73	5,20
0,870	0,740	0,189	3,44	18,2	52,3
	0,610	0,244	2,03	8,29	16,0
	0,480	0,300	1,48	4,95	7,86
	0,350	0,361	1,17	3,23	4,55
0,860	0,720	0,204	3,40	16,6	47,5
	0,580	0,264	1,97	7,48	14,3
	0,440	0,326	1,43	4,39	6,93
	0,300	0,396	1,13	2,80	3,89
0,850	0,700	0,219	3,32	15,2	43,4
	0,550	0,284	1,92	6,76	12,9
	0,400	0,352	1,38	3,91	6,12
	0,250	0,432	1,04	2,41	3,32

$$\alpha = \beta = 0,1$$

0,999	0,998	0,00144	3,16	2190	5730
	0,997	0,00182	2,00	1100	1950
	0,996	0,00216	1,58	730	1090
	0,995	0,00249	1,36	550	734
0,998	0,996	0,00289	3,16	1110	2860
	0,994	0,00364	2,00	550	972
	0,992	0,00432	1,58	360	542
	0,990	0,00495	1,36	273	366
0,997	0,994	0,00433	3,16	730	1900
	0,991	0,00545	1,99	364	646
	0,988	0,00647	1,57	242	360
	0,985	0,00746	1,36	180	243
0,996	0,992	0,00577	3,15	546	1420
	0,988	0,00729	1,98	270	484
	0,984	0,00865	1,57	180	270
	0,980	0,00996	1,35	136	182

Исходные данные		План контроля			Средний объем
P_0	P_1	a	r_0	N_0	$\bar{N}$
1	2	3	4	5	6
0,995	0,990	0,00722	3,15	440	1140
	0,985	0,00906	1,98	220	386
	0,980	0,0108	1,57	145	215
	0,975	0,0124	1,35	108	145
0,994	0,988	0,00866	3,14	363	947
	0,982	0,0109	1,98	180	321
	0,976	0,0130	1,56	120	179
	0,970	0,0150	1,34	89,9	120
0,993	0,986	0,0101	3,14	310	810
	0,979	0,0128	1,97	155	275
	0,972	0,0152	1,56	103	153
	0,965	0,0175	1,34	76,8	103
0,992	0,984	0,0115	3,13	270	708
	0,976	0,0146	1,97	135	240
	0,968	0,0174	1,56	89,7	133
	0,960	0,0200	1,34	67,2	89,6
0,991	0,982	0,0129	3,13	240	628
	0,973	0,0164	1,97	120	213
	0,964	0,0195	1,55	79,8	118
	0,955	0,0225	1,33	59,7	79,3
0,990	0,980	0,0144	3,12	216	564
	0,970	0,0182	1,96	108	191
	0,960	0,0217	1,55	71,6	106
	0,950	0,0250	1,33	53,3	71,2
0,980	0,960	0,0289	3,08	107	277
	0,940	0,0365	1,93	52,7	93,3
	0,920	0,0436	1,52	34,8	51,5
	0,900	0,0502	1,30	25,8	34,3
0,970	0,940	0,0434	3,03	69,9	182
	0,910	0,0550	1,89	34,4	60,7
	0,880	0,0656	1,48	22,6	33,3
	0,850	0,0758	1,26	16,6	22,1
0,960	0,920	0,0578	2,99	51,6	134
	0,880	0,0734	1,85	25,2	44,5
	0,840	0,0878	1,45	16,5	24,2
	0,800	0,1027	1,23	12,1	15,9
0,950	0,900	0,0723	2,94	40,7	105
	0,850	0,0919	1,82	19,7	34,7
	0,800	0,110	1,41	12,8	18,7
	0,750	0,128	1,19	9,33	12,2
0,940	0,880	0,0869	2,89	33,3	86,2
	0,820	0,111	1,78	16,1	28,1
	0,760	0,133	1,37	10,4	15,1
	0,700	0,155	1,15	7,46	9,75
0,930	0,860	0,101	2,85	28,1	72,6
	0,790	0,129	1,74	13,4	23,5
	0,720	0,156	1,34	8,58	12,5
	0,650	0,182	1,14	6,13	7,98
0,920	0,840	0,116	2,80	24,2	62,2
	0,760	0,148	1,70	11,5	20,0
	0,680	0,179	1,30	7,24	10,5
	0,600	0,210	1,08	5,15	6,65
0,910	0,820	0,131	2,76	21,1	54,3
	0,730	0,167	1,67	9,97	17,3
	0,640	0,202	1,26	6,25	9,02
	0,550	0,238	1,04	4,37	5,64
0,900	0,800	0,145	2,71	18,6	47,8
	0,700	0,186	1,63	8,74	15,3
	0,600	0,226	1,23	5,42	7,76
	0,500	0,268	1,00	3,74	4,78

Исходные данные		План контроля			Средний объем
P_0	P_1	a	r_0	N_0	$\bar{N}$
1	2	3	4	5	6
0,890	0,780	0,160	2,66	16,7	42,7
	0,670	0,205	1,59	7,74	13,0
	0,560	0,250	1,19	4,74	6,77
	0,450	0,298	0,96	3,22	4,09
0,880	0,760	0,175	2,62	15,0	38,3
	0,640	0,225	1,55	6,90	11,9
	0,520	0,275	1,15	4,18	5,92
	0,400	0,329	0,92	2,79	3,51
0,870	0,740	0,189	2,57	13,6	34,7
	0,610	0,244	1,51	6,19	10,6
	0,480	0,300	1,11	3,69	5,21
	0,350	0,361	0,87	2,41	3,02
0,860	0,720	0,204	2,52	12,4	31,5
	0,580	0,264	1,47	5,58	9,49
	0,440	0,326	1,07	3,28	4,60
	0,300	0,396	0,82	2,09	2,58
0,850	0,700	0,219	2,48	11,3	29,8
	0,550	0,284	1,43	5,04	8,56
	0,400	0,352	1,03	2,92	4,06
	0,250	0,432	0,78	1,80	2,20

$$\alpha = \beta = 0,2$$

0,999	0,998	0,00144	2,00	1380	2710
	0,997	0,00182	1,26	692	920
	0,996	0,00216	1,00	460	515
	0,995	0,00249	0,86	346	347
0,998	0,996	0,00289	1,99	691	1350
	0,994	0,00364	1,26	345	459
	0,992	0,00432	1,00	230	256
	0,990	0,00495	0,86	172	173
0,997	0,994	0,00433	1,99	460	899
	0,991	0,00545	1,26	230	306
	0,988	0,00647	0,99	153	170
	0,985	0,00746	0,85	114	115
0,996	0,992	0,00577	1,99	344	673
	0,988	0,00729	1,25	172	229
	0,984	0,00865	0,99	114	127
	0,980	0,00996	0,85	85,7	85,8
0,995	0,990	0,00722	1,99	275	538
	0,985	0,00906	1,25	137	183
	0,980	0,0108	0,99	91,3	102
	0,975	0,0124	0,85	68,3	68,4
0,994	0,988	0,00866	1,98	230	447
	0,982	0,0109	1,25	114	152
	0,076	0,0130	0,99	75,8	84,5
	0,970	0,0150	0,85	56,5	56,8
0,993	0,986	0,0101	1,98	196	383
	0,979	0,0128	1,25	97,5	130
	0,972	0,0152	0,98	65,0	72,2
	0,965	0,0175	0,85	48,5	48,6
0,992	0,984	0,0115	1,98	171	334
	0,976	0,0146	1,24	85,2	113
	0,968	0,0174	0,98	56,5	63,0
	0,960	0,0199	0,84	42,4	42,3
0,991	0,982	0,0129	1,97	152	297
	0,973	0,0164	1,24	75,8	100
	0,964	0,0195	0,98	50,4	55,8
	0,955	0,0225	0,84	37,7	37,5
0,990	0,980	0,0144	1,97	137	267
	0,970	0,0182	1,23	67,8	90,2
	0,960	0,0217	0,98	45,2	50,1
	0,950	0,0250	0,84	33,4	33,6

Исходные данные		План контроля			Средний объем
P_0	P_1	a	r_0	N_0	$\bar{N}$
1	2	3	4	5	6
0,980	0,960	0,0289	1,94	66,9	131
	0,940	0,0365	1,22	33,4	44,1
	0,920	0,0436	0,96	22,1	24,3
	0,900	0,0502	0,82	16,5	16,2
0,970	0,940	0,0434	1,91	44,3	86,0
	0,910	0,0550	1,19	21,7	28,7
	0,880	0,0656	0,93	14,1	15,7
	0,850	0,0758	0,80	10,4	10,4
0,960	0,920	0,0578	1,88	32,6	63,4
	0,880	0,0734	1,17	15,9	21,0
	0,840	0,0878	0,91	10,4	11,4
	0,800	0,102	0,77	7,58	7,52
0,950	0,900	0,0723	1,85	25,7	49,8
	0,850	0,0919	1,15	12,4	16,4
	0,800	0,110	0,89	8,05	8,86
	0,750	0,128	0,75	5,39	5,77
0,940	0,880	0,0869	1,83	21,0	40,8
	0,820	0,111	1,12	10,2	13,3
	0,760	0,133	0,87	6,54	7,13
	0,700	0,155	0,73	4,71	4,61
0,930	0,860	0,100	1,80	17,7	34,3
	0,790	0,130	1,10	8,47	11,1
	0,720	0,156	0,84	5,41	5,90
	0,660	0,178	0,72	3,87	3,99
0,920	0,840	0,116	1,77	15,3	34,3
	0,760	0,148	1,07	7,25	8,20
	0,680	0,179	0,82	4,57	4,50
	0,600	0,210	0,68	3,25	2,91
0,910	0,820	0,131	1,74	13,3	25,7
	0,730	0,167	1,05	6,31	8,18
	0,640	0,202	0,80	3,94	4,26
	0,550	0,238	0,66	2,75	2,66
0,900	0,800	0,145	1,71	11,8	22,7
	0,700	0,186	1,03	5,31	7,15
	0,600	0,226	0,77	3,42	3,68
	0,500	0,268	0,63	2,36	2,26
0,890	0,780	0,160	1,68	10,5	20,2
	0,670	0,205	1,00	4,00	6,31
	0,560	0,250	0,75	2,99	3,20
	0,450	0,298	0,61	2,03	1,94
0,880	0,760	0,174	1,65	9,46	18,2
	0,640	0,225	0,98	4,36	5,61
	0,520	0,275	0,72	2,64	2,81
	0,400	0,329	0,58	1,76	1,66
0,870	0,740	0,189	1,62	8,57	16,4
	0,610	0,244	0,95	3,90	5,01
	0,480	0,300	0,70	2,33	2,47
	0,350	0,361	0,55	1,52	1,43
0,860	0,720	0,204	1,59	7,82	14,9
	0,580	0,264	0,93	3,52	4,50
	0,440	0,326	0,67	2,07	2,18
	0,300	0,396	0,52	1,32	1,22
0,850	0,700	0,219	1,56	7,16	13,6
	0,550	0,284	0,90	3,18	4,05
	0,400	0,352	0,65	1,84	1,92
	0,250	0,432	0,49	1,13	1,04

$$\alpha = \beta = 0,3$$

0,999	0,998	0,00144	1,22	846	1103
	0,997	0,00182	0,77	423	375
	0,996	0,00216	0,61	282	209
	0,995	0,00249	0,52	211	141

Исходные данные		План контроля			Средний объем
P_0	P_1	a	r_0	N_0	$\bar{N}$
1	2	3	4	5	6
0,998	0,996	0,00289	1,22	422	550
	0,994	0,00364	0,77	211	187
	0,992	0,00432	0,61	141	104
	0,990	0,00495	0,52	105	70,4
0,997	0,994	0,00433	1,22	281	366
	0,991	0,00545	0,72	140	124
	0,988	0,00647	0,61	93,4	69,4
	0,985	0,00746	0,52	70,0	46,8
0,996	0,992	0,00577	1,22	211	274
	0,988	0,00729	0,76	105	93,2
	0,984	0,00865	0,61	69,9	51,9
	0,980	0,00996	0,52	52,4	35,0
0,995	0,990	0,00722	1,21	168	219
	0,985	0,00906	0,76	83,7	74,3
	0,980	0,0108	0,60	55,8	41,4
	0,975	0,0125	0,52	41,7	27,9
0,994	0,988	0,00866	1,21	140	182
	0,982	0,0109	0,76	69,6	61,8
	0,976	0,0130	0,60	46,3	34,4
	0,970	0,0150	0,52	34,5	23,1
0,993	0,986	0,0101	1,21	120	156
	0,979	0,0128	0,76	59,6	52,9
	0,972	0,0152	0,60	39,7	29,4
	0,965	0,0175	0,52	29,6	19,8
0,992	0,984	0,0115	1,21	105	136
	0,976	0,0146	0,76	52,1	46,2
	0,968	0,0174	0,60	34,5	25,7
	0,960	0,0199	0,52	25,9	17,2
0,991	0,982	0,0120	1,21	92,9	121
	0,973	0,0164	0,76	46,3	40,9
	0,964	0,0195	0,60	30,8	22,7
	0,995	0,0225	0,51	23,0	15,3
0,990	0,980	0,0144	1,20	83,5	109
	0,920	0,0182	0,76	41,4	36,8
	0,460	0,0217	0,60	27,6	20,4
	0,950	0,0250	0,51	20,4	13,7
0,980	0,960	0,0289	1,19	40,9	53,4
	0,940	0,0365	0,74	20,4	18,0
	0,920	0,0436	0,58	13,5	9,91
	0,900	0,0502	0,50	10,1	6,61
0,970	0,940	0,0434	1,17	27,0	35,0
	0,910	0,550	0,73	13,2	11,7
	0,880	0,0656	0,57	8,63	6,41
	0,850	0,0758	0,49	6,33	4,25
0,960	0,920	0,0578	1,15	19,9	25,8
	0,880	0,0734	0,71	9,73	8,56
	0,840	0,0878	0,56	6,36	4,66
	0,800	0,1027	0,47	4,63	3,06
0,950	0,900	0,0723	1,13	15,7	20,3
	0,850	0,0919	0,70	7,60	6,68
	0,810	0,110	0,54	4,93	3,61
	0,750	0,128	0,46	3,58	2,35
0,940	0,880	0,0869	1,12	12,8	16,6
	0,820	0,111	0,69	6,20	5,43
	0,760	0,133	0,53	3,99	2,91
	0,700	0,155	0,44	2,87	1,88
0,930	0,860	0,101	1,10	10,8	14,0
	0,790	0,129	0,67	5,19	4,53
	0,720	0,156	0,52	3,31	2,40
	0,660	0,178	0,44	2,47	1,63

Исходные данные		План контроля			Средний объем
P_0	P_1	a	r_0	N_0	$\bar{N}$
1	2	3	4	5	6
0,920	0,840	0,116	1,08	9,31	14,0
	0,760	0,148	0,66	4,34	3,34
	0,680	0,179	0,50	2,80	1,83
	0,600	0,210	0,42	1,98	1,19
0,910	0,820	0,131	1,06	9,10	10,5
	0,730	0,167	0,64	4,05	3,33
	0,640	0,202	0,49	2,49	1,73
	0,550	0,238	0,40	1,68	1,08
0,900	0,800	0,145	1,04	7,19	9,24
	0,700	0,186	0,63	3,37	2,91
	0,600	0,226	0,47	2,09	1,50
	0,500	0,268	0,39	1,44	0,921
0,890	0,780	0,160	1,03	6,42	8,23
	0,670	0,205	0,61	2,99	2,57
	0,560	0,250	0,46	1,83	1,30
	0,450	0,298	0,37	1,24	0,788
0,880	0,760	0,175	1,01	5,78	7,39
	0,640	0,225	0,60	2,66	2,28
	0,520	0,275	0,44	1,61	1,14
	0,400	0,329	0,35	1,07	0,677
0,870	0,740	0,189	0,99	5,24	6,69
	0,610	0,244	0,58	2,39	2,04
	0,480	0,300	0,43	1,42	1,01
	0,350	0,361	0,34	0,929	0,581
0,860	0,720	0,204	0,97	4,78	6,08
	0,580	0,264	0,57	2,15	1,83
	0,440	0,326	0,41	1,26	0,887
	0,300	0,396	0,32	0,806	0,498
0,850	0,700	0,219	0,95	4,37	5,55
	0,550	0,284	0,55	1,95	1,65
	0,400	0,352	0,40	1,13	0,783
	0,250	0,432	0,30	0,694	0,424

Методы § 20.3 представляют собой, как правило, частные случаи общего метода для различных конкретных видов функции $f[x_m]$. Так, в п. 20.2.1 $x_m = t_m$ — наработка до очередного (m -го) отказа, R — средняя наработка на отказ,

$$f(y_m, R) = \frac{1}{T} \exp\left(\frac{-t_m}{T}\right).$$

Глава 21

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ ДЛЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ

21.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Во многих случаях показатель надежности системы в целом требуется оценить на основе статистических данных (результатов испытаний) по отдельным элементам системы. Данная задача возникает, например, в следующих ситуациях.

1. Система испытывается не в том составе, для которого необходимо оценить надежность. Так, опытные образцы больших систем ради экономии средств часто

испытываемых в сокращенном составе: с меньшим числом каналов, при отсутствии некоторых резервных устройств и т. д. Та же проблема возникает при испытаниях изделий, вводимых в эксплуатацию в несколько этапов, если необходима проверка надежности по результатам испытаний первой очереди. Наконец, изделие может предназначаться для работы в нескольких вариантах, различных по составу и структуре, и оценка надежности необходима для всех вариантов, в то время как испытать изделие можно только в одном из них. Во всех этих случаях оценка надежности невозможна без соответствующего пересчета результатов испытаний

2. Статистика, по которой нужно оценить изделие, такова, что наработки отдельных составных частей изделия существенно различаются. При испытаниях сложных систем это обусловлено рядом экспериментов, не требующих использования всех компонентов, доработками отдельных устройств и т. д. Это имеет место и тогда, когда для оценки дополнительно привлекается статистика, накопленная на автономных испытаниях компонентов в других местах и в другое время, не говоря уже о случаях, когда такая разрозненная статистика является единственным материалом для оценки. Все указанные факторы приводят к тому, что традиционное понятие «наработка изделия» теряет привычный смысл: вместо одной цифры появляется набор цифр.

3. При испытаниях аппаратуры с резервом вследствие высокой надежности резервированных групп отказов группы за время испытаний может быть очень мало (или не быть вообще). В то же время отказов отдельных устройств — основных и резервных — будет, очевидно, значительно больше. Это позволяет точнее оценить надежность группы в целом.

4. Оценивается комплексный показатель надежности (коэффициент готовности и т. п.).

Получаемые оценки показателей надежности систем могут иметь определенные систематические ошибки, если специфика работы компонентов в составе системы учтена не точно. Например, идеализация контроля работоспособности всех устройств в резервированной группе или идеализация процесса перехода на резерв могут существенно завысить фактическую надежность группы.

21.2. ПОКАЗАТЕЛИ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ

Показатели надежности систем являются функциями от многих переменных — показателей надежности их элементов. Например, для последовательной системы вероятность безотказной работы является функцией m показателей $p_1, \dots, p_m$. Точные значения этих показателей, как правило, неизвестны. Предположим, что имеются данные об испытаниях элементов системы на надежность и нужно оценить $P(t_0)$ — вероятность безотказной работы системы исходя из этих данных. Пусть испытания проводятся по плану $[NUT]$, т.е. продолжительность испытаний и время безотказной работы системы T совпадают. Если регистрируются лишь числа отказавших элементов, то такие испытания называют биномиальными. Если d_i — число отказавших элементов из N_i испытанных в течение времени T , то точечная оценка вероятности безотказной работы элемента i -го типа

$$\hat{p}_i = (N_i - d_i) / N_i. \quad (21.1)$$

Оценка (21.1) является несмещенной и эффективной. Для того чтобы получить точечную оценку показателя надежности системы $P(T) = P(T, p_1, \dots, p_m)$, можно вместо неизвестных значений p_i подставить их оценки $\hat{p}_i$. Например, для последовательной системы из элементов различных типов

$$\hat{P}(T) = \prod_{i=1}^m \frac{N_i - d_i}{N_i} \quad (21.2)$$

оценка (21.2) является несмещенной оценкой $P(T)$.

Во многих случаях используются точечные оценок показателей надежности недостаточно, особенно при испытаниях высоконадежных систем. Поэтому наряду с точечными оценками, как правило, используются также интервальные оценки показателей надежности. Зависящий от результатов испытаний x интервал $(\underline{R}, \bar{R}) = (\underline{R}(x), \bar{R}(x))$ образует доверительный интервал с коэффициентом доверия не менее γ для показателя R , если

$$P\{\underline{R} \leq R \leq \bar{R}\} \geq \gamma. \quad (21.3)$$

Величина $\underline{R}$ называется нижней (односторонней) γ -доверительной границей (оценкой) для R , если $P\{\underline{R} \leq R\} \geq \gamma$. Аналогично $\bar{R}$ называется верхней γ -доверительной границей (оценкой) для R , если $P\{\bar{R} \geq R\} \geq \gamma$.

21.3. ОБЩИЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ОЦЕНОК

21.3.1. Метод доверительных множеств. Рассмотрим общую задачу построения верхних и нижних γ -доверительных оценок для функции $g(\theta)$ от неизвестных параметров $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, когда каждый параметр θ_i определяет распределение вероятностей статистических данных x_i , $i = 1, \dots, m$. Статистическая информация об истинном значении векторного параметра $\theta \in \Theta$ задается вектором данных $x = (x_1, \dots, x_m) \in X$. Здесь X — множество всех возможных значений x , а Θ — множество возможных значений параметров. Для рассмотренной в § 21.1 задачи:

$$\begin{aligned} \theta &= (p_1, \dots, p_m); \\ g(\theta) &= R(T, p); x = (d_1, \dots, d_m). \end{aligned}$$

Каждому $\theta \in \Theta$ поставим в соответствие множество в пространстве данных $G_\theta \subset X$, такое, что

$$P_\theta\{x \in G_\theta\} \geq \gamma. \quad (21.4)$$

Здесь $P_\theta(A)$ — вероятность события A при значении параметра, равном θ . При выполнении (21.4) при любом θ значения данных x окажутся в множестве G_θ с вероятностью, не меньшей γ . Исходя из системы множеств $\{G_\theta\}$ образуем систему множеств в пространстве параметров Θ . Для этого каждому $x \in X$ поставим в соответствие C_x тех значений θ , при которых $x \in G_\theta$, т. е.

$$C_x = \{\theta: x \in G_\theta\} \subset \Theta. \quad (21.5)$$

Событие $\{x \in G_\theta\}$ эквивалентно событию $\{\theta \in C_x\}$, а следовательно, с учетом (21.4) при любом θ

$$P_\theta\{\theta \in C_x\} = P_\theta\{x \in G_\theta\} \geq \gamma. \quad (21.6)$$

Система множеств $\{C_x\}$ имеет то свойство, что истинное неизвестное значение параметра θ содержится в C_x с вероятностью, не меньшей γ .

Система множеств C_x в пространстве параметров Θ , удовлетворяющая (21.4), называется системой γ -доверительных множеств. Если нижняя грань

$$\inf_{\theta \in \Theta} P_\theta\{\theta \in C_x\} = \gamma,$$

то γ называется коэффициентом доверия системы множеств $\{C_x\}$.

Задача построения нижних и верхних γ -доверительных оценок для функции $g(\theta)$ может быть решена на основе соответствующим образом построенной системы γ -доверительных множеств. Построение системы должно производиться незави-

симо от данных x , до проведения испытаний на надежность. Нижние и верхние γ -доверительные оценки находятся затем по формулам:

$$\underline{g}(x) = \inf_{\theta \in C_x} g(\theta); \quad \bar{g}(x) = \sup_{\theta \in C_x} g(\theta).$$

Действительно, так как

$$\{\theta \in C_x\} \subset \{\inf_{\theta \in C_x} g(\theta) \leq g(\theta)\};$$

$$\{\theta \in C_x\} \subset \{\sup_{\theta \in C_x} g(\theta) \geq g(\theta)\},$$

то с учетом (21.4) получаем:

$$\gamma \leq P_{\theta} \{\theta \in C_x\} \leq P_{\theta} \{g(x) \leq g(\theta)\};$$

$$\gamma \leq P_{\theta} \{\theta \in C_x\} \leq P_{\theta} \{g(\theta) \leq \bar{g}(x)\}.$$

Полученные неравенства выполняются при любом θ , и, следовательно, $\underline{g}(x)$, $\bar{g}(x)$ дают соответственно нижнюю и верхнюю γ -доверительные границы для $g(\theta)$.

21.3.2. Метод редукции. Рассмотрим сначала частный случай, когда результат наблюдений x и параметр θ являются вещественными числами. Пусть $F(x, \theta)$ — функция распределения наблюдаемых данных. Введем две функции: $u_j = u_j(\theta)$ и $v_\gamma = v_\gamma(\theta)$, положив $u_\gamma(\theta)$ равным наименьшему из чисел u , таких, что $F(u, \theta) \geq \gamma$, а $v_\gamma(\theta)$ — равным наибольшему из чисел v , таких, что $1 - F(v, \theta) \geq \gamma$. Для множества $G_\theta = \{x : x \leq u_\gamma\}$ при любом θ выполнено (21.4). Точно так же соотношение (21.4) будет выполнено, если в качестве G_θ взять множества $G_\theta = \{x : x \geq v_\gamma\}$.

В соответствии с изложенным выше общим методом γ -доверительных множеств системе $\{G_\theta\}$ соответствуют множества $C_x = \{\theta : x \leq u_\gamma(\theta)\}$, т. е. множества, образованные теми значениями θ , при которых $u_\gamma(\theta) \geq x$. Системе $\{G'_\theta\}$ соответствуют множества $C'_x = \{\theta : x \geq v_\gamma(\theta)\}$. Системы множеств $\{C_x\}$ и $\{C'_x\}$ являются системами γ -доверительных множеств. Выделим два важных частных случая: 1) u_γ и v_γ — неубывающие по θ ; 2) u_γ и v_γ — невозрастающие по θ . В обоих случаях γ -доверительные множества являются интервалами.

В первом случае нижняя γ -доверительная граница $\underline{\theta}$ и верхняя γ -доверительная граница $\bar{\theta}$ находятся как наименьшее и наибольшее решения уравнений:

$$u_\gamma(\underline{\theta}) = x; \quad v_\gamma(\bar{\theta}) = x.$$

Во втором случае они находятся как наибольшее и наименьшее решения уравнений:

$$u_\gamma(\bar{\theta}) = x; \quad v_\gamma(\underline{\theta}) = x.$$

Таким образом, определение доверительных границ вещественного одномерного параметра сравнительно несложная задача. Такой подход может быть положен в основу метода получения доверительных оценок функции $g(\theta)$ от многомерного неизвестного параметра $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ и векторных данных $x = (x_1, \dots, x_m)$. Множество $\Gamma_g = \{\theta : g(\theta) = g\}$ назовем атомом, соответствующим значению g . Построение γ -доверительных границ для $g(\theta)$ будем производить на основе некоторой вещественной статистики $T = T(x)$. Пусть $F(t, \theta)$ — функция распределения этой статистики. Как и ранее, введем две функции от θ :

$$u_\gamma(\theta) = \inf \{t : F(t, \theta) \geq \gamma\}; \tag{21.7}$$

$$v_\gamma(\theta) = \sup \{t : 1 - F(t, \theta) \geq \gamma\}.$$

Рассмотрим значения этих функций на множестве функций Γ_g . На основе функций (21.7) можно определить две функции вещественного аргумента g , положив их равными

$$u_\gamma(g) = \sup_{\theta \in \Gamma_g} u_\gamma(\theta); \quad v_\gamma(g) = \inf_{\theta \in \Gamma_g} v_\gamma(\theta). \quad (21.8)$$

Значения параметра $\theta'_g \in \Gamma_g$, в которых достигаются значения $\sup$ и $\inf$ в (21.8), естественно называть наименее благоприятными для построения доверительных оценок. Аналогично одномерному случаю можно рассмотреть графики функций (21.8). При каждом возможном значении $g = g(\theta)$ вероятность того, что $\{T(x) \leq u_\gamma(g)\}$ по построению функции $u_\gamma(g)$, не менее γ . Точно так же событие $\{T(x) \geq v_\gamma(g)\}$ при любом g имеет вероятность, не меньшую γ . Следовательно, многомерная задача как бы сведена к рассмотренной ранее одномерной.

Если $u_\gamma(g)$ и $v_\gamma(g)$ не убывают по g , то нижняя и верхняя γ -доверительные оценки находятся из уравнений:

$$T(x) = u_\gamma(\underline{g}); \quad \bar{T}(x) = v_\gamma(\bar{g}). \quad (21.9)$$

Причем в качестве $\underline{g}$ надо взять наименьшее, а в качестве $\bar{g}$ наибольшее из значений, удовлетворяющих (21.9). Если же $u_\gamma(g)$ и $v_\gamma(g)$ — невозрастающие функции g , то γ -доверительные оценки находятся из уравнений:

$$T(x) = u_\gamma(\bar{g}); \quad \bar{T}(x) = v_\gamma(\underline{g}). \quad (21.10)$$

Пример 21.1. Требуется найти нижнюю γ -доверительную оценку для вероятности безотказной работы системы, являющейся последовательной цепочкой, составленной из элементов m типов. Функции распределения времени безотказной работы элементов i -го типа — экспоненциальные, $\bar{F}_i(t) = e^{-\lambda_i t}$, $i = 1, \dots, m$. Элементы i -го типа испытывались по плану $[N_i R, T_i]$, в результате чего d_i элементов отказало, $i = 1, \dots, m$.

Решение. Для такой системы вероятность безотказной работы

$$P(t) = \exp \left\{ - \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \right\}. \quad (21.11)$$

Для получения нижней γ -доверительной границы для $P(t)$ достаточно найти верхнюю γ -доверительную границу для $g(\theta) = \sum_{i=1}^m \lambda_i$, где $\theta = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Данные об отказах представимы вектором $x = (d_1, \dots, d_m)$. В качестве $T(x)$ возьмем статистику

$$T(x) = \sum_{i=1}^m \frac{d_i}{N_i T_i}, \quad (21.12)$$

которая является несмещенной оценкой $g(\theta)$. Так как d_i имеют пуассоновское распределение, то среднее и дисперсия статистики $T(x)$

$$MT = \sum_{i=1}^m \lambda_i; \quad DT = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{N_i T_i}. \quad (21.13)$$

Из (21.11) следует, что множества Γ_g являются многогранниками:

$$\Gamma_g = \left\{ \theta : \sum_{i=1}^m \lambda_i = g, \quad \lambda_i \geq 0 \right\}. \quad (21.14)$$

Поскольку статистика (21.12) является суммой взаимно независимых случайных величин, то ее функцию распределения можно аппроксимировать нормальной функцией распределения со средним и дисперсией, определяемыми формулами (21.13). Для нормального распределения при $\theta \in \Gamma_g$ среднее $MT = g$ —

постоянно, а наименее благоприятными являются те значения параметров, при которых дисперсия обращается в максимум. Как линейная функция λ_i дисперсия DT обращается в максимум в одной из точек $\theta^i = (g\delta_{i1}, \dots, g\delta_{im})$, где $\delta_{ii} = 1$; $\delta_{ij} = 0$, $j \neq i$. Следовательно,

$$\max_{\theta \in \Gamma_g} DT = \max_i \frac{g}{N_i T_i} = \frac{g}{S_0},$$

где $S_0 = \min_i N_i T_i$ — минимальное значение суммарной наработки при испытаниях. Функции (21.8) имеют следующий вид:

$$u_\gamma(g) = g + u_\gamma \sqrt{g/S_0}; \quad v_\gamma(g) = g - u_\gamma \sqrt{g/S_0},$$

где u_γ — квантиль уровня γ стандартного нормального распределения. Найденные функции монотонно возрастают по g . Следовательно, значение $\bar{g}$ — верхней γ -доверительной границы для $n(\theta)$ — находится как решение уравнения

$$T(x) = \bar{g} - u_\gamma \sqrt{\bar{g}/S_0}. \quad (21.15)$$

Уравнение (21.15) нетрудно разрешить относительно $\bar{g}$. Если положить $\omega = \sqrt{\bar{g}}$, то (21.15) соответствует квадратному уравнению относительно ω , корнями которого являются числа $(u_\gamma/2S_0) \pm \sqrt{(u_\gamma^2/4S_0) + T^2}$.

Так как $T > 0$, то из (21.15) следует, что корень должен быть больше $u_\gamma/\sqrt{S_0}$. Таким образом, подходит лишь большой корень. В итоге получаем

$$\bar{g} = [(u_\gamma/2\sqrt{S_0}) + \sqrt{(u_\gamma^2/4S_0) + T^2}]^2.$$

Искомое значение $\underline{R}(t)$ нижней γ -доверительной границы вероятности безотказной работы в течение времени t получаем, подставив $\bar{g}$ в (21.11) вместо $g(\theta)$.

21.4. НИЖНЯЯ ДОВЕРИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМЫ В СЛУЧАЕ БЕЗОТКАЗНЫХ ИСПЫТАНИЙ КОМПОНЕНТ

Пусть элементы m типов испытываются по планам $[N, U, T]$, $i = 1, \dots, m$. Если в результате испытаний регистрируются только числа отказавших элементов, то результаты испытаний задаются вектором $x = (d_1, \dots, d_m)$, где d_i — число отказавших элементов i -го типа. Нулевой вектор $x_0 = (0, \dots, 0)$ соответствует отсутствию отказов при испытаниях. Пусть $p = (p_1, \dots, p_m)$ — вектор, компонентами которого являются вероятности p_i безотказной работы в течение времени T элементов i -го типа, $i = 1, \dots, m$. При полном отсутствии априорной информации о значениях p_i вектор p следует рассматривать как точку, принадлежащую m -мерному кубу $W_m = \{p : 0 \leq p_i \leq 1\}$. Обозначим $P_p(A)$ вероятность события A при истинном значении параметров p . Вероятность отсутствия отказов при испытаниях $P_p(x = x_0) = p_1^{N_1} \dots p_m^{N_m}$. Рассмотрим подмножество m -мерного куба

$$W_m^0 = \{p : p_1^{N_1} \dots p_m^{N_m} \geq 1 - \gamma\}, \quad (21.16)$$

т. е. подмножество, образованное теми точками p из W_m , для которых $p_1^{N_1} \dots p_m^{N_m} \geq 1 - \gamma$. Результату испытаний x поставим в соответствие множество

$$W_x = \begin{cases} W_m^0, & \text{если } x = x_0, \\ W_m, & \text{если } x \neq x_0. \end{cases} \quad (21.17)$$

Случайное множество (21.17) при любом p содержит его с вероятностью, не меньшей γ , т. е. для любого $p \in W_m$

$$P_p \{p \in W_x\} \geq \gamma. \quad (21.18)$$

В соответствии с общей процедурой построения доверительных границ (см. § 21.2) величина $\underline{R}(x) = \min_{W_x} R(T)$ дает нижнюю γ -доверительную границу для $R(T)$. При безотказных испытаниях значение нижней γ -доверительной границы

$$\underline{P}(x_0) = \min_{p \in W_m^0} P(T), \quad (21.19)$$

где минимум берется по множеству (21.16) параметров p . Обычно минимум (21.19) достигается на границе этого множества, которая соответствует уравнению

$$p_1^{N_1} p_2^{N_2} \dots p_m^{N_m} = 1 - \gamma. \quad (21.20)$$

Значение нижней γ -доверительной границы (21.19) в точке $x_0 = (0, \dots, 0)$, т. е. при безотказных испытаниях, не может быть улучшено.

Из общего выражения (21.19) можно найти нижние γ -доверительные границы надежности для систем с различной структурой. Для вероятности безотказной работы последовательной системы

$$\underline{P}(x_0) = (1 - \gamma)^{1/N_0}, \quad (21.21)$$

где $N_0 = \min_i N_i$. Таким образом, чтобы рассчитать нижнюю γ -доверительную границу последовательной системы в случае отказов при испытаниях, нужно в соответствии с (21.21) найти нижнюю γ -доверительную границу для вероятности безотказной работы элемента с минимальным объемом испытаний.

Для последовательно-параллельной системы с одинаковыми элементами внутри каждой параллельной группы нижняя γ -доверительная граница для $P(T)$

$$\underline{P} = \min_i \{1 - [1 - (1 - \gamma)^{1/N_i}]^{n_i}\}, \quad (21.22)$$

где n_i — число резервных элементов в i -й параллельной группе; N_i — объем испытаний элементов i -го типа.

Рассмотрим последовательно-параллельную систему, когда элементы, составляющие параллельные группы, могут иметь различные параметры надежности. Нижняя γ -доверительная граница для этого случая

$$\underline{P} = \min_i \{1 - \varphi_i(y_i)\}, \quad (21.23)$$

где

$$\varphi_i(y_i) = \prod_{j=1}^{n_i} \frac{y_i}{y_i + N_{ij}}, \quad (21.24)$$

n_i — по-прежнему число резервных элементов в i -й параллельной группе; N_{ij} — объем испытаний j -го элемента i -й параллельной группы; y_i находится из уравнения

$$\sum_{j=1}^{n_i} N_{ij} \ln \left(1 + \frac{y}{N_{ij}} \right) = \ln(1 - \gamma)^{-1}. \quad (21.25)$$

Если система является параллельной группой ($m = 1$), составленной из n различных резервных элементов, и количество испытываемых элементов различных типов одинаково: $N_j = N$, $j = 1, \dots, n$, то нижняя γ — доверительная граница находится в явном виде:

$$\underline{P} = 1 - [1 - (1 - \gamma)^{1/nN}]^n. \quad (21.26)$$

Рассмотрим параллельно-последовательную систему с показателем надежности вида (21.6). Пусть N_{ij} — объем испытаний j -го элемента в i -й последовательной цепочке; $N_{i0} = \min N_{ij}$, $i = 1, \dots, n$. Нижняя γ -доверительная граница в этом случае

$$\underline{P} = 1 - \prod_{i=1}^n \frac{w}{w + N_{i0}}, \quad (21.27)$$

где w — решение уравнения

$$\sum_{i=1}^n N_{i0} \ln(1 + w/N_{i0}) = \ln(1 - \gamma)^{-1}. \quad (21.28)$$

Для сложных систем можно получить приближенные значения для нижних γ -доверительных оценок $P(T)$, используя граничную нижнюю оценку для двух-полусной сети, выраженную через минимальные пути.

21.5. БИНОМИАЛЬНЫЕ ИСПЫТАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему, состоящую из m последовательно соединенных элементов с неизвестными вероятностями $p_i = P(A_i)$ безотказной работы ее элементов с номерами $i = 1, \dots, m$. Если события A_i независимы, то

$$P = \prod_{i=1}^m p_i \quad (21.29)$$

— вероятность безотказной работы системы в целом. Предположим, что каждый элемент отдельно от системы или в ее составе прошел N_i биномиальных испытаний, в которых возникают d_i отказов. Требуется по данным $N_i, d_i, i = 1, \dots, m$, испытаний найти γ -нижнюю границу $\underline{P}$ для P , т. е. статистику $\underline{P}$, такую, что $P(\underline{P} \leq P) \geq \gamma$.

Обозначим через

$$Y_x(a, b) = \int_a^x \tau^{a-1} (1 - \tau)^{b-1} d\tau \left(\int_0^1 \tau^{a-1} (1 - \tau)^{b-1} d\tau \right)^{-1} \quad (21.30)$$

неполную бета-функцию с параметрами a, b . Если положить

$$\underline{P} = \tilde{f}(N, \hat{P}, \gamma), \quad (21.31)$$

где $\hat{P} = \prod_{i=1}^m \hat{p}_i$, $\hat{p}_i = 1 - d_i/N_i$; $\tilde{f}$ — корень уравнения

$$Y_x(N\hat{P}, N(1 - \hat{P}) + 1) = 1 - \gamma, \quad (21.32)$$

разрешаемого при данных $N = \min_{i=1, \dots, m} N_i$, $\hat{P}$ и γ относительно x , то статистика $\underline{P}$ является γ -нижней границей для неизвестной вероятности P .

Пример записи результатов испытаний

$a \backslash b$	1	2	3	4	5
1	0	0	0	1	1
2	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0

При $\hat{P} = 1$, т. е. при безотказных испытаниях ($d_i = 0, i = 1, \dots, m$),

$$\underline{P} = (1 - \gamma)^{1/N}. \quad (21.33)$$

Значения функции f табулированы¹.

Пример 21.2. Рассмотрим последовательную систему из независимых элементов, испытывавшихся по биномиальному плану. Получено значение $\hat{P} = 0,92$. Найти соответствующее значение γ -нижней границы $\underline{P}$ для вероятности $P = \prod_{i=1}^m p_i$, если наименьшее из чисел испытаний $N = 15$ и выбрана доверительная вероятность $\gamma = 0,90$.

Решение. Из формул (21.31) и (21.32) и таблиц функции получаем

$$\underline{P} = f(15; 0,92; 0,90) = 0,75.$$

Если n'_i — число испытаний до первого отказа i -го элемента при $d_i > 0$ и $n'_i = n_i$ при $d_i = 0$, то статистика

$$\underline{P}' = (1 - \gamma)^{1/n'}, \quad (21.34)$$

где n' — наименьшая из величин n'_i — также является γ -нижней границей для P .

Приведем еще одно решение рассматриваемой задачи. Пусть числа испытаний N_i одинаковы: $N_i = N$. Представим исходы испытаний элементов в виде таблицы, записывая на j -е место i -го столбца 1, если i -й элемент отказал в j -м испытании, и 0 в противном случае (табл. 21.1: a — номер элемента, b — номер испытаний). Пусть r_* — число строк таблицы, в которых наблюдались отказы. Тогда статистика

$$\underline{P}'' = f(N, r_*, \gamma), \quad (21.35)$$

является нижней γ -доверительной границей для P . При равных $N_i = N$ эта граница лучше, чем граница $\underline{P}$, и в среднем лучше, чем $\underline{P}'$.

При различных N_i из каждой выборки объема N_i извлекается случайная подвыборка объема $N = \min_i N_i$. По m таким подвыборкам вновь строится таблица исходов, после чего находится статистика $\underline{P}''$, которая и в этом случае (N_i — различны) является γ -доверительной нижней границей для P .

Если P_0 — требуемое значение для P и условие $P \geq P_0$ считается выполненным при $\underline{P} \geq P_0$, то объем испытаний i -го элемента, минимально необходимый для принятия решения о том, что $P \geq P_0$, в предположении, что при испытаниях не будет отказов, находится из условия

$$N_i \geq \frac{\ln(1 - \gamma)}{\ln P_0}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (21.36)$$

Приведенные три различных выражения для нижней γ -доверительной границы вероятности $P = \prod_{i=1}^m p_i$ безотказной работы последовательной системы $\underline{P}$, $\underline{P}'$, $\underline{P}''$ не учитывают, что относительно значения P по данным проектирования и опы-

¹ Статистические задачи обработки систем и таблицы для числовых расчетов показателей надежности / Под ред. Р. С. Судакова. — М.: Высшая школа, 1975.

та эксплуатация аналогичных систем может иметься априорная информация в виде $P_{\text{н}} \leq P \leq P_{\text{в}}$, например $0,5 \leq P \leq 1$ или $P_{\text{н}} \leq P \leq 1$, где $P_{\text{н}}$ — нижний уровень, такой, что с вероятностью единица $P \geq P_{\text{н}}$. Если считать, что такая информация имеется, то можно улучшить оценки, получаемые по опытным данным для γ -доверительных нижних границ.

Нижняя граница уровня γ для P , получаемая по данным биномиальных испытаний, может быть найдена из выражения

$$\underline{P}''' = \tilde{f}(N, \hat{P}_{-}^{\delta}, \gamma), \quad (21.37)$$

где при $N_i = N$ статистика $\hat{P}_{-}$ — меньшая из величин $\hat{P}_i = 1 - d_i/N$, а коэффициент

$$\delta = \max_{P_{\text{н}} \leq P \leq 1} \max_{k=1, \dots, m} \frac{\ln \hat{f}^{-1}(P, N, \gamma)}{\ln \hat{f}^{-1}(P^{1/k}, N, \gamma_k)}. \quad (21.38)$$

Здесь $\hat{f}(x, N, z)$ — решение уравнения $x = \hat{f}(N, y, z)$ относительно y , $\gamma_k = 1 - (1 - \gamma)^{1/k}$. Учет априорной информации осуществляется, таким образом, через величину δ , которую можно получать и в том случае, когда информация относительно P отсутствует. В такой ситуации при нахождении δ следует положить $P_{\text{н}} = 0$.

При проведении ориентировочных расчетов и при отсутствии априорной информации, зная получаемый результат, можно положить $\delta = m$. Проведенные вычисления показали, что при $0 \leq P \leq 1$ часто получается такой ответ: $\delta \sim m/2$. Формула для $\underline{P}'''$ позволяет планировать испытания элементов системы исходя из условия $\underline{P}''' \geq P_0$ с учетом информации относительно значений P .

Рассмотрим интервальное оценивание показателей надежности систем с последовательно-параллельным соединением их элементов по данным биномиальных испытаний элементов. Если в системе из v параллельно соединенных элементов элементы имеют вероятности $p_i = P(A_i)$ безотказной работы, а события A_i независимы, то

$$P = 1 - \prod_{i=1}^v (1 - p_i) \quad (21.39)$$

— вероятность безотказной работы системы. Если каждый элемент данной системы испытывался в соответствии с биномиальной схемой Бернулли, то можно найти γ -доверительную нижнюю границу $\underline{\pi}$ для вероятности

$$\underline{\pi} = \prod_{i=1}^v p_i \quad (21.40)$$

безотказной работы последовательной системы, составленной из тех же элементов, что и рассматриваемая система. Тогда по статистике $\underline{\pi}$ можно найти γ -доверительную нижнюю границу для вероятности P безотказной работы рассматриваемой параллельной системы в соответствии с соотношением

$$\underline{P} = 1 - (1 - \underline{\pi}^{1/v})^v. \quad (21.41)$$

В частности, получаем формулы:

$$\underline{P} = 1 - [1 - (\hat{f}(N, \hat{\pi}, \gamma))^{1/v}]^v; \quad (21.42)$$

$$\underline{P}' = 1 - [1 - (1 - \gamma)^{1/vn}]^v; \quad (21.43)$$

$$P'' = 1 - [1 - (\hat{f}(N, r_*, \gamma))^{1/v}]^v; \quad (21.44)$$

$$P''' = 1 - [1 - (\hat{f}(N, \hat{P}_{-}^{\delta}, \gamma))^{1/v}]^v, \quad (21.45)$$

каждая из которых определяют γ -доверительную нижнюю границу для P . Эти формулы применяются в зависимости от наличия исходных данных и характера задачи, в которой используются интервальные оценки.

Рассмотрим теперь систему, составленную из m блоков, соединенных последовательно, в каждом из которых содержится v_i элементов, соединенных параллельно. Пусть $p_{ij} = P(A_{ij})$ — вероятность безотказной работы j -го элемента в i -м блоке и события A_{ij} независимы. Тогда

$$P = \prod_{i=1}^m \left[1 - \prod_{j=1}^{v_i} (1 - p_{ij}) \right] \quad (21.46)$$

— вероятность безотказной работы системы в целом. Обозначим v меньшее из чисел v_i и выберем произвольным образом из каждого блока v элементов. Если каждый из выбранных таким образом элементов испытывался в соответствии с биномиальной схемой Бернулли, то по одной из приведенных выше формул можно найти γ -доверительную нижнюю границу $\underline{p}$ для вероятности

$$\pi = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{v_i} p_{ij}, \quad (21.47)$$

т. е. для вероятности безотказной работы последовательной системы, составленной из v_m элементов.

Тогда с помощью статистики $\underline{p}$ можно найти γ -доверительную нижнюю границу $\underline{P}$ для вероятности P из выражения

$$\underline{P} = 1 - (1 - \underline{p}^{1/v})^v. \quad (21.48)$$

В частности, при безотказных испытаниях всех v выбранных элементов

$$\underline{P} = 1 - [1 - (1 - \gamma)^{1/vn}], \quad (21.49)$$

где n — меньшее из чисел испытаний.

21.6. ИСПЫТАНИЯ СИСТЕМЫ СО «СТАРЕЮЩИМИ» ЭЛЕМЕНТАМИ

Для ВФИ-распределений (обозначим этот класс Φ) выполняется неравенство

$$[1 - F(t)]^{x/t} \geq 1 - F(x). \quad (21.50)$$

В частности, при $x/t = 2$ получаем $P^2 = P^2(\xi > t) \geq P(\xi \geq 2t)$, и, значит, если $F \in \Phi$ и F — функция распределения времени жизни ξ системы, то вероятность ее безотказной работы на интервале $(0, 2t)$ меньше, чем та же вероятность в предположении независимости ее работы на каждом из интервалов $(0, t)$ и $(t, 2t)$. Значение ВФИ-распределений состоит в том, что они описывают широкий класс распределений, таких как: экспоненциальное, усеченное, нормальное, распределение Вейбулла при показателе формы больше единицы и др. Существенно, что класс Φ распределений описывает функционирование систем при наличии необратимых процессов старения и накопления повреждений. Поэтому для установления того, относится или нет распределение времени жизни данной системы к классу Φ , часто достаточно ограничиться физическим рассмотрением условий функционирования системы и не прибегать к различного вида статистическим критериям проверки гипотезы о виде функции распределения, обладающих, как известно, большими погрешностями.

Пусть проводятся n испытаний системы. Цель испытаний состоит в том, чтобы оценить вероятность

$$P = P(\xi > t) = 1 - F(t) \quad (21.51)$$

безотказной работы системы на интервале времени $(0, t)$.

Величине ξ можно придать также смысл запаса прочности системы к воздействию нагрузки t . Предположим, что испытания проводятся на время, большее или равное t . Испытания могут заканчиваться отказом или прекращаться в случайный или фиксированный момент времени $\hat{\kappa}_i$. Данный план испытаний, в котором дополнительно предполагается, что испытания независимы, а $F \in \Phi$, назовем планом «п».

Для данного плана статистика

$$\underline{P} = f(n, r, \gamma)^{t/\hat{\kappa}_*}$$

является γ -доверительной нижней границей для P . Здесь обозначено: r — число отказов до момента t (число значений $\hat{\kappa}_i < t$); $\hat{\kappa}_*$ — меньшая из величин $\hat{\kappa}_i$, превышающих t .

В случае биномиальных испытаний, когда испытания проводятся на интервале $(0, t)$, из этой формулы следует соотношение Клоппера — Пирсона $\underline{P} = \underline{P}^{\text{КП}}$, и, таким образом, формула (21.52) позволяет учесть эффект повышения нижней доверительной границы за счет того, что испытания выявляют запас

$$\eta = \kappa_*/t$$

по ресурсу системы.

Перейдем к интервальной оценке показателя $\pi = \prod_{i=1}^m p_i$ последовательной системы при $p_i = 1 - F_i(t)$, $F_i \in \Phi$. Рассматривается последовательная система и $p_i = 1 - F_i(t)$ — вероятность безотказной работы i -го элемента. Если величины ξ_i независимы и имеют распределения из класса Φ , то при равных объемах испытаний в качестве γ -доверительной нижней границы для вероятности безотказной работы системы

$$\pi = \prod_{i=1}^m [1 - F_i(t)]$$

может быть принята статистика

$$\underline{\pi} = f(n, r_*, \gamma)^{t/\hat{\kappa}'_*},$$

где r_* — число отказов на интервале $(0, t)$, определяемое путем построения таблицы типа 21.1 для интервала $(0, t)$; $\hat{\kappa}'_*$ — меньшее из минимальных продолжительностей наблюдения $\kappa_{*i} \geq t$ для всех m элементов.

Если величины ξ_i зависимы, а меньшая из них имеет ВФИ-распределение, то статистика

$$\underline{\pi} = \begin{cases} (1-\gamma)^{t/\xi_*}, & \xi_* \geq t, \\ 0, & \xi_* < t, \end{cases}$$

где

$$\xi_* = \min_{i=1, \dots, m} \min_{j=1, \dots, n} \xi_{ij}, \quad n_i = n,$$

является γ -доверительной нижней границей для вероятности

$$\pi = P\left(\bigcap_{i=1}^m (\xi_i > t)\right)$$

успешного функционирования системы из m последовательно соединенных элементов.

Рассмотрим интервальную оценку показателя

$$P = \prod_{i=1}^m \left[1 - \prod_{j=1}^{v_i} F_{ij}(t) \right]$$

последовательно-параллельной системы при $F_{ij} \in \Phi$. Если элементы системы независимы, а величины ξ_{ij} имеют ВФИ-распределения, то статистика

$$\underline{P} = 1 - (1 - \underline{\pi}^{1/\nu})^\nu, \quad \nu = \min_{i=1, \dots, m} \nu_i,$$

является γ -доверительной нижней границей для P , где $\underline{\pi}$ — нижняя граница для произведения $\pi = \prod_i \prod_j p_{ij}$, определяемая по данным, получаемым в соответствии с планом «л» для каждого из ν_m испытываемых элементов,

$$p_{ij} = 1 - F_{ij}(t), \quad F_{ij} \in \Phi.$$

21.7. ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМЫ ИЗ ЭЛЕМЕНТОВ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ НАРАБОТКИ

Предположим, что наработка до отказа ξ_i каждого элемента последовательной системы подчиняется нормальному распределению с неизвестными параметрами T_i и σ_i , $i = 1, \dots, m$, а отказы независимы. Кроме того, предполагается, что $T_i \geq 3\sigma_i$, поэтому вероятности событий $\xi_i < 0$ можно считать равными нулю.

Тогда вероятность безотказной работы системы за время t_0

$$P(t_0) = \prod_{i=1}^m \Phi^{l_i}(h_i),$$

где $h_i = \frac{T_i - t_0}{\sigma_i}$; $\Phi(z) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt$ — функция Лапласа.

В дальнейшем для простоты примем $l_i = 1$. Требуется определить γ -доверительную нижнюю границу $\underline{P}$ для вероятности $P = P(t_0)$ по результатам испытаний элементов по плану $[N\bar{U}N]$, $i = 1, \dots, m$.

Обозначим через ξ_{ij} наработку до j -го отказа элемента i -го типа, $j = 1, \dots, N_i$; $i = 1, \dots, m$. Тогда точечные оценки для параметров h_i имеют вид

$$\hat{h}_i = (\hat{T}_i - t_0)/S_i,$$

где

$$\hat{T}_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} \xi_{ij}; \quad S_i^2 = \frac{1}{N_i - 1} \sum_{j=1}^{N_i} (\xi_{ij} - \hat{T}_i)^2.$$

По найденным величинам $\hat{h}_i$ определяем последовательно: $\hat{h}_0 = \min_i \hat{h}_i$; $\hat{P}_0 = \min_i \Phi(\hat{h}_i)$, используя таблицы нормального распределения;

квантиль $h(\hat{P}_0^N) = h_0$ нормального распределения уровня; $\hat{P}_0^N$; нижнюю доверительную границу $\delta(N, h_0, 1 - \gamma)$ для параметра нецентральности δ нецентрального распределения Стьюдента по известным величинам $N = \min_i N_i$, h_0 и γ .

Величина $\underline{P}$ вычисляется далее по формуле

$$\underline{P} = \Phi(\delta/\sqrt{N}).$$

Хорошую точность обеспечивает более простая формула, не требующая таблиц нецентрального распределения Стьюдента:

$$\underline{P} \simeq \Phi(h_0 - U_\gamma(N-1)^{-1/2} (1 + h_0^2/2)^{1/2}),$$

где U_γ — квантиль нормального распределения.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ ДЛЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ, СОСТОЯЩИХ ИЗ ЭЛЕМЕНТОВ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ НАРАБОТКИ

22.1. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ГРАНИЦЫ ДЛЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ БЕЗ ВОССТАНОВЛЕНИЯ (МЕТОД ПЛОСКОСТИ)

Предположим, что система состоит из $\sum_{i=1}^m l_i$ компонент элементов m типов, соединенных последовательно. Число компонент i -го типа в системе l_i , $i = 1, \dots, m$. (В частности, при $l_i = 1$ все компоненты системы различны.)

Обозначим t_i , $i = 1, \dots, m$, заданное время работы компоненты i -го типа; $\theta_i = t_i/t_0$ — доля времени работы компоненты i -го типа в общей продолжительности работы системы $t_0 = \max_i t_i$. Нарботка τ_i до отказа i -й компоненты подчиняется экспоненциальному распределению с параметром λ_i , $i = 1, \dots, m$, а отказы компонент независимы. Тогда вероятность безотказной работы системы за время t_0

$$P(t_0) = \exp\left(-t_0 \sum_{i=1}^m \theta_i l_i \lambda_i\right), \quad (22.1)$$

где λ_i — неизвестная интенсивность отказов компонент i -го типа, $i = 1, \dots, m$.

Величины t_0 , l_i , θ_i предполагаются известными. Требуется найти односторонние доверительные границы $\underline{P}$ (нижнюю) и $\bar{P}$ (верхнюю) для показателя $P(t_0)$ с требуемой доверительной вероятностью γ . Если $\underline{P}$ и $\bar{P}$ определены, то тем самым определен двусторонний доверительный интервал уровня $\gamma' = 2\gamma - 1$.

Предположим, что исходными данными для определения $\underline{P}$ и $\bar{P}$ служат результаты испытаний компонент по одному из следующих планов:

$[N_i U(R) T_i]$ — испытания N_i образцов i -го типа в течение заданного времени T_i без замены (или с заменой) отказавших, $i = 1, \dots, m$;

$[N_i U(R) r_i]$ — испытания N_i образцов i -го типа до появления r_i отказов без замены (или с заменой) отказавших, $i = 1, \dots, m$.

Введем обозначение $\Lambda = \sum_{i=1}^m \theta_i l_i \lambda_i$. Тогда величины $\underline{P}$ и $\bar{P}$ могут быть определены по формулам:

$$\underline{P} = \exp(-t_0 \bar{\Lambda}); \quad (22.2)$$

$$\bar{P} = \exp(-t_0 \underline{\Lambda}), \quad (22.3)$$

где $\bar{\Lambda}$, $\underline{\Lambda}$ — соответственно верхняя и нижняя односторонние доверительные границы для параметра Λ уровня γ . Величины $\bar{\Lambda}$ и $\underline{\Lambda}$ в зависимости от планов испытаний определяются следующим образом. Для планов испытаний типа $[N_i U(R) T_i]$ по результатам испытаний фиксируется число отказов d_i образцов i -го типа и вычисляются суммарные наработки по формуле

$$S_i = \begin{cases} \sum_{j=1}^{d_i} \tau_j^i + (N_i - d_i) T_i & \text{при плане } U, \\ N_i T_i & \text{при плане } R. \end{cases} \quad (22.4)$$

Для планов испытаний $[N_i U(R) r_i]$ величины S_i определяются по формуле

$$S_i = \begin{cases} \sum_{j=1}^{r_i} (N_i - j + 1) (\tau_j^i - \tau_{j-1}^i) & \text{при плане } U, \\ N_i \tau_{r_i}^i & \text{при плане } R. \end{cases} \quad (22.5)$$

Зная величины S_i , искомые значения $\bar{\Lambda}$ и $\underline{\Lambda}$ находятся по формулам:

$$\bar{\Lambda} = \frac{1}{2} \chi_{\gamma}^2(D_1) \max_{i=1, \dots, m} (\theta_i l_i / S_i); \quad (22.6)$$

$$\underline{\Lambda} = \frac{1}{2} \chi_{1-\gamma}^2(D_2) \min_{i=1, \dots, m} (\theta_i l_i / S_i), \quad (22.7)$$

где $\chi_{\gamma}^2(D_1)$ и $\chi_{1-\gamma}^2(D_2)$ — квантили χ^2 -распределения соответственно с числом степеней свободы D_1 и D_2 уровня γ .

Величины D_1 и D_2 определяются по формулам:

$$D_1 = \begin{cases} 2 \sum_{i=1}^m d_i + 2 & \text{при плане } [N_i U(R) T_i], \\ 2 \sum_{i=1}^m r_i & \text{при плане } [N_i U(R) r_i]; \end{cases} \quad (22.8)$$

$$D_2 = \begin{cases} 2 \sum_{i=1}^m d_i & \text{при плане } [N_i U(R) T_i], \\ 2 \sum_{i=1}^m r_i & \text{при плане } [N_i U(R) r_i]. \end{cases} \quad (22.9)$$

Пример 22.1. Пусть: $m = 2$, т. е. система состоит из элементов двух типов; $l_1 = 3$; $l_2 = 2$ (в систему входят три элемента первого типа и два элемента второго); $\theta_1 = \theta_2 = 1$ (все элементы работают одно и то же время t_0).

Испытания элементов первого типа проводились по плану $[N_1 U T_1]$, второго — по плану $[N_2 R T_2]$, причем: $N_1 = 31$; $T_1 = 2 t_0$; $N_2 = 20$; $T_2 = 3 t_0$; до моментов T_1 и T_2 зафиксированы следующие числа отказов: $d_1 = 2$ и $d_2 = 1$.

Требуется определить односторонние доверительные границы $\underline{P}$ и $\bar{P}$ для вероятности безотказной работы системы за время t_0 при $\gamma = 0,9$.

Решение. Учитывая, что $d_1 \ll N_1$, можно суммарную наработку без большой погрешности вычислить по формуле $S_1 = T_1(N_1 - d_1/2) = 60 t_0$. Для элементов второго типа по формуле (22.4) находим $S_2 = N_2 T_2 = 60 t_0$.

По формулам (22.8) и (22.9) (верхняя строка) определяем $D_1 = 8$ и $D_2 = 6$, а затем по $\gamma = 0,9$ и таблицам χ^2 -распределения получаем $\chi_{0,9}^2(8) = 13,4$ и $\chi_{0,1}^2(6) = 0,87$.

Учитывая далее, что $l_1/S_1 = 0,05/t_0$, $l_2/S_2 = 2/60 t_0 = 0,03/t_0$, т. е. $\max (l_i/S_i) = 0,05/t_0$, а $\min (l_i/S_i) = 0,03/t_0$, находим по формулам (22.6) и (22.7) значения:

$$\bar{\Lambda} = \frac{1}{2} \chi_{0,9}^2(8) \cdot 0,05/t_0 = 0,39/t_0;$$

$$\underline{\Lambda} = \frac{1}{2} \chi_{0,1}^2(6) \cdot 0,03/t_0 = 0,013/t_0.$$

По формулам (22.2) и (22.3) получаем окончательный результат:

$$\underline{P} = \exp(-0,33) = 0,72; \quad \bar{P} = \exp(-0,013) = 0,987.$$

Одновременно находим двусторонний доверительный интервал $(\underline{P}, \bar{P}) = (0,72; 0,987)$ уровня $\gamma' = 2\gamma - 1 = 0,8$.

Пример 22.2. Пусть: $N = 2$; $l_i = 1$; $\theta_i = 1$, испытания элементов первого типа проводились по плану $[N_1 U r_1]$, второго — по плану $[N_2 R r_2]$, причем: $N_1 = 5$; $r_1 = 1$; $\tau_{r_1} = 2,5 t_0$; $N_2 = 2$; $r_2 = 1$; $\tau_{r_2} = 4,8 t_0$.

Требуется определить для вероятности безотказной работы этой системы двусторонний доверительный интервал $(\underline{P}, \bar{P})$ уровня $\gamma' = 0,9$.

Решение. Для этого достаточно найти односторонние доверительные границы P и $\bar{P}$ уровня $\gamma = 0,95$.

По формуле (22.5) находим: $S_1 = 12,5 t_0$; $S_2 = 9,6 t_0$, т. е. $\max_i (1/S_i) = 1/9,6 t_0$, а $\min_i (1/S_i) = 1/12,5 t_0$. По формулам (22.8) и (22.9) получаем $D_1 = D_2 = 4$, после чего по таблицам χ -распределения определяем значения квантилей: $\chi_{0,95}^2(4) = 9,49$; $\chi_{0,05}^2(4) = 0,71$ — и по формулам (22.6) и (22.7) находим:

$$\bar{A} = \frac{1}{2} \chi_{0,95}^2(4) 1/9,6 t_0 = 0,49/t_0;$$

$$\underline{A} = \frac{1}{2} \chi_{0,05}^2(4)/12,5 t_0 = 0,03/t_0.$$

По формулам (22.2) и (22.3) получаем $\underline{P} = 0,612$ и $\bar{P}_1 = 0,97$, т. е. двусторонний доверительный интервал уровня $\gamma' = 0,9$ равен $(0,612, 0,97)$.

22.2. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ГРАНИЦЫ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА ГОТОВНОСТИ ВОССТАНАВЛИВАЕМОГО УСТРОЙСТВА

Обозначим через ξ и η соответственно наработку до отказа и время восстановления изделия, для которого по результатам эксплуатации (испытаний) требуется оценить коэффициент готовности

$$K = \frac{T}{T + \tau}, \quad (22.10)$$

где $T = M\xi$ — средняя наработка на отказ; $\tau = M\eta$ — среднее время восстановления. Предполагается, что случайные величины ξ и η подчиняются экспоненциальному закону распределения с параметрами $\lambda = 1/T$ и $\mu = 1/\tau$ соответственно.

В качестве исходных данных используются:

1) количество образцов n изделий, находящихся в эксплуатации (на испытаниях), количество r отказавших из них и их наработки: $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ (предполагается, что оценка показателя K производится после появления r -го отказа);

2) количество m отказов изделия, по которым велись восстановительные работы и фактические времена восстановления: $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_d$, $d \leq m$.

По этим данным требуется определить нижнюю $\underline{K}$ и верхнюю $\bar{K}$ доверительные границы, соответствующие доверительным вероятностям γ_1 и γ_2 , т. е.

$$P(\underline{K} \leq K) = \gamma_1; P(\bar{K} \geq K) = \gamma_2.$$

В частности, можно полагать $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_0$.

Если найдены односторонние границы $\underline{K}$ и $\bar{K}$ уровней γ_1 и γ_2 соответственно, то одновременно найден и доверительный интервал $(\underline{K}, \bar{K})$ для показателя K уровня $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - 1$. При $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_0$ имеем $\gamma = 2\gamma_0 - 1$, и, следовательно, при заданном уровне γ для двустороннего интервала нужно определять односторонние $\underline{K}$ и $\bar{K}$ уровня $\gamma_0 = (1 + \gamma)/2$.

Перепишем соотношение (22.10) в виде

$$K = \frac{1}{1 + \rho}, \quad (22.11)$$

где $\rho = \tau/T$, и укажем правило нахождения односторонних доверительных границ $\underline{\rho}$ (нижней) и $\bar{\rho}$ (верхней) уровней γ_2 и γ_2 соответственно. Тогда границы $\underline{K}$ уровня γ_1 и $\bar{K}$ уровня γ_2 будут иметь вид:

$$\underline{K} = 1/(1 + \bar{\rho}); \quad (22.12)$$

$$\bar{K} = 1/(1 + \underline{\rho}). \quad (22.13)$$

Для определения границ $\bar{\rho}$ и $\underline{\rho}$ уровней γ_2 и γ_1 нужно предварительно вычислить суммарную наработку n изделий по формуле

$$S = \sum_{i=1}^r \xi_i + (n - r) \xi_r, \quad (22.14)$$

если восстановление отказавших изделий не производилось, и по формуле

$$S = n \xi_r, \quad (22.15)$$

если отказавшие изделия были восстановлены и работали дальше. Затем нужно вычислить суммарное время восстановления

$$V = \sum_{i=1}^d \eta_i + (m - d) \eta_d,$$

где d — число отказавших образцов из общего числа m , на которых к рассматриваемому моменту окончено восстановление. Обычно, как правило, бывает $d = m$.

На основе величин S , V , r и d определяются величины $\bar{\rho}$ и $\underline{\rho}$ по формулам:

$$\bar{\rho} = \frac{V}{S} \cdot \frac{r}{d} f_{\gamma_1}(2r, 2d); \quad (22.16)$$

$$\underline{\rho} = \frac{V}{S} \cdot \frac{r}{d} f_{1-\gamma_2}(2r, 2d), \quad (22.17)$$

где $f_{\gamma_1}(2r, 2d)$ и $f_{\gamma_2}(2r, 2d)$ — квантили F -распределения Фишера с $2r$ и $2d$ степенями свободы уровней γ_1 и $1 - \gamma_2$.

Пример 22.3. Пусть исходные статистические данные имеют вид (время в часах):

$$n = 5: \xi_1 = 845; \xi_2 = 1035; \xi_3 = 1045; \xi_4 = 1160;$$

$$\xi_5 = 1195 \quad (r = n = 5);$$

$$m = 5: \eta_1 = 5; \eta_2 = 8; \eta_3 = 15; \eta_4 = 60; \eta_5 = 65 \quad (d = m = 5).$$

Решение. По формулам (22.14) и (22.15) находим $S = 5280$, $V = 153$. По таблицам F -распределения $f_{0,9}(10, 10) = 2,32$. Следовательно, по формуле (22.16) при $\gamma_1 = 0,9$ имеем

$$\bar{\rho}_{0,9} = \frac{30,5}{1056} \cdot 2,32 = 0,067,$$

откуда по формуле (2.12) находим

$$\underline{K} = \frac{1}{1 + 0,067} = 0,937. \quad (22.18)$$

Пример 22.4. Пусть в условиях предыдущего примера $n = 25$, а $r = 5$ с теми же значениями ξ_i , число восстановлений $m = 5$ и η_i — те же. Требуется определить двусторонний доверительный интервал для K уровня $\gamma = 0,8$.

Р е ш е н и е. По формулам (22.14) и (22.15) получаем $S = 29180$ и $V = 153$.

Находим вначале односторонние границы K и $\bar{K}$ уровня $\gamma_0 = 0,9$. Табличные значения: $f_{\gamma_0}(2r, 2m) = f_{0,9}(10, 10) = 2,32$; $\bar{f}_{1-\gamma_0}(2r, 2m) = \bar{f}_{0,1}(10, 10) = 0,43$. Заметим, что $f_{1-\gamma}(a, b) = \bar{f}_{\gamma}^{-1}(b, a)$, т. е. $f_{0,1}(10, 10) = \frac{1}{f_{0,9}(10, 10)} = \frac{1}{2,32} = 0,43$.

Следовательно, по формулам (22.16) и (22.17) имеем:

$$\bar{\rho}_{0,9} = \frac{154}{29180} \cdot \frac{5}{2,32} = 0,012;$$

$$\underline{\rho}_{0,9} = \frac{153}{29180} \cdot \frac{5}{0,43} = 0,002, \text{ откуда по формулам}$$

(2.12) и (2.13) находим

$$\underline{K} = \frac{1}{1+0,12} = 0,988 \text{ и } \bar{K} = 0,998.$$

Интервал $(0,988; 0,998)$ является двусторонним доверительным интервалом для K уровня $\gamma = 0,9$.

22.3. МЕТОД ЛИНДСТРЕМА—МАДДЕНА ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Идея метода заключается в формировании «системных» испытаний на основе результатов испытаний по отдельным элементам. Вероятность безотказной работы последовательной системы в течение заданного времени t имеет вид

$$P = \exp \left(- \sum_{i=1}^m \lambda_i t \right), \quad (22.19)$$

где λ_i — параметр интенсивности отказов i -го элемента.

Пусть S_i , d_i — соответственно суммарная наработка и число отказов, зафиксированные на испытаниях элементов i -го типа. Нижняя γ -доверительная граница P_{γ} для показателя надежности системы P , вычисляемая методом Линдстрема — Маддена, определяется как

$$\underline{P}_{\gamma} = \exp \left[- \frac{\chi_{\gamma}^2(2D+2)}{2S_m} t \right], \quad (22.20)$$

где $S_m = \min_i S_i$ — минимальный объем испытаний по элементам (для определенности считаем, что минимальный объем имеет место для элемента с последним индексом m), а

$$D = \sum_{i=1}^m \left(\frac{S_m}{S_i} \right) d_i \quad (22.21)$$

— приведенное к минимальному объему испытаний S_m число «системных» отказов. Если в системе имеется различное число элементов различных типов, т. е.

$$P = \exp \left(- \sum_{i=1}^m l_i \lambda_i t \right),$$

(l_i — число элементов i -го типа), то нижняя γ -доверительная граница вычисляется по аналогичной формуле

$$\underline{P}_\gamma = \exp \left[-l_m \frac{\chi^2_{2D+2}}{2S_m} t \right], \quad (22.22)$$

$$\left(\frac{S_m}{l_m} \right) = \min_i \left(\frac{S_i}{l_i} \right), \text{ а}$$

$$D = \sum_{i=1}^m \left(\frac{S_m}{S_i} \frac{l_i}{l_m} \right) d_i. \quad (22.23)$$

Наиболее хорошо метод Линдстрема — Маддена работает при равных (или близких) объемах испытаний S_i элементов системы. Если объемы испытаний по элементам различаются существенно, то эффективность метода снижается.

22.4. МЕТОД ПОДСТАНОВКИ

Предположим, что система составлена из элементов m различных типов и распределение наработки элементов i -го типа экспоненциальное: $F_i(t) = 1 - \exp(-\lambda_i t)$ — с неизвестным параметром интенсивности отказов λ_i , $i = 1, \dots, m$. Пусть $\bar{\lambda}_i$, $\underline{\lambda}_i$ — соответственно верхняя и нижняя односторонние доверительные границы с коэффициентом доверия γ для параметров λ_i , вычисляемые по стандартным формулам:

$$\bar{\lambda}_i = \chi^2_{2d_i+2}/2S_i; \quad \underline{\lambda}_i = \chi^2_{1-\gamma, 2d_i+2}/2S_i, \quad (22.24)$$

где d_i , S_i — соответственно количество отказов и суммарная наработка, полученные в ходе испытаний элементов i -го типа, $i = 1, \dots, m$; $\chi^2_\alpha(n)$ — квантиль уровня α для χ^2 -распределения с n степенями свободы. Для планов испытаний типа $[N_i R T_i]$ в (22.24) суммарная наработка $S_i = N_i T_i$ — заранее фиксированная величина, d_i — наблюдаемое в ходе испытаний случайное количество отказов. Для планов испытаний типа $[N_i R r_i]$, $[N_i U r_i]$ в (22.24) $d_i = r_i - 1$ — заранее фиксированная константа, S_i — наблюдаемая в ходе испытаний случайная величина — суммарная наработка испытываемых элементов i -го типа.

Обозначим: $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ — вектор параметров, а $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m)$, $\underline{\lambda} = (\underline{\lambda}_1, \dots, \underline{\lambda}_m)$ — векторы соответствующих верхних и нижних γ -доверительных границ. Пусть $P(\lambda) = P(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ — функция, выражающая зависимость вероятности безотказной работы системы от показателей надежности элементов. Функция $P(\lambda)$ обычно монотонно убывает по каждому λ_i . Требуется построить доверительные границы для неизвестного значения системного показателя $P = P(\lambda)$.

Для ряда моделей сложных систем использование в процессе вычисления величины $P = P(\lambda)$ вместо неизвестных параметров λ_i их верхних доверительных границ с коэффициентом доверия γ (при $\gamma \geq 1 - e^{-3/2} \approx 0,777$) дает в результате нижнюю доверительную границу $\underline{P}$ для P с тем же коэффициентом доверия. Другими словами, доверительная оценка $\underline{P}$ вероятности безотказной работы системы с заданным коэффициентом доверия γ может производиться подстановкой γ -доверительных оценок для показателей надежности элементов в функцию, выражающую зависимость вероятности безотказной работы системы от этих показателей:

$$\underline{P} = P(\bar{\lambda}). \quad (22.25)$$

Перечислим некоторые часто используемые в теории надежности модели сложных систем, для которых справедлива указанная процедура.

22.4.1. Последовательная система. Система выходит из строя в случае отказа любого элемента. В предположении, что отказы различных элементов происходят независимо друг от друга, вероятность безотказной работы системы к заданному моменту времени $t > 0$ определяется как произведение: $p = \prod_{i=1}^m p_i(t)$, где m — число различных элементов системы; $P_i(t) = \exp(-\lambda_i t)$ — вероятность безотказной работы i -го элемента, $i = 1, \dots, m$. В переменных $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ показатель надежности системы P записывается как $P(\lambda) = \exp(-\sum_{i=1}^m \lambda_i t)$. Вычисление нижней γ -доверительной границы для R может производиться методом подстановки:

$$\underline{P} = P(\bar{\lambda}) = \exp\left(-\sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i t\right). \quad (22.26)$$

Аналогично рассматривается случай, когда в последовательной системе может быть несколько однотипных элементов с одинаковыми показателями надежности. Пусть l_i — число элементов i -го типа с параметром λ_i , $i = 1, \dots, m$. Вероятность безотказной работы системы и ее нижняя γ -доверительная граница определяются при этом как:

$$P = \prod_{i=1}^m p_i^{l_i}(t) = \exp\left(-\sum_{i=1}^m l_i \lambda_i t\right); \quad (22.27)$$

$$\underline{P} = \exp\left(-t \sum_{i=1}^m l_i \bar{\lambda}_i\right). \quad (22.28)$$

22.4.2. Последовательно-параллельная система (нагруженный резерв). Рассмотрим более общий по сравнению с предыдущим случай, когда отдельные элементы в приведенной выше последовательной схеме могут резервироваться однотипными элементами. Предположим, что i -й элемент резервируется $n_i - 1$ резервными элементами (в нагруженном режиме). Структурная схема системы представляет собой последовательное соединение m резервных групп (подсистем), i -я резервная группа составлена из n_i однотипных элементов с параметром λ_i , $i = 1, \dots, m$. В этом случае вероятность безотказной работы системы

$$P = \prod_{i=1}^m R_i(p_i), \quad (22.29)$$

где $R_i(p_i) = 1 - (1 - p_i)^{n_i}$ — надежность i -й подсистемы; $p_i = \exp(-\lambda_i t)$, $i = 1, \dots, m$. В переменных λ вероятность безотказной работы системы (22.29) может быть записана как

$$P(\lambda) = \exp[-f(\lambda)], \quad (22.30)$$

где

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^m f_i(\lambda_i), \quad f_i(\lambda_i) = -\ln[1 - (1 - e^{-\lambda_i t})^{n_i}]. \quad (22.31)$$

Нижняя γ -доверительная граница для $P(\lambda)$ может вычисляться методом подстановки:

$$\underline{P} = \exp\left[-\sum_{i=1}^m f_i(\bar{\lambda}_i)\right]. \quad (22.32)$$

Приведенные примеры последовательной и последовательно-параллельной (с нагруженным резервированием) систем являются частными случаями более общей схемы, которая заключается в следующем. Пусть система составлена из m

последовательных соединенных подсистем, i -я подсистема составлена из однотипных элементов с одинаковым параметром интенсивности отказов λ_i и вероятность безотказной работы системы

$$P(\lambda) = \prod_{i=1}^m R_i(\lambda_i t). \quad (22.33)$$

где $R_i(\lambda_i t)$ — вероятность безотказной работы i -й подсистемы, $i = 1, \dots, m$.

Тогда, если распределение времени безотказной работы каждой подсистемы есть ВФИ, то нижняя γ -доверительная граница для $P(\lambda)$ может вычисляться методом подстановки:

$$P = \prod_{i=1}^m R_i(\bar{\lambda}_i t). \quad (22.34)$$

Рассмотрим другие примеры, являющиеся частными случаями (22.33), (22.34).

22.4.3. Последовательное соединение подсистем типа k из n (нагруженный резерв). Предположим, что i -я подсистема составлена из n_i резервных элементов. Отказ i -й подсистемы происходит в случае отказа k_i и более элементов, $1 \leq k_i \leq n_i$. Рассмотренная выше последовательно-параллельная система является частным случаем данной схемы при $k_i = n_i$, $i = 1, \dots, m$. Вероятность безотказной работы системы определяется выражением (22.33), где

$$R_i(\lambda_i t) = \sum_{d=0}^{k_i-1} C_{n_i}^d (1 - e^{-\lambda_i t})^d (e^{-\lambda_i t})^{n_i-d}. \quad (22.35)$$

22.4.4. Последовательно-параллельное соединение (ненагруженный резерв). Пусть i -я подсистема составлена из одного основного и $n_i - 1$ запасных элементов, находящихся в ненагруженном резерве. В случае отказа основной элемент заменяется одним из запасных, который после отказа снова заменяется и т.д. Отказ i -й подсистемы наступает в момент отказа последнего из $n_i - 1$ резервных элементов. В данном случае время безотказной работы i -й подсистемы

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n_i} \zeta_j, \quad (22.36)$$

где $\zeta_1, \dots, \zeta_{n_i}$ — независимые случайные величины, одинаково распределенные по экспоненциальному закону с параметром λ_i , $i = 1, \dots, m$. Вероятность безотказной работы системы имеет вид (22.33), где $R_i(\lambda_i t)$ — дополнительная функция распределения n_i -кратной свертки экспоненциального распределения:

$$R_i(\lambda_i t) = e^{-\lambda_i t} \sum_{d=0}^{n_i-1} \frac{(\lambda_i t)^d}{d!}. \quad (22.37)$$

22.4.5. Последовательно-параллельно-последовательное соединение (нагруженный резерв). Предположим, что i -я подсистема составлена из n_i параллельно соединенных одинаковых последовательных цепочек элементов, каждая из которых включает в себя a_i последовательно соединенных разнотипных элементов с параметрами λ_{ij} , $j = 1, \dots, a_i$, $i = 1, \dots, m$, где i — номер подсистемы; j — номер элемента внутри подсистемы. В системе, таким образом, допускается резервирование как отдельных элементов, так и отдельных последовательных цепочек элементов. В данном случае вероятность безотказной работы системы

$$P(\lambda) = \prod_{i=1}^m R_i(\Lambda_i t), \quad (22.38)$$

$$R_i(\Lambda_i t) = 1 - (1 - e^{-\Lambda_i t})^{n_i}; \quad (22.39)$$

$$\Lambda_i = \sum_{j=1}^{a_i} \lambda_{ij}. \quad (22.40)$$

Во всех приведенных схемах нижняя γ -доверительная граница вероятности безотказной работы системы может вычисляться методом подстановки как $\underline{P} = P(\bar{\lambda})$.

22.4.6. Системы со сложной структурой. Широкий класс сложных структур описывается известной моделью монотонных структур.

Пусть $q_j = 1 - e^{-\lambda_j t}$ — вероятность отказа за время t j -го элемента системы. В случае высокой надежности элемента $q_j \approx \lambda_j t$. Обозначим: S_i — набор индексов элементов i -го минимального сечения системы; A_i — событие, состоящее в том, что к моменту t отказали все элементы i -го минимального сечения S_i ; A — событие, состоящее в том, что произошел отказ системы. Вероятность отказа системы (к моменту t) определяется выражением

$$Q = P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right), \quad (22.41)$$

где N — число минимальных сечений системы.

В случае высоконадежных элементов ($\lambda_j t \ll 1$) из (22.41) следуют приближенные соотношения для Q :

$$Q \approx \sum_{i=1}^N P(A_i) = \sum_{i=1}^N \prod_{j \in S_i} q_j \approx \sum_{i=1}^N \prod_{j \in S_i} (\lambda_j t). \quad (22.42)$$

Эти соотношения справедливы с точностью до вероятностей отказов одновременно нескольких сечений, имеющих более высокий порядок малости. Кроме того, величины (22.42) дают для Q верхние оценки:

$$Q \leq \sum_{i=1}^N \prod_{j \in S_i} q_j \leq \sum_{i=1}^N \prod_{j \in S_i} (\lambda_j t). \quad (22.43)$$

Таким образом, для высоконадежных систем оценка Q приближенно сводится к оценке функции пуассоновских параметров:

$$Q \approx \sum_{i=1}^N \prod_{j \in S_i} (\lambda_j t). \quad (22.44)$$

Для последовательно-параллельных структур каждый параметр λ_j входит лишь в одно из произведений в (22.44). Другими словами, каждый элемент входит только в одно сечение. Существенной особенностью сложных структур является то, что каждый параметр λ_j может входить в различные произведения в (22.44). Другими словами, каждый элемент может одновременно входить в несколько различных сечений. Кроме того, относительно параметров некоторых элементов может быть известно, что они совпадают (например, при резервировании однотипными элементами). В этом случае функция (22.44) принимает вид

$$Q \approx \sum_{i=1}^N \prod_{j \in S_i} (\lambda_j t)^{n_{ij}}, \quad (22.45)$$

где n_{ij} — число идентичных элементов с параметром λ_j в сечении S_i .

Верхняя γ -доверительная граница для функций пуассоновских параметров вида (22.44), (22.45) может строиться методом подстановки. Таким образом, для высоконадежных систем нижняя γ -доверительная граница вероятности безотказной работы $P = 1 - Q$ может строиться методом подстановки практически для произвольных (монотонных) структур.

22.5. МЕТОД ФИДУЦИАЛЬНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Существующие аналитические решения далеко не всегда оказываются достаточно эффективными, поэтому часто используются различные приближенные методы. Рассмотрим метод построения доверительных границ для показателей надежности сложных систем, основанный на известном фидуциальном подходе Фишера, для случая экспоненциального закона распределения времени безотказной работы элементов. Пусть λ_i — неизвестный параметр интенсивности отказов для элементов i -го типа системы, $i = 1, \dots, m$. Предположим, что в ходе испытаний элементов i -го типа, проводившихся до наблюдения r_i отказов, была получена суммарная наработка S_i . Функция распределения результата наблюдений S_i при данном фиксированном значении параметра λ_i имеет вид

$$F_i(\lambda_i, S_i) = 1 - e^{-\lambda_i S_i} \sum_{d=0}^{r_i-1} \frac{(\lambda_i S_i)^d}{d!}. \quad (22.46)$$

Эта функция может быть записана также через стандартное λ^2 -распределение с $2r_i$ степенями свободы: $F_i(\lambda_i, S_i) = \chi_{2r_i}^2(2\lambda_i S_i)$, где $\chi_n^2(t)$ — функция распределения для закона χ^2 с n степенями свободы. При каждом фиксированном значении S_i функция $F_i(\lambda_i, S_i)$ обладает всеми формальными свойствами функции распределения по параметру λ_i . Она монотонно возрастает по λ_i , $F_i(0, S_i) = 0$, $F_i(\infty, S_i) = 1$. Указанное распределение параметра λ_i , отвечающее данному значению результата наблюдений S_i , называется фидуциальным.

Пусть $R(\lambda) = R(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ — функция, выражающая зависимость показателя надежности системы от параметров интенсивности отказов элементов. Предположим, что по каждому типу элементов имеется результат испытаний (r_i, S_i) , $i = 1, \dots, m$. Функция фидуциальных случайных величин $R(\lambda)$ также становится фидуциальной случайной величиной с некоторой функцией распределения $\Phi(R)$. Нижнюю и верхнюю границы γ -фидуциального интервала (f, f^*) для R определим из условий:

$$\Phi(f_*) = -\varepsilon_1; \quad (22.47) \quad \Phi(f^*) = 1 - \varepsilon_2, \quad (22.48)$$

где $\gamma = 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Аналитическое вычисление $\Phi(R)$ чаще всего затруднительно. Поэтому в большинстве случаев фидуциальные границы для характеристик сложных систем вычисляются на ЭВМ методом статистических испытаний. При этом исходя из фиксированного набора результатов наблюдений (r_i, S_i) , $i = 1, \dots, m$, в очередной k -й реализации на ЭВМ сначала для каждого i -го типа элементов формируется случайное значение параметра λ_i в соответствии с законом распределения $\chi_{2r_i}^2(2\lambda_i S_i)$. При формировании случайных величин λ_i удобно полагать

$$\lambda_i = \xi / (2 S_i), \quad (22.49)$$

где ξ — случайная величина, сформированная на основе закона $\chi_{2r_i}^2$.

Далее исходя из полученного набора значений $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ вычисляется очередное k -е значение системного показателя $R_k = R(\lambda)$. При этом возможны два случая.

1. Известна аналитическая зависимость показателя надежности системы от параметров элементов. Значение R_k вычисляется подстановкой этих параметров в функцию $R(\lambda)$.

2. Аналитическая зависимость $R(\lambda)$ неизвестна, но при каждом наборе параметров показатель надежности системы может быть найден численно с помощью отдельной программы (чаще всего снова методом статистических испытаний). В этом случае очередное k -е значение R_k вычисляется с помощью указанной отдельной программы. При этом метод статистических испытаний применяется дважды: при формировании случайных (фидуциальных) значений параметров и затем при вычислении зависимости $R = R(\lambda)$.

После того, как очередное значение R_k найдено, переходят к следующей реализации. Исходя из полученных в N реализациях значений показателя надежности системы строится эмпирическая функция распределения. В качестве оценок для нижней и верхней фидуциальных границ берутся квантили эмпирического распределения уровней $\varepsilon_1, 1 - \varepsilon_2$. Так, если $N = 100$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,05$, $\gamma = 0,9$, то в качестве оценок для f^*, f_* берутся соответственно величины R_5, R_{95} в упорядоченном ряде значений $R_1 \leq R_2 \leq \dots \leq R_{100}$. Искомые фидуциальные границы при этом могут быть вычислены с тем большей точностью, чем больше число реализаций N .

В тех случаях, когда испытания элементов i -го типа проводились до наблюдения заранее фиксированной суммарной наработки S_i (например, по планам типа $[N_i R T_i]$, $S_i = N_i T_i$), в результате чего было получено d_i отказов, фидуциальное распределение параметра λ_i по-прежнему имеет вид (22.46), где необходимо положить $r_i = d_i + 1$. Таким образом, для планов испытаний указанного типа моделирование производится так же, как описано выше (при $r_i = d_i + 1$).

Во многих случаях фидуциальный подход дает довольно эффективные границы по сравнению с существующими вариантами метода доверительных множеств. Другим достоинством фидуциального подхода является то обстоятельство, что при наличии современных ЭВМ его применение мало ограничивается такими факторами, как сложность структуры системы. В то же время необходимо отметить, что в многомерном случае ($m > 1$) γ -фидуциальные границы не являются γ -доверительными в обычном смысле. Другими словами, если, например, f^* — верхняя γ -фидуциальная граница для $R(\lambda)$, то основное соотношение $P_{\lambda} \{f^* \geq R(\lambda)\} \geq \gamma$ может нарушаться при некоторых λ . В этом смысле фидуциальный подход дает границы для показателя надежности, коэффициент доверия которых не гарантируется. Тем не менее для многих распространенных в теории надежности моделей сложных систем фидуциальный подход дает границы с гарантированным коэффициентом доверия. Это относится в основном к оценке надежности системы снизу.

22.6. ВЫЧИСЛЕНИЕ НИЖНЕЙ ДОВЕРИТЕЛЬНОЙ ГРАНИЦЫ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ СИСТЕМЫ БЕЗ ВОССТАНОВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ФИДУЦИАЛЬНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Пусть система состоит из элементов m различных типов, λ_i — параметр интенсивности отказов элемента i -го типа, $R = R(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ — функция, выражающая зависимость показателя надежности системы R от параметров надежности элементов. Пусть S_1, d_i — соответственно суммарная наработка и число отказов, зафиксированные в ходе испытаний элементов i -го типа. (Предполагается, что результаты испытаний по различным типам элементов независимы.)

Фидуциальное распределение параметра λ_i при данных S_i, d_i формируется следующим образом. Полагаем

$$\lambda_i = \xi_i / (2 S_i), \quad (22.50)$$

где ξ_i — случайная величина, имеющая χ^2 -распределение с $2d_i + 2$ степенями свободы. Если испытания элементов i -го типа проводились по плану типа $[N_i \times \times Ur_i]$ или $[N_i R r_i]$ (до наблюдения r_i отказов), то полагаем $d_i = r_i + 1$. При мо-

делировании на ЭВМ фидуциальную величину λ_i удобно формировать как сумму:

$$\lambda_i = \frac{1}{S_i} \sum_{k=1}^{d_i+1} \eta_k. \quad (22.51)$$

где η_k — независимые одинаково распределенные случайные величины, каждая из которых имеет экспоненциальное распределение с плотностью $f(t) = e^{-t}$. Способы формирования (22.50), (22.51) эквивалентны.

Введем параметры $z_i = \ln \lambda_i$. Нижняя γ -доверительная граница для R может строиться методом фидуциальных вероятностей (как нижняя γ -фидуциальная граница), если функция $R(\cdot)$, записанная в переменных z :

$$\tilde{R}(z) = R(e^{z_1}, e^{z_2}, \dots, e^{z_m}) \quad (22.52)$$

выпукла вверх по вектору $z = (z_1, \dots, z_m)$. Коэффициент доверия получаемой при этом границы не меньше γ . Аналогично верхняя γ -доверительная граница для R может строиться методом фидуциальных вероятностей, если функция (22.52) выпукла вниз по z .

Далее обозначаются: $P = P(t)$ — вероятность безотказной работы системы в течение заданного времени t ; T — средняя наработка системы. Ниже приводятся основные типы систем, для которых построение нижней доверительной границы для показателей P , T по результатам испытаний элементов может производиться методом фидуциальных вероятностей. Далее везде предполагается, что отказы различных элементов системы происходят независимо друг от друга.

22.6.1. Последовательная система. Пусть n_i — число элементов i -го типа в системе. Система отказывает в случае отказа любого из элементов. Показатели P , T имеют вид:

$$P = \prod_{i=1}^m p_i^{n_i}(t) = \exp\left(-t \sum_{i=1}^m n_i \lambda_i\right); \quad (22.53)$$

$$T = \left(\sum_{i=1}^m n_i \lambda_i\right)^{-1}, \quad (22.54)$$

где $p_i(t) = \exp(-\lambda_i t)$ — вероятность безотказной работы за время t одного элемента i -го типа. Оценка снизу показателей надежности P , T сводится к оценке сверху величины

$$R = \sum_{i=1}^m n_i \lambda_i. \quad (22.55)$$

В соответствии с указанными выше результатами верхняя γ -доверительная граница $\bar{R}_\gamma$ для R может строиться методом фидуциальных вероятностей. После чего нижние γ -доверительные границы для P , T определяются как:

$$\underline{P}_\gamma = \exp(-\bar{R}_\gamma \cdot t); \quad \underline{T} = (\bar{R}_\gamma)^{-1}. \quad (22.56)$$

Пример 22.5. Рассмотрим последовательную систему из двух элементов. Результаты испытаний по элементам: суммарные наработки $S_1 = 2000$ ч, $S_2 = 500$ ч; числа отказов $d_1 = 20$, $d_2 = 4$. Требуется построить нижнюю доверительную границу $\underline{P}_\gamma$ с коэффициентом доверия $\gamma = 0,9$ для вероятности безотказной работы системы P за время $t = 1$ ч.

Решение. В данном случае различные методы построения доверительных границ дают следующие значения $\underline{P}_y$.

$$\text{Метод плоскости: } \underline{P}_y = \exp \left(-\frac{\chi_y^2(50)}{2 \cdot 500} \right) = 0,937.$$

$$\text{Метод подстановки: } \underline{P}_y = \exp \left(-\frac{\chi_y^2(42)}{2 \cdot 2000} - \frac{\chi_y^2(10)}{2 \cdot 500} \right) = 0,970.$$

$$\text{Метод Линдстрема—Маддена: } \underline{P} = \exp \left(-\frac{\chi_y^2(20)}{2 \cdot 500} \right) = 0,972.$$

$$\text{Метод фидуциальных вероятностей: } \underline{P}_y = 0,974.$$

Для последовательных систем метод Линдстрема—Маддена дает более точные нижние границы при малых числах отказов и при равных (или близких) объемах испытаний S_i различных элементов. При увеличении числа отказов и существенно различных объемах испытаний элементов более эффективным становится метод фидуциальных вероятностей. Этот метод тем не менее является более сложным в вычислительном отношении. Поэтому для последовательных систем (без восстановления) из существующих решений, по-видимому, наиболее целесообразно применять метод Линдстрема—Маддена.

Для последовательных систем можно использовать также подход, основанный на структурах Неймана для экспонентных семейств распределений. Для линейных функций пуассоновских параметров этот подход позволяет строить оптимальные (несмещенные) доверительные границы. Данный подход тем не менее применим только для линейных функций (т. е. только для последовательных систем) и требует довольно сложных вычислений.

22.6.2. Последовательно-параллельная система. Пусть система состоит из m резервных групп, i -я группа — из n_i однотипных резервных элементов с параметром интенсивности отказов λ_i , $i = 1, \dots, m$. Резерв внутри каждой группы — нагруженный. Вероятность безотказной работы системы в течение времени t определяется формулой

$$P = \prod_{i=1}^m (1 - q_i^{n_i}), \quad (22.57)$$

где $q_i = 1 - e^{-\lambda_i t}$ — вероятность отказа одного элемента i -й группы. Нижняя γ -доверительная граница для P может строиться методом фидуциальных вероятностей. Аналогичный вывод справедлив и в случае, когда внутри отдельных резервных групп режим резервирования — ненагруженный.

22.6.3. Системы со сложной (монотонной) структурой. Предположим, что структура системы такова, что отказы элементов не улучшают состояния системы в целом. Структуры, удовлетворяющие этому естественному условию, называются монотонными. Для вероятности безотказной работы системы справедлива нижняя оценка, основанная на понятии минимального сечения:

$$P \geq \prod_{i=1}^N \left(1 - \prod_{j \in S_i} q_j \right), \quad (22.58)$$

где $q_j = 1 - e^{-\lambda_j t}$ — вероятность отказа j -го элемента системы, λ_j — параметр интенсивности отказов j -го элемента; S_i — набор индексов элементов, входящих в i -е минимальное сечение; N — число минимальных сечений системы. В оценку (22.58) вместо q_j подставим $(\lambda_j t)$, что приводит к некоторому ее занижению, незначительному в случае высокой надежности элементов системы:

$$P \geq \prod_{i=1}^N \left[1 - \prod_{j \in S_i} (\lambda_j t) \right]. \quad (22.59)$$

Вместо оценок (22.58), (22.59) можно использовать также более грубые:

$$P \geq 1 - \sum_{i=1}^N \prod_{j \in S_i} q_j \geq 1 - \sum_{i=1}^N \prod_{j \in S_i} (\lambda_j t). \quad (22.60)$$

В случае высоконадежных элементов ($\lambda_j t \ll 1$) все приведенные оценки эквивалентны величине P с точностью до малых более высоких порядков:

$$P \approx \prod_{i=1}^N \left[1 - \prod_{j \in S_i} (\lambda_j t) \right] \approx 1 - \sum_{i=1}^N \prod_{j \in S_i} (\lambda_j t). \quad (22.61)$$

Исходя из указанных выше результатов нетрудно показать, что нижняя γ -доверительная граница как для правой части (22.59), так и для правой части (22.60) может строиться методом фидуциальных вероятностей. В вычислительном отношении построение доверительных границ для оценки (22.59) или (22.60) не всегда удобно и может оказаться сложнее, чем непосредственно для самого показателя P . Но в силу приближенного равенства (22.61) метод фидуциальных вероятностей может приближенно применяться не только к указанным оценкам, но и непосредственно к самому P . Это означает, что для систем с высоконадежными элементами нижняя γ -доверительная граница $\underline{P}_\gamma$ может строиться методом фидуциальных вероятностей практически для систем с произвольной (монотонной) структурой. Чаще всего этот метод дает более высокие значения $\underline{P}_\gamma$ (при данном γ), чем метод подстановки, хотя и требует более сложных вычислений.

22.7. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ ДЛЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ С ВОССТАНАВЛИВАЕМЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ МЕТОДОМ ФИДУЦИАЛЬНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Предположим, что система состоит из элементов m различных типов и как времена безотказной работы, так и времена восстановления (ремонта) элементов имеют экспоненциальные распределения. Обозначим λ_i , μ_i соответственно интенсивность отказов и интенсивность восстановления элемента i -го типа. Требуется построить доверительные границы для некоторого показателя надежности системы R по имеющимся результатам испытаний элементов. Так же как и в предыдущем параграфе, предполагается, что результаты испытаний по параметру λ_i заданы в виде S_i — суммарная наработка и d_i — число отказов, зафиксированные в ходе испытаний по элементам i -го типа. Результаты испытаний по параметру μ_i заданы в аналогичном виде: V_i — сумма всех интервалов восстановления и k_i — число восстановлений по элементам i -го типа (чаще всего $d_i = k_i$). Результаты испытаний по различным элементам предполагаются независимыми.

Пусть $R = R(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_m)$ — функция, выражающая зависимость показателя надежности системы от параметров элементов. Процедура построения доверительных границ методом фидуциальных вероятностей остается такой же, как в § 22.5, 22.6, с тем отличием, что моделируются не только случайные параметры λ_i , но и случайные параметры μ_i . (Формирование параметров μ_i при данных V_i , k_i производится аналогично. Обозначим: $z_i = \ln \lambda_i$; $y_i = \ln \mu_i$; $z = (z_1, \dots, z_m)$; $y = (y_1, \dots, y_m)$; $\tilde{R}(z, y) = R(e^{z_1}, \dots, e^{z_m}, e^{y_1}, \dots, e^{y_m})$. Нижняя (верхняя) γ -доверительная граница для показателя R может строиться методом фидуциальных вероятностей, если функция $\tilde{R}(z, y)$ выпукла вверх (вниз) по (z, y) .

Рассмотрим некоторые распространенные модели систем с восстановлением, составленных из однотипных элементов.

22.7.1. Система с нагруженным резервированием и неограниченным восстановлением. Система состоит из $n + 1$ однотипного резервного элемента (резерв нагруженный). Интенсивность отказов каждого элемента λ . В момент отказа эле-

мент сразу начинает восстанавливаться, независимо от наличия других отказавших элементов. Интенсивность восстановления для каждого элемента μ . Система отказывает в случае отказа всех элементов. Коэффициент готовности для каждого отдельного элемента $\tilde{K} = \mu / (\lambda + \mu)$. Коэффициент готовности системы в целом

$$K = 1 - (1 - \tilde{K})^{n+1} = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{n+1}. \quad (22.62)$$

Оценка K сводится к оценке величины $\rho = \lambda/\mu$. Записанная в переменных (z, y) функция $\ln \rho = z - y$ линейна. Нижняя и верхняя доверительные границы для ρ , а тем самым и для коэффициента готовности (22.62) могут строиться методом фидуциальных вероятностей. При этом они будут совпадать с границами, построенными на основе F -распределения для отношения $(\lambda S)/(\mu V)$ (см. § 22.2).

Средняя наработка системы определяется выражением

$$T = \frac{1}{(n+1)\mu} \left(\left(1 + \frac{\mu}{\lambda} \right)^{n+1} - 1 \right). \quad (22.63)$$

Функция (22.63), записанная в переменных (z, y) , выпукла вниз. Поэтому верхняя γ -доверительная граница для T может строиться методом фидуциальных вероятностей. Аналогичное утверждение для нижней границы неверно. Чтобы построить нижнюю границу, воспользуемся приближенной формулой

$$T \approx \frac{1}{(n+1)} \frac{\mu^n}{\lambda^{n+1}}, \quad (22.64)$$

которая дает хорошее приближение при $\lambda \ll \mu$. Кроме того, выражение (22.64) является нижней оценкой для T . Записанная в переменных (z, y) функция $\ln(\mu^n/\lambda^{n+1}) = ny - (n+1)z$ линейна. Поэтому нижняя γ -доверительная граница для приближенного выражения (22.64) может строиться методом фидуциальных вероятностей. В случае высоконадежных элементов эта нижняя граница для T довольно эффективна.

Для коэффициента оперативной готовности справедливы приближенные (для случая высокой надежности) выражения:

$$R(t_0) \approx K \exp\left(-\frac{t_0}{T}\right) \approx 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^{n+1} - \frac{t_0}{T} \approx 1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} - \frac{n\lambda^{n+1}}{\mu^n} t_0. \quad (22.65)$$

Последнее выражение, записанное в переменных (z, y) , является выпуклой вверх функцией. Поэтому нижняя γ -доверительная граница для него также может строиться методом фидуциальных вероятностей.

22.7.2. Общая схема с резервированием и восстановлением. Система состоит из $N = A + B + C$ однотипных элементов, каждый из которых имеет параметр интенсивности отказов λ . Из них A основных элементов находятся в рабочем состоянии, B — в нагруженном и C — в ненагруженном резерве. Отказавший элемент восстанавливается на одном из D обслуживающих ремонтных органов. Интенсивность восстановления элемента μ . Каждый ремонтный орган одновременно может восстанавливать не более одного элемента. Если все ремонтные органы заняты, то отказавший элемент становится в очередь. Система находится в исправном состоянии, если число исправных элементов не меньше A .

Пусть $k = k(t)$ — число отказавших элементов в момент времени t . Изменение величины k во времени описывается стандартной схемой марковского однородного процесса с непрерывным временем и конечным множеством состояний. Интенсивность перехода из состояния k в $k+1$ пропорциональна параметру λ и равна $\alpha_k + \lambda$. Интенсивность перехода из состояния k в $k-1$ пропорциональна параметру μ и равна $\beta_k \cdot \mu$. Коэффициенты α_k, β_k определяются конкретным режимом восстановления и замещения элементов. Например, в схеме предыдущего пункта $\alpha_k = n+1-k, \beta_k = k$.

Отказ системы наступает при $k(t) \geq n + 1$, где $n = B + C$. Обозначим также: $C_0 = 1$;

$$C_k = \frac{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{k-1}}{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Коэффициент готовности системы в данной схеме выписывается явно:

$$K = \sum_{k=0}^n C_k \rho^k \bigg/ \sum_{k=0}^N C_k \rho^k, \quad (22.66)$$

где $\rho = \lambda/\mu$. Функция (22.66) монотонно убывает по ρ . Оценка K сводится к оценке ρ . Как нижняя, так и верхняя доверительные границы для ρ могут вычисляться методом фидуциальных вероятностей (при этом они совпадают с границами, построенными на основе F -распределения). Затем нижняя (верхняя) γ -доверительная граница для K вычисляется подстановкой верхней (нижней) γ -доверительной границы для ρ в формулу (22.66).

Средняя наработка системы определяется формулой

$$T = \frac{1}{\lambda \alpha_n C_n} \sum_{k=0}^n C_k \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{n-k}. \quad (22.67)$$

Функция (22.67), записанная через параметры (z, y) , выпукла вниз. Поэтому верхняя γ -доверительная граница для T_c может строиться методом фидуциальных вероятностей. Чтобы построить нижнюю границу, воспользуемся приближенной (при $\lambda \ll \mu$) формулой

$$T \approx \frac{C_0}{\alpha_n C_n} \frac{\mu^n}{\lambda^{n+1}}, \quad (22.68)$$

которая дает также нижнюю оценку для T_c . Нижняя γ -доверительная граница для приближенного выражения (22.68) может строиться методом фидуциальных вероятностей.

Для коэффициента оперативной готовности системы справедливы приближенные (для случая высокой надежности) выражения

$$R(t_0) \approx K \exp\left(-\frac{t_0}{T}\right) \approx 1 - (1-K) - \frac{t_0}{T} \approx 1 - \frac{C_{n+1}}{C_n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} - \frac{\alpha_n C_n}{C_0} \frac{\lambda^{n+1}}{\mu^n} t_0. \quad (22.69)$$

Для (22.69) нижняя γ -доверительная граница также может строиться методом фидуциальных вероятностей. В случае высоконадежных элементов получаемая таким образом нижняя граница для $R(t_0)$ является довольно эффективной.

22.7.3. Система с восстанавливаемыми разнотипными элементами. Следующая схема обобщает рассмотренную в предыдущем пункте. Система состоит из m последовательно соединенных резервных групп (подсистем). Каждая отдельная подсистема состоит из однотипных элементов и представляет собой некоторую резервную группу типа, который был рассмотрен в п. 22.7.2. Параметры интенсивности отказов и восстановления элементов i -й подсистемы обозначим соответственно λ_i и μ_i . Коэффициенты $A, B, C, D, N, n, \alpha_k, \beta_k, C_k$, а также показатели надежности $K, T, R(t_0)$ для i -й подсистемы будем отмечать индексом i . Предполагается, что отказы и восстановление элементов в различных подсистемах происходят независимо друг от друга. Система отказывает при отказе любой подсистемы. Коэффициент готовности системы находится как произведение:

$$K = \prod_{i=1}^m K_i \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i} \right), \quad (22.70)$$

где K_i — коэффициент готовности i -й подсистемы, определяемый по формуле (22.66). Для случая высокой надежности ($K_i \ll 1$) (22.70) можно записать приближенно:

$$K \approx 1 - \sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i} \right)^{n_i+1}, \quad (22.71)$$

где коэффициенты $a_i = C_{n_i+1, i}/C_{0, i}$. Функция (22.71), записанная через параметры (z, y) , выпукла вверх. Поэтому нижняя γ -доверительная граница для приближенного выражения (22.71) может строиться методом фидуциальных вероятностей.

В некоторых частных случаях нетрудно показать, что метод фидуциальных вероятностей может применяться и непосредственно к точному выражению (22.70). Пусть, например, каждая подсистема является резервной группой типа, рассмотренного в (22.62) (с нагруженным резервированием и независимым восстановлением). Тогда коэффициент готовности системы

$$K = \prod_{i=1}^m \left(1 - \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} \right)^{n_i+1} \right). \quad (22.72)$$

Можно показать далее, что функция $\ln K$, записанная в переменных (z, y) , выпукла вверх. Тем самым нижняя γ -доверительная граница может строиться методом фидуциальных вероятностей непосредственно для показателя (22.72) без использования приближенной формулы (22.71).

Средняя наработка системы находится по формуле

$$T \approx \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{T_i} \right)^{-1}, \quad (22.73)$$

где T_i — средняя наработка i -й подсистемы. Оценка T снизу сводится к оценке сверху величины

$$\frac{1}{T} \approx \sum_{i=1}^m \frac{1}{T_i} \approx \sum_{i=1}^m a'_i \cdot \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i} \right)^{n_i} \cdot \lambda_i, \quad (22.74)$$

где коэффициенты $a'_i = C_{n_i, i} \alpha_{n_i, i} / C_{0, i}$. Функция (22.74) в переменных (z, y) выпукла вниз. Верхняя γ -доверительная граница для нее может строиться методом фидуциальных вероятностей.

Коэффициент оперативной готовности системы

$$R(t_0) \approx K e^{-t_0/T} \approx 1 - \sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i} \right)^{n_i+1} - t_0 \sum_{i=1}^m a'_i \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i} \right)^{n_i} \lambda_i. \quad (22.75)$$

Функция (22.75) в переменных (z, y) выпукла вверх, и нижняя γ -доверительная граница для нее также может строиться методом фидуциальных вероятностей.

Таким образом, для высоконадежных восстанавливаемых систем нижние доверительные границы для основных показателей надежности K , T , $R(t_0)$ могут вычисляться методом фидуциальных вероятностей.

Необходимо отметить, что основные существующие в настоящее время способы построения доверительных границ для надежности систем относятся главным образом к системам без восстановления. На рассмотренную выше схему систем с восстановлением распространяется метод подстановки (см. § 22.4), но при том дополнительном ограничении, что параметры восстановления μ_i известны. Подход, основанный на использовании нормального приближения, может приме-

няться при больших объемах выборок. В типичной для испытаний высоконадежных систем ситуации малых выборок метод фидуциальных вероятностей в настоящее время по существу является единственным пригодным для оценки показателей надежности сложных систем с восстановлением.

Глава 23

СТАТИСТИЧЕСКИЙ КОНТРОЛЬ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ ПО ДВУМ УРОВНЯМ

23.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

При статистическом контроле показателей надежности часто возникает следующая задача. Пусть R — показатель надежности некоторой системы и $R_0 < R_1$ — два заданных уровня (приемки и браковки). Система считается пригодной по показателю R , если истинное значение $R \leq R_0$. Система считается непригодной, если $R \geq R_1$. Истинное значение R неизвестно и требуется принять решение о приемке ($R \leq R_0$) или браковке ($R \geq R_1$) системы по результатам испытаний. Подобные задачи решаются в рамках общей теории проверки статистических гипотез. Задача заключается в принятии по результатам испытаний одной из двух гипотез $H_0: R \leq R_0$ или $H_1: R \geq R_1$.

Область значений показателя R , таких, что $R_0 < R < R_1$, иногда называют областью «безразличия». Заметим, что оптимальный выбор уровней R_0, R_1 , на основе которых принимается решение о пригодности системы, является непростой и чаще всего трудноформализуемой задачей. В большинстве случаев эти уровни выбираются исходя из некоторых практических соображений.

Существенной особенностью для сложных систем является то, что показатель надежности системы, как правило, зависит от многих неизвестных параметров (параметров надежности различных элементов). Кроме того, статистическая информация, на основе которой принимается решение о системе, чаще всего содержит информацию по испытаниям различных ее элементов. Здесь возможны две основные ситуации.

1. Испытания системы. Испытания проводятся непосредственно на одном или нескольких образцах системы как единого целого. На испытаниях фиксируются отказы системы в целом, а также отказы ее отдельных элементов. В этом случае объемы испытаний по различным типам элементов системы в определенном смысле «согласованы» (пропорциональны числу элементов данного типа в системе). Решение о качестве системы может приниматься исходя из полной информации с учетом результатов испытаний по элементам системы. Другой способ заключается в принятии решений непосредственно по результатам испытаний системы (см., например, § 23.3) без учета информации по элементам. Из общих качественных соображений представляется естественным, что первый способ должен давать значительный выигрыш, например, для высоконадежных систем с однотипными резервными элементами (см. § 23.3, 23.6), так как число наблюдаемых отказов системы при этом значительно меньше числа отказов элементов.

2. Поэлементные испытания. По тем или иным причинам система на данный момент времени не может быть испытана как единое целое, но имеется информация по испытаниям ее отдельных элементов (полученная, например, на испытаниях других систем с аналогичными элементами, на автономных испытаниях отдельных частей системы и т. п.). Возможна и промежуточная ситуация, когда имеются как результаты испытаний системы в целом, так и результаты дополнительных испытаний некоторых ее частей. Решение задачи в этом случае производится на основе имеющейся информации по испытаниям отдельных элементов системы.

Общей формулировкой задачи является следующая. Пусть θ — вектор параметров надежности элементов системы, x — вектор результатов испытаний, $P_\theta\{x\}$ — вероятностное распределение x при истинном значении вектора параметров θ . Пусть $R = R(\theta)$ — функция, выражающая зависимость показателя надежности системы R от показателей надежности элементов. Требуется по результатам испытаний x принять одну из двух гипотез: $H_0: R \leq R_0$; $H_1: R \geq R_1$. Другими словами, требуется принять решение о принадлежности неизвестного истинного значения θ одному из двух множеств:

$$H_0 = \{\theta : R(\theta) \leq R_0\}; H_1 = \{\theta : R(\theta) \geq R_1\}.$$

Пусть $X = \{x\}$ — множество всех возможных исходов испытаний. Правило принятия решений (критерий) задается разбиением множества X на две непересекающиеся области W и $\bar{W}$. Если результат испытаний принадлежит W , то принимается гипотеза H_1 . Если результат испытаний принадлежит области $\bar{W}$, то принимается гипотеза H_0 . Таким образом, построение решающего правила сводится к построению области W (называемой «критической» областью).

Существенной характеристикой решающего правила является оперативная характеристика $L(\theta) = P_\theta\{x \in \bar{W}\}$ — вероятность принятия гипотезы H_0 при истинном значении вектора параметров θ (часто используется также функция мощности $w(\theta) = 1 - L(\theta)$). При истинном значении $\theta \in H_0$ вероятность ошибочного решения о принятии гипотезы H_1 (вероятность ошибки первого рода) равна $1 - L(\theta)$. При истинном значении $\theta \in H_1$ вероятность ошибочного решения о принятии гипотезы H_0 (вероятность ошибки второго рода) равна $L(\theta)$. Величины

$$\alpha = \max_{\theta \in H_0} (1 - L(\theta)); \quad \beta = \max_{\theta \in H_1} L(\theta) \quad (23.1)$$

называются гарантированными рисками или просто рисками первого и второго рода. Решающее правило (критерий) называется равномерно наиболее мощным, если при фиксированном риске первого рода α его вероятность ошибки второго рода $L(\theta)$ минимальна (функция мощности $w(\theta)$ максимальна) при всех $\theta \in \bar{H}_0$. В случае многомерного θ равномерно наиболее мощные критерии удается построить лишь в некоторых частных ситуациях.

Соотношения (23.1) могут быть записаны также в следующем виде:

$$1 - L(\theta) \leq \alpha \text{ при } \theta \in H_0; L(\theta) \leq \beta \text{ при } \theta \in H_1. \quad (23.2)$$

Величины α , β характеризуют максимально возможные вероятности ошибок соответственно первого и второго рода. При статическом контроле промышленной продукции α , β характеризуют соответственно риск изготовителя и потребителя.

Задача заключается в выборе объема испытаний и построении решающего правила, обеспечивающего заданные значения рисков α , β при заданных уровнях приемки и браковки R_0 , R_1 .

23.2. СИСТЕМА С РЕЗЕРВИРОВАНИЕМ БЕЗ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Система составлена из n однотипных параллельно соединенных резервных элементов (резерв нагруженный). Отказ системы наступает в случае отказа всех ее элементов. В предположении, что отказы различных элементов происходят независимо друг от друга, вероятность отказа системы в течение времени t равна

$$R = q^n, \quad (23.3)$$

где q — вероятность отказа за время t одного элемента.

Испытания элементов проводятся по плану $[N, U, t]$, в результате чего фиксируется d отказов (биномиальная схема испытаний). Частным случаем являются испытания системы в целом, когда испытываются N_c идентичных образцов дан-

ной системы. Общий объем испытаний элементов $N = N_{cn}$. Требуется по результату испытаний d принять одну из двух гипотез: $H_0: R \leq R_0$, $H_1: R \geq R_1$, где $R_0 < R_1$ — заданные уровни приемки и браковки системы по показателю R .

Проверка указанных гипотез эквивалентна проверке гипотез о параметре q надежности одного элемента $H_0: q \leq q_0$, $H_1: q \geq q_1$, где уровни $q_0 = R_0^{1/n}$; $q_1 = R_1^{1/n}$. Это стандартная задача проверки гипотез о параметре биномиального закона в схеме испытаний Бернулли. Решающее правило (равномерно наиболее мощное) сформулируем следующим образом. Если наблюдаемое число отказов $d \leq C$, то принимается гипотеза H_0 (приемка). Если $d > C$, то принимается гипотеза H_1 (браковка). Объем испытаний и константа C выбираются так, чтобы обеспечить заданные риски α , β .

Обозначим через $F(q, d) = \sum_{k=0}^d C_N^k q^k (1-q)^{N-k}$ функцию распределения случайной величины d при истинном значении параметра, равном q . Оперативная характеристика имеет вид $L(q) = F(q, C)$. Неравенства (23.2) записываются как:

$$1 - F(q, C) \leq \alpha \text{ при } q \leq q_0; F(q, C) \leq \beta \text{ при } q \geq q_1. \quad (23.4)$$

Функция $F(q, C)$ монотонно убывает по q . Поэтому (23.4) эквивалентно

$$1 - F(q_0, C) \leq \alpha; F(q_1, C) \leq \beta. \quad (23.5)$$

Объем испытаний N и константа C далее выбираются так, чтобы выполнялись неравенства (23.5). При небольших N для этого используются стандартные таблицы биномиального распределения. При достаточно больших N (начиная с $N \approx 20$) удобно использовать нормальное приближение. Среднее значение и дисперсия случайной величины d равны соответственно Nq и $Nq(1-q)$. Функция распределения d аппроксимируется выражением

$$F(q, d) \approx \Phi\left(\frac{d - Nq}{\sqrt{Nq(1-q)}}\right), \quad (23.6)$$

где $\Phi(\cdot)$ — функция распределения стандартного нормального закона с нулевым средним и единичной дисперсией.

При использовании нормального приближения минимально необходимый объем испытаний N^* (обеспечивающий заданные риски α , β при заданных уровнях q_0 , q_1) может быть записан в явном виде. Обозначим через U_α квантиль уровня $1 - \alpha$ нормального закона $\Phi(U_\alpha) = 1 - \alpha$. Неравенства (23.5) с учетом нормального приближения (23.6) записываются в виде:

$$\begin{aligned} Nq_0 + U_\alpha \sqrt{Nq_0(1-q_0)} &\leq C; \\ Nq_1 - U_\beta \sqrt{Nq_1(1-q_1)} &\geq C. \end{aligned} \quad (23.7)$$

Заданные значения рисков α , β могут быть обеспечены при данном объеме испытаний N , если оба неравенства (23.7) выполняются при некотором C . Для этого должно выполняться неравенство

$$Nq_0 + U_\alpha \sqrt{Nq_0(1-q_0)} \leq Nq_1 - U_\beta \sqrt{Nq_1(1-q_1)}. \quad (23.8)$$

Тогда в качестве константы C , задающей решающее правило, можно взять любую величину из интервала

$$Nq_0 + U_\alpha \sqrt{Nq_0(1-q_0)} \leq C \leq Nq_1 - U_\beta \sqrt{Nq_1(1-q_1)}. \quad (23.9)$$

Если неравенство (23.8) строгое, то точные значения рисков меньше α , β . Минимально необходимый (при данных α , β) объем испытаний N^* определяется из равенства

$$N^* q_0 + U_\alpha \sqrt{N^* q_0(1-q_0)} = N^* q_1 - U_\beta \sqrt{N^* q_1(1-q_1)}, \quad (23.10)$$

$$N^* = \frac{[U_\alpha \sqrt{q_0(1-q_0)} + U_\beta \sqrt{q_1(1-q_1)}]^2}{(q_1 - q_0)^2}. \quad (23.11)$$

При этом константа C (и, следовательно, решающее правило) определяется однозначно, и именно совпадает с левой и правой частями равенства (23.10).

23.3. ВЫИГРЫШ ОТ УЧЕТА ИНФОРМАЦИИ ПО ЭЛЕМЕНТАМ СИСТЕМЫ

По схеме § 23.2 рассмотрим случай, когда в течение времени t испытываются N_c идентичных образцов системы либо один образец испытывается N_c раз и в начале каждого цикла испытаний восстанавливаются элементы, отказавшие на предыдущем цикле. Правило принятия решений может строиться двумя способами:

1) на каждом цикле испытаний системы фиксируются не только отказы системы в целом, но и отказы отдельных элементов. Решение принимается на основе суммарного числа отказов d по всем элементам. Этот способ был описан в § 23.2;

2) на каждом цикле испытаний фиксируются лишь отказы системы в целом. Решение принимается на основе суммарного числа «системных» отказов. Данный способ сводится к проверке исходных гипотез $R \leq R_0$, $R \geq R_1$ о биномиальном параметре R в схеме испытаний Бернулли, но с объемом испытаний, равным N_c . В соответствии с (23.9) необходимое число испытаний системы определяется выражением

$$N_c^* = \frac{(U_\alpha \sqrt{R_0(1-R_0)} + U_\beta \sqrt{R_1(1-R_1)})^2}{(R_1 - R_0)^2}. \quad (23.12)$$

При первом способе (с учетом информации по элементам) необходимое число «системных» испытаний равно N^*/n . Коэффициент $k = N_c^*/(N^*n^{-1})$ показывает, во сколько раз большего объема испытаний требует второй способ. Обозначим $\delta = (R_1 - R_0)/R_0$. При достаточно малых δ из (23.9), (23.12) с учетом связи между уровнями $R_0 = q_0^n$, $R_1 = q_1^n$ получаем приближенное [при $(R_0, R_1) \ll 1$ и с точностью до $o(\delta)$] выражение

$$k \approx \frac{1+a+a^2+\dots+a^{n-1}}{n} \left(1 - \frac{n-1}{n} \frac{U_\alpha}{U_\alpha + U_\beta} \delta \right), \quad (23.13)$$

где $a = q_0^{-1} = (1/R_0)^{1/n}$. Коэффициент (23.13) характеризует выигрыш в объеме испытаний от учета информации по элементам системы. Выигрыш тем больше, чем выше требования к надежности системы (чем меньше уровни R_0, R_1) и чем больше степень резервирования системы n . Для первого сомножителя в (23.13) справедливой оценки

$$\frac{1-R_0}{R_0 \ln R_0^{-1}} R_0^{1/n} \leq \frac{1+a+\dots+a^{n-1}}{n} \leq \frac{1-R_0}{R_0 \ln R_0^{-1}},$$

откуда видно, что при фиксированном R_0 максимально возможный выигрыш (при возрастании степени резервирования n и при $R_1 \rightarrow R_0$) определяется коэффициентом $(1 - R_0)/(R_0 \ln R_0^{-1})$.

23.4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО-ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ СИСТЕМА БЕЗ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Система состоит из m последовательно соединенных резервных групп (резерв нагруженный), i -я резервная группа состоит из n_i однотипных элементов. Для каждого элемента внутри i -й резервной группы распределение безотказной работы экспоненциальное: $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$ — с неизвестным параметром λ_i .

Предполагается, что отказы различных элементов происходят независимо друг от друга. Вероятность отказа системы в течение заданного времени t_0

$$R = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - q_i^{n_i}), \quad (23.14)$$

где $q_i = 1 - e^{-\lambda_i t_0}$ — вероятность отказа за время t_0 одного элемента i -й резервной группы. В случае высокой надежности ($\lambda_i t_0 \ll 1$) справедлива приближенная формула

$$R \approx \sum_{i=1}^m Q_i, \quad (23.15)$$

где $Q_i = q_i^{n_i} \approx (\lambda_i t_0)^{n_i}$ — вероятность отказа i -й резервной группы. При ненагруженном резерве вероятность Q_i отказа i -й резервной группы может вычисляться по формуле

$$Q_i \approx (\lambda_i t_0)^{n_i} / n_i!$$

Предположим, что испытания элементов i -го типа производятся по плану $[N_i RT_i]$, в результате чего наблюдается d_i отказов. Случайная величина d_i имеет пуассоновское распределение с параметром $\Lambda_i = \lambda_i S_i$, где $S_i = N_i T_i$ — суммарная наработка элементов i -го типа на испытаниях. Оценка показателя надежности системы (23.15) сводится к оценке степенной функции от неизвестных пуассоновских параметров $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_m)$:

$$R = R(\Lambda) = \sum_{i=1}^m a_i \Lambda_i^{n_i}, \quad (23.16)$$

где коэффициенты a_i вычисляются по формулам; $a_i = (t_0/S_i)^{n_i}$; $a_i = (t_0/S_i)^{n_i}/n_i!$ соответственно для нагруженного и ненагруженного резервов в i -й группе.

К аналогичной схеме сводится и биномиальная схема испытаний, когда элементы i -го типа испытываются по плану $[N U t_0]$, в результате чего наблюдается d_i отказов. Если число испытываемых элементов N_i достаточно велико, то распределение числа отказов d_i — приближенно пуассоновское с параметром $\Lambda_i = N_i q_i$. Задача также сводится к оценке показателя вида (23.16), где $a_i = N_i^{-n_i}$.

Требуется исходя из вектора результатов испытаний по всем элементам $d = (d_1, \dots, d_m)$ принять одну из двух гипотез о показателе надежности системы: $H_0: R \leq R_0$; $H_1: R \geq R_1$, где $R_0 < R_1$ — заданные уровни приемки и браковки.

Несмещенная оценка показателя (23.16) в данном случае имеет вид

$$\widehat{R} = \sum_{i=1}^m a_i d_i^{n_i}, \quad (23.17)$$

где используется сокращенное обозначение $d^{(n)} = d(d-1)(d-2) \dots (d-n+1)$.

Решающее правило будем строить на основе несмещенной оценки (23.17). Если вычисленное по результатам испытаний значение несмещенной оценки $\widehat{R} \leq C$, то принимается гипотеза H_0 (приемка). Если $\widehat{R} > C$, то принимается гипотеза H (браковка). Объем испытаний и константа C выбираются так, чтобы обеспечить заданные значения рисков α, β .

Обозначим через $F(\Lambda, y) = P_{\Lambda}(\widehat{R} \leq y)$ функцию распределения оценки $\widehat{R}$ при истинном значении векторного параметра, равном Λ . Оперативная характеристика имеет вид $L(\Lambda) = F(\Lambda, C)$. Основные неравенства (23.12) записываются как:

$$1 - F(\Lambda, C) \leq \alpha \text{ при } R(\Lambda) \leq R_0; \quad F(\Lambda, C) \leq \beta \text{ при } R(\Lambda) \geq R_1. \quad (23.18)$$

Введем функции:

$$F^-(R, C) = \min F(\Lambda, C); F^+(R, C) = \max F(\Lambda, C), \quad (23.19)$$

где минимум и максимум берутся по всем возможным сочетаниям параметров Λ , отвечающим фиксированному значению показателя R , т. е. по множеству Λ , таких, что $R(\Lambda) = R$. Функции (23.19) монотонно убывают по R . Поэтому (23.18) эквивалентно

$$1 - F^-(R_0, C) \leq \alpha; F^+(R_1, C) \leq \beta. \quad (23.20)$$

Построение решающего правила сводится к нахождению объема испытаний и константы C , при которых выполняются неравенства (23.20). Для этого, в свою очередь, нужно найти экстремумы в (23.19). Точное решение этой задачи является довольно сложным. Поэтому воспользуемся нормальной аппроксимацией для распределения оценки $\hat{R}$ исходя из того, что случайная величина $\hat{R}$ образуется как сумма m независимых случайных величин с конечными моментами. Точная функция распределения аппроксимируется выражением

$$F(\Lambda, y) \approx \Phi\left(\frac{y - M(\Lambda)}{\sqrt{D(\Lambda)}}\right), \quad (23.21)$$

где $M(\Lambda)$, $D(\Lambda)$ — среднее значение и дисперсия оценки R при данном Λ ; $\Phi(\cdot)$ — функция распределения стандартного нормального закона. Нормальное приближение (23.21) выполняется тем лучше, чем больше объемы испытаний по различным элементам и чем больше число m резервных групп в системе.

В силу несмещенности оценки ее среднее значение совпадает с показателем $M(\Lambda) = R(\Lambda)$ при всех Λ . Дисперсия оценки вычисляется более сложным образом. Можно показать, что

$$D(\Lambda) = \sum_{i=1}^m a_i^2 D_i(\Lambda_i), \quad (23.22)$$

где $D_i(\Lambda_i)$ — дисперсия случайной величины $d_i^{(n_i)}$, определяемая по формуле

$$D_i(\Lambda_i) = n_i! \Lambda_i^{n_i} \sum_{k=0}^{n_i-1} C_{n_i}^k \frac{\Lambda_i^k}{k!}. \quad (23.23)$$

На множестве параметров, по которому берутся экстремумы в (23.19), функция $M(\Lambda)$ постоянна в силу несмещенности оценки. Поэтому отыскание экстремумов (23.19) сводится к нахождению величины

$$D^+(R) = \max D(\Lambda), \quad (23.24)$$

где максимум берется по тому же множеству параметров Λ , таких, что $R(\Lambda) = R$. Эта величина имеет смысл максимально возможной дисперсии при фиксированном среднем значении оценки, равном R .

Введем переменные $y_i = \Lambda_i^{n_i}$. В переменных $y = (y_1, \dots, y_m)$ вычисление максимума (23.24) сводится к следующей задаче: найти

$$\max \sum_{i=1}^m a_i^2 D_i(y_i^{1/n_i}) \quad (23.25)$$

при линейных ограничениях

$$\sum_{i=1}^m a_i y_i = R, \quad y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (23.26)$$

Целевая функция в (23.25) выпукла вниз по у. В соответствии с известными результатами теории выпуклого программирования максимум (23.25) достигается в одной из m «крайних» точек области (23.26) вида $(0, \dots, 0, a_i^{-1} R, 0, \dots, 0)$, все координаты которых, кроме одной, нулевые. Отсюда

$$D^+(R) = \max_i a_i^2 D_i \left(\left(\frac{R}{a_i} \right)^{1/n_i} \right). \quad (23.27)$$

Рассмотрим пример нагруженного резерва. Величину $V_i = S_i/t_0$ назовем объемом испытаний элементов i -го типа. В биномиальной схеме испытаний положим $V_i = N_i$. Максимальная дисперсия (23.27) записывается как

$$D^+(R) = R \max_i \sum_{k=0}^{n_i-1} \left(\frac{n_i! C_{n_i}^k}{k!} \right) \frac{R^{k/n_i}}{V_i^{n_i-k}}. \quad (23.28)$$

Эта величина монотонно убывает по объемам испытаний V_i . Для равных резервов по различным типам элементов $n_1 = n_2 = \dots = n_m = n$ формула (23.28) упрощается:

$$D^+(R) = R \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{n! C_n^k}{k!} \right) \frac{R^{k/n}}{V_m^{n-k}}, \quad (23.29)$$

где $V_m = \min_i V_i$ — минимальный объем испытаний по элементам системы.

Неравенства (23.20) в нормальном приближении эквивалентны следующим выражениям:

$$R_0 + u_\alpha \sqrt{D^+(R_0)} \leq C; \quad R_1 - u_\beta \sqrt{D^+(R_1)} \geq C. \quad (23.30)$$

В данном случае объем испытаний задается вектором $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_m)$ объемов испытаний по различным компонентам системы. Риски α, β могут быть обеспечены при данном V , если неравенства (23.30) выполняются для некоторого C , другими словами, если при данном V выполняется неравенство

$$R_0 + u_\alpha \sqrt{D^+(R_0)} \leq R_1 - u_\beta \sqrt{D^+(R_1)}. \quad (23.31)$$

Тогда в качестве константы C , определяющей решающее правило, можно взять любую величину из интервала

$$R_0 + u_\alpha \sqrt{D^+(R_0)} \leq C \leq R_1 - u_\beta \sqrt{D^+(R_1)}. \quad (23.32)$$

Если неравенство (23.21) строгое, то точные значения рисков меньше α, β . Минимально необходимые (при данных α, β) компоненты вектора объема испытаний $\mathbf{V}$ определяются из равенства

$$R_0 + u_\alpha \sqrt{D^+(R_0)} = R_1 - u_\beta \sqrt{D^+(R_1)}. \quad (23.33)$$

При этом константа C (и, следовательно, решающее правило) определяется однозначно. В силу многомерности $\mathbf{V}$ равенство (23.33) определяет не один вектор, а некоторое множество «минимальных» векторов $\mathbf{V}^*$.

Рассмотрим пример непосредственно испытаний системы. Предположим, на испытания в течение времени T ставится N_c идентичных образцов данной системы, отказавшие элементы в момент отказа восстанавливаются (заменяются новыми). В этом случае объемы испытаний по различным элементам пропорциональны объемам резервных групп: $V_i = n_i V_c$, $i = 1, \dots, m$, где $V_c = N_c T$ — объем испытаний системы. В биномиальной схеме аналогичная ситуация имеет место, если в течение времени t_0 используются N_c образцов системы. Здесь также $V_i = n_i V_c$, $i = 1, \dots, m$, где $V_i = N_i$; $V_c = N_c$. Минимально необходимый объем испытаний системы V_c^* определяется (однозначно) из равенства (23.33), где $D^+(R)$ находится по формуле (23.28), в которой вместо V_i подставляется $n_i V_c$.

Пусть система составлена из n однотипных резервных элементов (резерв нагруженный). Нарботку одного элемента обозначим T . Отказавший элемент сразу же (независимо от состояния остальных элементов) начинает восстанавливаться. Среднее время восстановления (ремонта или замены) одного элемента обозначим τ . Процесс функционирования одного элемента представляет собой последовательность независимых между собой периодов безотказной работы и восстановления $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2; \dots; \xi_n, \eta_n; \dots$, где $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ и $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$ имеют одинаковые распределения со средними $M\xi_n = T$ и $M\eta_n = \tau$ соответственно. Процессы отказов и восстановления различных элементов независимы. Коэффициент готовности одного элемента $\tilde{K} = T/(T + \tau)$, коэффициент готовности системы

$$K = 1 - (1 - \tilde{K})^n = 1 - \left(\frac{\tau}{T + \tau}\right)^n. \quad (23.34)$$

Истинные значения величин τ, T, K неизвестны, и требуется по результатам испытаний принять одну из двух гипотез о показателе надежности системы: $H_0: K > K_0$; $H_1: K \leq K_1$, где $K_0 > K_1$ — заданные уровни приемки и браковки. Коэффициент готовности однозначно определяется отношением средних $\rho = \tau/T$:

$$K = 1 - [\rho / (1 + \rho)]^n. \quad (23.35)$$

Выражение (23.35) монотонно убывает по ρ . Поэтому проверка гипотез о коэффициенте готовности эквивалентна проверке гипотез о показателе ρ :

$$H_0: \rho \leq \rho_0; H_1: \rho \geq \rho_1, \quad (23.36)$$

где уровни ρ_0, ρ_1 пересчитываются по уровням K_0, K_1 на основе зависимости (23.35).

Предположим, что в результате испытаний наблюдалось N значений наработки элемента $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ и l значений времени восстановления элемента $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_l$, где все перечисленные результаты наблюдений независимы между собой. Предполагается также, что распределения наработки и времени восстановления элемента являются «стареющими». Требуется по результатам испытаний $(\xi, \eta) = (\xi_1, \dots, \xi_N, \eta_1, \dots, \eta_l)$ принять одну из двух гипотез H_0, H_1 с заданными рисками α, β .

Решающее правило будем строить на основе отношения

$$\hat{\rho} = \hat{\tau} / \hat{T}, \quad (23.37)$$

где $\hat{\tau} = (\eta_1 + \dots + \eta_l) / l$; $\hat{T} = (\xi_1 + \dots + \xi_N) / N$ — оценки параметров τ, T по результатам испытаний. Если вычисленная по результатам испытаний величина $\hat{\rho} \leq C$, то принимается гипотеза H_0 (приемка); если $\hat{\rho} > C$, принимается H_1 (браковка). Объем наблюдений (N, l) и константа $C > 0$ выбираются так, чтобы обеспечить заданные риски α, β (при заданных уровнях приемки и браковки ρ_0, ρ_1).

Неравенство $\hat{\rho} \leq C$ эквивалентно $\hat{\tau} - C\hat{T} \leq 0$. Оперативная характеристика совпадает с вероятностью $P(\hat{\tau} - C\hat{T} \leq 0)$. Неравенства (23.2) в данном случае принимают вид:

$$\begin{aligned} 1 - P(\hat{\tau} - C\hat{T} \leq 0) &\leq \alpha \text{ при } \rho \leq \rho_0; \\ P(\hat{\tau} - C\hat{T} \leq 0) &\leq \beta \text{ при } \rho \geq \rho_1. \end{aligned} \quad (23.38)$$

Случайная величина $\hat{\tau} - C\hat{T}$ обращается как сумма $(N + l)$ независимых случайных величин. При достаточно больших объемах выборки (N, l) ее распределение можно считать приближенно нормальным со средним значением и дисперсией:

$$\tau - CT; \sigma_t^2/l + C^2\sigma_T^2/N,$$

где σ_t^2, σ_T^2 — дисперсии соответственно времени восстановления τ и наработки T элемента. В нормальном приближении неравенства (23.38) могут быть записаны следующим образом (при $\alpha < 1/2; \beta < 1/2$):

$$\begin{aligned} (\tau - CT) + u_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_t^2}{l} + C^2 \frac{\sigma_T^2}{N}} &\leq 0 \quad \text{при } \rho \leq \rho_0; \\ (\tau - CT) - u_\beta \sqrt{\frac{\sigma_t^2}{l} + C^2 \frac{\sigma_T^2}{N}} &\geq 0 \quad \text{при } \rho \geq \rho_1. \end{aligned} \quad (23.39)$$

или после простых преобразований:

$$\begin{aligned} \rho - C + u_\alpha \sqrt{\frac{1}{l} \frac{\sigma_t^2}{\tau^2} \rho^2 + \frac{C^2}{N} \frac{\sigma_T^2}{T^2}} &\leq 0 \quad \text{при } \rho \leq \rho_0; \\ \rho - C - u_\beta \sqrt{\frac{1}{l} \frac{\sigma_t^2}{\tau^2} \rho^2 + \frac{C^2}{N} \frac{\sigma_T^2}{T^2}} &\geq 0 \quad \text{при } \rho \geq \rho_1. \end{aligned} \quad (23.40)$$

Максимально возможное значение коэффициента вариации (отношения средне-квадратического отклонения к среднему значению) «стареющего» распределения равно 1 (достигается при экспоненциальном распределении). Поэтому неравенства (23.40) принимают вид (при $l \geq u_\beta^2$):

$$\begin{aligned} \rho_0 - C + u_\alpha \sqrt{\frac{1}{l} \rho_0^2 + \frac{C^2}{N}} &\leq 0; \\ \rho_1 - C - u_\beta \sqrt{\frac{1}{l} \rho_1^2 + \frac{C^2}{N}} &\geq 0. \end{aligned} \quad (23.41)$$

После некоторых преобразований (23.41) записываются как:

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(1 + u_\alpha \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{l} - \frac{u_\alpha^2}{Nl}} \right) \left(1 - \frac{u_\alpha^2}{N} \right)^{-1} &\leq C; \\ \rho_1 \left(1 - u_\beta \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{l} - \frac{u_\beta^2}{Nl}} \right) \left(1 - \frac{u_\beta^2}{N} \right)^{-1} &\geq C. \end{aligned} \quad (23.42)$$

Значения рисков α, β могут быть обеспечены при данных объемах испытаний (N, l) , если оба неравенства (23.42) выполняются при некотором C (при этом всегда $\rho_0 < C < \rho_1$). Для этого должно выполняться неравенство

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(1 + u_\alpha \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{l} - \frac{u_\alpha^2}{Nl}} \right) \left(1 - \frac{u_\alpha^2}{N} \right)^{-1} &\leq \\ &\leq \rho_1 \left(1 - u_\beta \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{l} - \frac{u_\beta^2}{Nl}} \right) \left(1 - \frac{u_\beta^2}{N} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (23.43)$$

Минимально необходимые объемы испытаний N , l должны удовлетворять равенству

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(1 + u_\alpha \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{l} - \frac{u_\alpha^2}{Nl}} \right) \left(1 - \frac{u_\alpha^2}{N} \right)^{-1} = \\ = \rho_1 \left(1 - u_\beta \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{l} - \frac{u_\beta^2}{Nl}} \right) \left(1 - \frac{u_\beta^2}{N} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (23.44)$$

Если объемы N , l удовлетворяют (23.44), то константа C , определяющая решающее правило с рисками α , β , совпадает с обеими частями равенства (23.44).

Наиболее распространенной является ситуация, когда на испытаниях число наблюдаемых отказов равно числу наблюдаемых периодов восстановления. При этом объемы испытаний по наработке и по времени восстановления совпадают: $N = l$. Равенство (23.44) в этом случае несколько упрощается:

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{N}} \sqrt{2 - \frac{u_\alpha^2}{N}} \right) \left(1 - \frac{u_\alpha^2}{N} \right)^{-1} = \\ = \rho_1 \left(1 - \frac{u_\beta}{\sqrt{N}} \sqrt{2 - \frac{u_\beta^2}{N}} \right) \left(1 - \frac{u_\beta^2}{N} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (23.45)$$

Решение уравнения (23.45) относительно N дает минимально необходимый (при данных ρ_0 , ρ_1 , α , β) объем испытаний N^* . При $(\rho_1 - \rho_0) \rightarrow 0$ справедлива приближенная формула

$$N^* \approx 2\rho_0^2 (u_\alpha + u_\beta)^2 / (\rho_1 - \rho_0)^2. \quad (23.46)$$

При равных рисках $\alpha = \beta$ уравнение (23.45) упрощается. В этом случае из (23.45) находим

$$N^* = u_\alpha^2 \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 + \rho_0} \right)^2} \right)^{-1} \approx \frac{2u_\alpha^2 (\rho_1 + \rho_0)^2}{(\rho_1 - \rho_0)^2}. \quad (23.47)$$

На основе приведенной выше процедуры проверки гипотез можно получить доверительные границы для показателей ρ и K . Верхняя $(1 - \beta)$ -доверительная граница для ρ

$$\bar{\rho}_{1-\beta} = \hat{\rho} \frac{1 - u_\beta^2 N^{-1}}{1 - u_\beta \sqrt{N^{-1} + l^{-1} - u_\beta^2 (Nl)^{-1}}}. \quad (23.48)$$

Нижняя $(1 - \alpha)$ -доверительная граница для ρ

$$\underline{\rho}_{1-\alpha} = \hat{\rho} \frac{1 - u_\alpha^2 N^{-1}}{1 + u_\alpha \sqrt{N^{-1} + l^{-1} - u_\alpha^2 (Nl)^{-1}}}. \quad (23.49)$$

Интервал $(\underline{\rho}_{1-\alpha}, \bar{\rho}_{1-\beta})$ дает доверительный интервал для ρ с коэффициентом доверия $\gamma = 1 - \alpha - \beta$. При $(N, l) \rightarrow \infty$ справедливы приближенные выражения:

$$\bar{\rho}_{1-\beta} \approx \hat{\rho} \left(1 + u_\beta \sqrt{\frac{N+l}{Nl}} \right); \quad \underline{\rho}_{1-\alpha} \approx \hat{\rho} \left(1 - u_\alpha \sqrt{\frac{N+l}{Nl}} \right).$$

Нижняя и верхняя доверительные границы для коэффициента готовности K вычисляются подстановкой соответственно верхней и нижней границ для ρ в формулу (23.35):

$$\underline{K}_{1-\beta} = 1 - \left(\frac{\bar{\rho}_{1-\beta}}{1 + \bar{\rho}_{1-\beta}} \right)^n; \quad \bar{K}_{1-\alpha} = 1 - \left(\frac{\underline{\rho}_{1-\alpha}}{1 + \underline{\rho}_{1-\alpha}} \right)^n.$$

По схеме § 23.5 рассмотрим случай испытаний системы в целом. При этом одновременно наблюдается n независимых потоков отказов и восстановлений по каждому элементу системы. Каждый отдельный поток представляет собой последовательность независимых интервалов работы и восстановления элемента. Система находится в состоянии отказа, когда отказали (восстанавливаются) все n элементов.

Решение о коэффициенте готовности системы K может приниматься непосредственно по наблюдениям за потоком отказов и восстановлений системы. В предыдущем параграфе предполагалось, что наблюдаемые интервалы работы и восстановления — независимые «стареющие» случайные величины. Заметим, что в результирующем «системном» потоке интервалы работы и восстановления системы могут быть зависимы. Рассмотрим частный случай, когда время восстановления каждого элемента имеет экспоненциальное распределение. Тогда интервалы работы и восстановления системы независимы. Время восстановления системы имеет экспоненциальное и, следовательно, «стареющее») распределение со средним $\tau_c = \tau/n$. Кроме того, в случае высокой надежности, когда число отказов элементов на одном интервале безотказной работы системы достаточно велико, можно приближенно считать, что наработка системы имеет также экспоненциальное распределение. В указанных допущениях можно использовать результаты предыдущего параграфа для принятия решения непосредственно по наблюдениям за интервалами работы и восстановления системы.

Циклом работы системы назовем интервал безотказной работы и следующий за ним интервал восстановления системы. Предположим, наблюдается N_c циклов работы системы. Результатом наблюдений являются N_c интервалов безотказной работы и N_c интервалов восстановления системы. Обозначим T_c среднюю наработку системы, τ_c — среднее время восстановления системы $R = \tau_c/T_c$. Задача сводится к принятию по указанным результатам наблюдений одной из двух гипотез: $H_0: R \leq R_0$; $H_1: R_1 \geq R$, где уровни R_0, R_1 связаны с исходными уровнями (приемки и браковки) $K_0 > K_1$ коэффициента готовности системы соотношениями:

$$K_0 = (1 + R_0)^{-1}; K_1 = (1 + R_1)^{-1}. \quad (23.50)$$

Пусть $\alpha = \beta$. Необходимое число наблюдений циклов работы системы N_c^* определяется формулой (23.47):

$$N_c^* = U_\alpha^2 [1 - \sqrt{1 - ((R_1 - R_0)/(R_1 + R_0))^2}]^{-1}. \quad (23.51)$$

Средняя продолжительность испытаний системы при этом

$$a_2 = N_c^* (T_c + \tau_c).$$

Рассмотрим другой способ принятия решений, основанный на получаемой в результате испытаний системы информации по отдельным элементам. Испытания системы будем проводить до наблюдения N интервалов безотказной работы и N интервалов восстановления элементов. (Заметим, что при таком плане испытаний результаты предыдущего параграфа, основанные на предположении о независимости наблюдаемых интервалов, могут применяться приближенно.) Необходимое число наблюдений, определяемое по формуле (23.47),

$$N^* = u_\alpha^2 \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 + \rho_0} \right)^2} \right]^{-1}, \quad (23.52)$$

где уровни ρ_0, ρ_1 связаны с K_0, K_1 соотношениями:

$$K_0 = 1 - \left(\frac{\rho_0}{1 + \rho_0} \right)^n; K_1 = 1 - \left(\frac{\rho_1}{1 + \rho_1} \right)^n. \quad (23.53)$$

Средняя продолжительность испытаний в этом случае

$$a_1 = N^* (T + \tau)/n.$$

Используя известную формулу для средней наработки системы $T_c = \tau n^{-1} \times \times [(1 + \rho^{-1})^n - 1]$, получаем приближенное асимптотическое (при $(K_0 - K_1) \rightarrow 0$) выражение

$$\frac{a_2}{a_1} \approx \left(\frac{K_0}{1 - (1 - K_0)^{1/n}} \right) \frac{1}{n^2 (1 - K)} \frac{n-1}{n} \approx \frac{1}{n^2 (1 - K)} \frac{n-1}{n}, \quad (23.54)$$

где K_0 — уровень приемки; K — истинное значение коэффициента готовности. Величина (23.54) характеризует выигрыш в объеме испытаний за счет использования информации по элементам. Выигрыш тем больше, чем больше K .

23.7. КОНТРОЛЬ КОЭФФИЦИЕНТА ГОТОВНОСТИ СИСТЕМЫ ПРИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ НАРАБОТКИ И ВРЕМЕНИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ

Пусть система составлена из n однотипных резервных элементов. Для восстановления (ремонта) отказавших элементов имеется r ($r \leq n$) обслуживающих ремонтных единиц. В случае отказа элемент восстанавливается на одной из ремонтных единиц. Каждая ремонтная единица одновременно может обслуживать не более одного элемента. Режим резервирования может быть как нагруженный, так и ненагруженный.

Данная схема является более общей по сравнению с рассмотренной в § 23.5 системой с нагруженным резервированием и независимым ($r = n$) восстановлением элементов. Аналитическое вычисление различных характеристик возможно в предположении, что наработка и время восстановления элемента имеют экспоненциальные распределения с параметрами $\lambda = 1/T$, $\mu = 1/\tau$. Коэффициент готовности системы выражается монотонно убывающей функцией:

$$K = f(\rho), \quad (23.55)$$

где $\rho = \lambda/\mu$. Конкретный вид функции $f(\rho)$ зависит от режима резервирования и восстановления в системе.

Пусть $K_0 > K_1$ — заданные уровни приемки и браковки коэффициента готовности системы. В силу монотонности функции проверка гипотез о коэффициенте готовности: $H_0: K \geq K_0$; $H_1: K \leq K_1$ эквивалентна проверке гипотез о показателе ρ :

$$H_0: \rho \leq \rho_0; \quad H_1: \rho \geq \rho_1, \quad (23.56)$$

где уровни $\rho_0 < \rho_1$ вычисляются по исходным K_0, K_1 из соотношений:

$$K_0 = f(\rho_0); \quad K_1 = f(\rho_1). \quad (23.57)$$

Предположим, что в результате испытаний наблюдалось N независимых интервалов безотказной работы элемента $\xi_1, \dots, \xi_N$ и l независимых интервалов восстановления элемента $\eta_1, \dots, \eta_l$. Поскольку экспоненциальные распределения принадлежат к «стареющим» ВФИ-распределениям, то проверка гипотез (23.56) далее может производиться на основе нормального приближения так же, как в § 23.5. При экспоненциальных распределениях контроль коэффициента готовности может производиться также на основе F -распределения Фишера для отношения $\widehat{\tau}/\widehat{T}$ (см. § 23.8).

23.8. КОНТРОЛЬ КОЭФФИЦИЕНТА ГОТОВНОСТИ ПРИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ НАРАБОТКИ И ВРЕМЕНИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ F-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В данном параграфе приводятся планы контроля коэффициента готовности K для случая, когда в эксперименте фиксируются наработка, отказы и время восстановления изделия, а оценка $\hat{K}$ определяется расчетом. Предполагается, что наработка и время восстановления имеют экспоненциальные распределения.

Контроль организуется на N образцах изделия ($N \geq 1$) и проводится на каждом из них до окончания некоторого последнего восстановления, а в целом — до достижения запланированного числа событий «отказ + восстановление». Изделие принимается, если точечная оценка r , вычисленная по зафиксированной к этому моменту статистике, не меньше оценочного норматива C , и бракуется в противном случае. Оценка $\hat{K}$ рассчитывается по формуле

$$\hat{K} = \hat{T} / (\hat{T} + \hat{\tau}),$$

где $\hat{T} = r^{-1} \sum_{i=1}^r \xi_i$; $\hat{\tau} = r^{-1} \sum_{i=1}^r \eta_i$; ξ_i и η_i — i -е интервалы безотказной работы и восстановления соответственно. Статистика суммируется по всем образцам.

План контроля, т. е. необходимое число отказов (и восстановлений), и оценочный норматив C определяются по заданным приемочному K_0 и браковочно-му K_1 уровням и рискам α, β .

Таблица 23.1

Планы контроля для коэффициента готовности

Значение K_0	$(1-K_1)/(1-K_0)$									
	2,0		2,5		3,0		4,0		5,0	
	d	C	d	C	d	C	d	C	d	C

Планы для $\alpha = \beta = 0,1$

0,9	20	0,857	11	0,840	8	0,818	—	—	—	—
0,95	25	0,928	14	0,920	9	0,913	6	0,986	4	0,886
0,96	25	0,943	14	0,935	10	0,929	6	0,918	5	0,903
0,97	25	0,958	15	0,952	10	0,948	6	0,940	5	0,929
0,98	25	0,972	15	0,968	11	0,965	7	0,959	5	0,954
0,99	27	0,986	16	0,984	11	0,983	7	0,980	5	0,978
0,995	27	0,9930	16	0,9920	11	0,9913	7	0,9900	5	0,989
0,998	28	0,9972	16	0,9968	11	0,9965	7	0,9963	5	0,9957
0,999	28	0,9986	16	0,9984	11	0,9983	7	0,9980	5	0,9978
0,9995	28	0,99929	16	0,99921	11	0,99914	7	0,9990	5	0,9989
0,9999	28	0,99986	16	0,99984	11	0,99983	7	0,99980	5	0,99978

Планы для $\alpha = \beta = 0,05$

0,9	33	0,857	18	0,839	12	0,822	—	—	—	—
0,95	39	0,929	22	0,920	14	0,914	9	0,898	7	0,882
0,96	40	0,943	23	0,936	16	0,930	9	0,920	7	0,908
0,97	41	0,958	24	0,952	16	0,948	10	0,949	8	0,930
0,98	42	0,972	25	0,968	17	0,965	11	0,959	8	0,955
0,99	44	0,986	25	0,984	16	0,982	11	0,980	8	0,978
0,995	44	0,993	26	0,9921	18	0,9913	11	0,9901	9	0,9885
0,998	45	0,9972	26	0,9968	18	0,9965	12	0,9959	9	0,9954
0,999	45	0,9986	26	0,9984	18	0,9983	12	0,9980	9	0,9977
0,9995	45	0,99929	26	0,99921	18	0,99914	12	0,99900	9	0,99890
0,9999	45	0,99986	26	0,99984	18	0,99983	12	0,99980	9	0,99977

лось. Необходимо количество отказов r находить подбором так, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{\varphi_{\beta}(2r, 2r)}{\varphi_{1-\alpha}(2r, 2r)} = \frac{(1-K_0)K_1}{(1-K_1)K_0}, \quad (23.58)$$

где $\varphi_{1-\alpha}(2r, 2r)$ и $\varphi_{\beta}(2r, 2r)$ — квантили F -распределения. По полученному r вычисляется норматив

$$C = K_0 / [(1 - K_0)\varphi_{1-\alpha}(2r, 2r) + K_0]. \quad (23.59)$$

В табл. 23.1 приводятся планы контроля для наиболее употребительных исходных данных. Значение K_1 выражено через отношение $(1 - K_1)/(1 - K_0)$, которое, как видно из таблицы, главным образом и определяет объем контроля r .

23.9. ОРИЕНТИРОВОЧНЫЙ РАСЧЕТ ПЛАНА КОНТРОЛЯ

В случаях когда не удается найти приемлемого способа вычисления функции распределения оценки $F(\hat{R})$, применяют ориентировочный расчет, основанный на нормальном приближении с вычислением дисперсии $D(\hat{R})$ методом линейризации. Помимо погрешности нормального приближения здесь присутствуют погрешность, связанная со смещением оценки $\hat{R} = R(\hat{\theta}_i)$, и погрешность линейризации. Однако такой расчет можно использовать в тех случаях, когда «не работают» более строгие методы.

Предполагается, что оценка контролируемого показателя надежности распределена по нормальному закону со средним значением, равным истинному значению показателя (на самом деле эти значения не равны вследствие смещения оценки):

$$F(y, \hat{R}) = F_0[(y - R)/\sigma(\hat{R})].$$

Тогда формулы (23.30) записываются в виде:

$$R_1 + U_{1-\beta}\sigma_1(\hat{R}) = C, \quad \sigma_1\hat{R} = \sqrt{D_1\hat{R}}; \quad (23.60)$$

$$R_0 + U_{\alpha}\sigma_0(\hat{R}) = C, \quad \sigma_0\hat{R} = \sqrt{D_0\hat{R}}, \quad (23.61)$$

где $D_0\hat{R}$ и $D_1\hat{R}$ — дисперсии функции распределения $F_0(y, R)$ в точках $R = R_0$ и $R = R_1$ соответственно.

Дисперсии вычисляются по формуле

$$D\hat{R} = \sum_i \left(\frac{\partial R}{\partial \theta_i} \right)^2 D\hat{\theta}_i, \quad (23.62)$$

причем для $D_0\hat{R}$ в (23.62) подставляют значения θ_i , соответствующие значению R_0 , а для $D_1\hat{R}$ значения Q_i , соответствующие R_1 . Искомый объем наблюдений входит в выражения $D\hat{\theta}_i$.

Поскольку значениям R_0 и R_1 могут соответствовать различные сочетания θ_i , в обоих уравнениях следует выбирать те сочетания, при которых дисперсии $D_0\hat{R}$ и $D_1\hat{R}$ максимальны.

Пример 23.1. Испытывается один образец восстанавливаемого изделия; задан коэффициент готовности. Точность и достоверность оценки определяются следующими данными: $K_0 = 0,98$; $K_1 = 0,96$; $\alpha = \beta = 0,1$. Испытания по плану должны продолжаться до заданного числа отказов d , т. е. объем наблюдений определяется этим числом. Требуется определить C и d . Распределения времени работы между отказами и времени восстановления — экспоненциальные.

Р е ш е н и е. Формула для оценки $\widehat{K}$ имеет вид

$$K = \widehat{\mu} / (\widehat{\lambda} + \widehat{\mu}),$$

где $\widehat{\lambda}$ — оценка параметра потока отказов; $\widehat{\mu}$ — оценка интенсивности восстановлений.

По формуле (23.62) вычислим дисперсию $D\widehat{K}$. При выбранном плане испытаний $[1Rd]$ выражение для $D\widehat{K}$ независимо от λ и μ можно представить так:

$$D\widehat{K} = 2K^4 (1 - K)^2 / d. \quad (23.63)$$

Тогда система уравнений (23.60), (23.61) примет вид:

$$K_1 + U_{1-\beta} K_1^2 (1 - K_1) \sqrt{2/d} = C; \quad K_0 + U_{\alpha} K_0^2 (1 - K_0) \sqrt{2/d} = C.$$

Подставляем численные значения:

$$0,96 + 1,28 \cdot 0,96^2 \cdot (1 - 0,96) \cdot \sqrt{2/d} = C; \quad 0,98 - 1,28 \cdot 0,98^2 \times \\ \times (1 - 0,98) \cdot \sqrt{2/d} = C.$$

Решая эту систему, получаем ответ: $C = 0,973$; $d = 26$.

Вместо нормального приближения и формулы (23.63) в данном случае можно использовать точное распределение K (см. § 23.8). При этом получается следующий ответ: $C = 0,972$; $d = 25$.

Пример 23.2. Испытывается один образец восстанавливаемого изделия, состоящего из двух одинаковых устройств, одно из которых используется как нагруженный резерв с полным контролем и идеальным переключением. Распределения времени работы между отказами и времени восстановления — экспоненциальные. Заданы два уровня наработки на отказ: $T_0 = 1300$ ч; $T_1 = 650$ ч; $\alpha = \beta = 0,1$. Испытания проводятся до окончания запланированного времени t_n . Требуется определить C и t_n .

Р е ш е н и е. Оценка T вычисляется по формуле

$$\widehat{T} = (\widehat{\mu} + 3\widehat{\lambda}) / (2\widehat{\lambda}^2). \quad (23.64)$$

Определяем $D\widehat{T}$. Поскольку для изделия будет реализован план $[1Rt_n]$, для оценки λ и μ будут реализованы планы $[2Rt_n]$ и $[2Rd]$ соответственно. При данных планах $D\widehat{\lambda} = \lambda^2 / 2t_n$ и $D\widehat{\mu} = \mu^2 / (d - 2)$. Тогда по формуле (23.62).

$$D\widehat{T} = (3\lambda + 2\mu^2) / 8\lambda^5 t_n + \mu^2 / 4\lambda^4 (d - 2).$$

Теперь необходимо найти значения λ и μ , максимизирующие дисперсию. При каждом фиксированном значении $\widehat{T}$ оценки $\widehat{\lambda}$ и $\widehat{\mu}$ связаны соотношением (23.64) и уменьшаются или увеличиваются одновременно. Если с помощью (23.64) выразить, например, μ через λ и T , то можно записать (с учетом $\lambda \ll \mu$)

$$D\widehat{T} \approx 2T^2 / \lambda t_n + 2T^2 / (d - 2).$$

Отсюда видно, что $\max_{\lambda, \mu} D\widehat{T}$ достигается при минимальных λ и μ .

Поскольку число отказов d при планировании неизвестно, примем приближенно $\mu^2 / (d - 2) \approx \mu^2 / 2\lambda t_n$, и тогда

$$D\widehat{T} = \frac{(3\lambda + 2\mu)^2 + \mu^2}{8\lambda^5 t_n}.$$

Очевидно, что λ и μ ограничены определенными пределами и нам достаточно установить один из них. Например, пусть из технических соображений или по аналогии с другими изделиями известно, что среднее время восстановления устрой-

ства не может превышать 2 ч, т. е. $\mu \geq 0,5 \text{ ч}^{-1}$. Тогда, подобрав по формуле (23.64) соответствующие уровням $T_0 = 1300 \text{ ч}$ и $T_1 = 650 \text{ ч}$ значения $\lambda (1,44 \cdot 10^{-2} \text{ ч}^{-1} \text{ и } 2,08 \cdot 10^{-2} \text{ ч}^{-1})$, можем записать систему уравнений:

$$1300 - 1,28 \cdot \sqrt{\frac{2,70 \cdot 10^8}{t_{\text{н}}}} = C; \quad 650 + 1,28 \cdot \sqrt{\frac{0,44 \cdot 10^8}{t_{\text{н}}}} = C.$$

Решением системы являются значения $C = 840 \text{ ч}$ и $t_{\text{н}} = 2070 \text{ ч}$.

Время испытаний здесь заведомо завышено, так как приняты минимально возможные λ и μ . Однако это окупается возможностью применения расчетно-экспериментального метода, что дает существенно большую экономию. Действительно, для испытаний такого изделия с той же точностью и достоверностью потребовалось бы $9,47 T_0 = 12\,300 \text{ ч}$.

Важно отметить, что выигрыш сохраняется даже в том предельном случае, когда из-за отсутствия информации о λ и μ в качестве нижней границы для μ принимается тривиальная оценка $\mu = 0$. Уравнения (23.60), (23.61) при этом дают результат $C = 820 \text{ ч}$, $t_{\text{н}} = 5200 \text{ ч}$. Правда, возможно существенное возрастание погрешности нормального приближения.

Пример 23.3. Испытывается один образец невосстанавливаемого изделия, состоящего из двух устройств, каждое из которых имеет нагруженный резерв с идеальным переключением. Распределения наработки до отказа показательные. При испытаниях отказавшие компоненты заменяются. Заданы вероятности безотказной работы

$$P_0(t) = 0,98; \quad P_1(t) = 0,96; \quad t = 2 \text{ ч}; \quad \text{риски } \alpha = \beta = 0,1.$$

Испытания проводятся до окончания запланированного времени t . Требуется определить C и $t_{\text{н}}$.

Решение. Применяется расчетно-экспериментальный метод, т. е. по суммарной статистике об отказах основных и резервных устройств обоих типов определяются интенсивности отказов $\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\lambda}_2$ соответственно, а затем вычисляется оценка

$$\hat{P}(t) = (2e^{-\hat{\lambda}_1 t} - e^{-2\hat{\lambda}_1 t})(2e^{-\hat{\lambda}_2 t} - e^{-2\hat{\lambda}_2 t}). \quad (23.65)$$

Поскольку для оценки каждого из параметров λ_1 и λ_2 используется статистика двух устройств и оценка проводится до окончания времени $t_{\text{н}}$, дисперсия $\widehat{D}\hat{P}$ вычисляется как $\lambda/2t_{\text{н}}$. С учетом этого формула для $\widehat{D}\hat{P}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \widehat{D}\hat{P} = & (2e^{-\lambda_2 t} - e^{-2\lambda_2 t})^2 (e^{-\lambda_1 t} - e^{-2\lambda_1 t})^2 \frac{2\lambda_1 t^2}{t_{\text{н}}} + \\ & + (2e^{-\lambda_1 t} - e^{-2\lambda_1 t})^2 (e^{-\lambda_2 t} - e^{-2\lambda_2 t})^2 \frac{2\lambda_2 t^2}{t_{\text{н}}}. \end{aligned} \quad (23.66)$$

При $P = 0,98$ переменные λ_1 и λ_2 могут изменяться от одного крайнего набора значений $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0,075 \text{ ч}^{-1}$ (при этом все отказы сосредоточены во второй паре устройств) до другого $\lambda_1 = 0,075 \text{ ч}^{-1}$, $\lambda_2 = 0$ (все отказы в первой паре).

Очевидно, функция $\widehat{D}\hat{P}$ симметрична относительно средней точки $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,053 \text{ ч}^{-1}$ и, как нетрудно убедиться, монотонна по обе стороны от нее. Прямой подсчет показывает, что $\widehat{D}\hat{P}$ максимальна именно при обоих упомянутых крайних наборах значений, где она равна $0,00862/t_{\text{н}}$. Аналогично при $P = 0,96$ максимальная дисперсия равна $0,0231/t_{\text{н}}$ при $\lambda_1 = 0,112$, $\lambda_2 = 0$ (или наоборот).

Поэтому система (23.60), (23.61) примет вид:

$$0,98 - 1,28 \cdot \frac{0,00862}{t_{\text{н}}} - C = 0; \quad 0,96 + 1,28 \cdot \frac{0,0231}{t_{\text{н}}} - C = 0.$$

Решением системы является $C = 0,972$; $t_n = 245$ ч. По сравнению с обычным методом испытаний, при котором изделие рассматривается как одно целое, здесь также имеется существенный выигрыш во времени. Действительно, для испытаний такого изделия при тех же исходных данных требуется около 470 циклов длительностью t , т. е. не менее 940 ч. Оценочный норматив не меняется: для приемки допускается не более 13 циклов с отказами, что соответствует

$$C = (470 - 13)/470 = 0,972.$$

23.10. КОНТРОЛЬ ПОКАЗАТЕЛЯ НАДЕЖНОСТИ ПО ДОВЕРИТЕЛЬНЫМ ГРАНИЦАМ

Пусть R — некоторый показатель надежности, истинное значение которого неизвестно. В общем случае R может зависеть от нескольких неизвестных параметров: $R = R(\theta)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$. Рассмотрим задачу контроля показателя R по двум заданным уровням приемки и браковки $R_0 < R_1$. Требуется по результатам испытаний x принять одно из двух решений (гипотез):

$$H_0 = \{R \leq R_0\}; H_1 = \{R \geq R_1\}$$

при заданных значениях рисков первого и второго рода α, β .

Данную задачу можно решать на основе доверительных границ для показателя R . Пусть $\xi = \xi(x)$ — статистика (результат испытаний), исходя из которой строятся доверительные границы. Например, в § 23.6 в качестве такой статистики используется суммарное количество отказов $\xi = \sum d_i$. В некоторых случаях в качестве исходной статистики используется точечная несмещенная оценка показателя $\xi = \widehat{R}(x)$ и т. п. Пусть $\underline{R}, \bar{R}$ — нижняя и верхняя доверительные границы для R с коэффициентами доверия соответственно γ_1, γ_2 . Зависимость доверительных границ от результата испытаний ξ и коэффициентов доверия обозначим:

$$\underline{R} = \underline{R}(\xi, \gamma_1); \bar{R} = \bar{R}(\xi, \gamma_2). \quad (23.67)$$

Типичной является монотонная зависимость границ $\underline{R}, \bar{R}$ от результата испытаний ξ . Пусть для определенности функции (23.67) монотонно возрастают по ξ . Кроме того, нижняя граница, как правило, монотонно убывает по коэффициенту доверия γ_1 , а верхняя граница возрастает по γ_2 .

Зафиксируем значения рисков α, β и положим $\gamma_1 = 1 - \alpha, \gamma_2 = 1 - \beta$. Основная система неравенств для построения решающего правила (критерия) на основе доверительных границ имеет вид:

$$\underline{R}(C, 1 - \alpha) \geq R_0; \bar{R}(C, 1 - \beta) \leq R_1. \quad (23.68)$$

Предположим, существует решение C системы неравенств (23.68), т. е. такое значение результата испытаний C , при котором доверительный интервал $(\underline{R}, \bar{R})$ попадает внутрь интервала (R_0, R_1) . В этом случае введем следующее правило принятия решения по результату испытаний ξ . Принимается решение:

$$H_0, \text{ если } \xi \leq C; H_1, \text{ если } \xi > C. \quad (23.69)$$

Сформулированное решающее правило (23.69) имеет риски первого и второго рода не большие, чем величины α, β .

Если при выбранных значениях α, β система неравенств (23.68) не имеет решения, то построение решающего правила с этими рисками невозможно в данном эксперименте (по крайней мере, на основе статистики ξ). В этом случае необходимо либо увеличивать риски, либо проводить эксперимент с большим объемом наблюдений. (Предполагается, что объем наблюдений определяется заранее, до проведения испытаний.)

Построение решающего правила сводится к решению системы неравенств (23.68). Практически решение удобно находить следующим образом. При фиксированном $\alpha = 1 - \gamma_1$ будем увеличивать значение ξ до тех пор, пока нижняя граница R_* впервые не превысит уровень R_0 , т. е. положим

$$C = \min \{ \xi: R_*(\xi, 1 - \alpha) \geq R_0 \}. \quad (23.70)$$

При найденном значении C вычислим верхнюю границу $\bar{R} = \bar{R}(C, 1 - \beta)$. Если $\bar{R} \leq R_1$, то критерий с рисками не хуже α, β — построен. Если $\bar{R} > R_1$, то такие риски не могут быть обеспечены в данном эксперименте. В этом случае, увеличивая β до тех пор, пока $\bar{R}$ не окажется меньше, чем R_1 , находим минимальное значение β (при фиксированном α), которое может быть обеспечено в данном эксперименте.

Если при найденном значении C неравенства (23.67) оказываются строгими, то риски построенного критерия фактически меньше значений α, β . Точные значения рисков могут быть в этом случае найдены следующим образом. При фиксированном $\xi = C$ будем уменьшать α, β до тех пор, пока доверительный интервал $(\underline{R}, \bar{R})$ еще остается внутри интервала (R_0, R_1) . Нижняя граница $\underline{R}$ при этом убывает, а верхняя $\bar{R}$ — возрастает. Значения α, β , при которых неравенства (23.68) обращаются в равенства, являются точными значениями рисков построенного критерия.

Пример 23.4. Пусть $R = \lambda$ — неизвестный параметр интенсивности отказов элемента с функцией распределения наработки $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Уровни приемки и браковки равны соответственно: $\lambda_0 = 0,1$; $\lambda_1 = 0,25$. Заданные значения рисков первого и второго рода: $\alpha = 0,1$; $\beta = 0,1$. Испытания проводятся с восстановлением отказавших элементов до фиксации заранее определяемой суммарной наработки $S = 16$. (Например, по плану $[NRT] NT = S$.) Результатом испытаний является наблюдаемое число отказов d . Требуется найти доверительные границы и принять решение о виде гипотезы.

Решение. Нижняя и верхняя доверительные границы с коэффициентами доверия γ_1, γ_2 для λ определяются по формулам:

$$\underline{\lambda}(d, \gamma_1) = \frac{\chi_{1-\gamma_1}^2(2d+2)}{2S}; \quad \bar{\lambda}(d, \gamma_2) = \frac{\chi_{\gamma_2}^2(2d+2)}{2S}. \quad (23.71)$$

Неравенства (23.68) имеют вид:

$$\underline{\lambda}(C, 1 - \alpha) = \chi_{\alpha}^2(C)/S \geq \lambda_0; \quad (23.72)$$

$$\bar{\lambda}(C, 1 - \beta) = \chi_{1-\beta}^2(C)/S \leq \lambda_1.$$

При $\alpha = 0,1$ из первого неравенства вычислим константу C как минимальное значение результата наблюдений d , при котором нижняя граница попадает в интервал (λ_0, λ_1) :

$$C = \min \{ d: \underline{\lambda}(d, 1 - \alpha) \geq \lambda_0 \} = 3. \quad (23.73)$$

Соответствующее значение нижней границы $\underline{\lambda}(C, 1 - \alpha) = 1,74/16 = 0,109$. При $\beta = 0,1$ верхняя граница $\bar{\lambda}(C, 1 - \beta) = 0,417$. Эта величина больше второго уровня λ_1 , и, следовательно, риски $\alpha = \beta = 0,1$ не могут быть обеспечены. Увеличивая значение β так, чтобы верхняя граница $\bar{\lambda}(C, 1 - \beta)$ попадала в интервал (λ_0, λ_1) , получаем, что при $\alpha = 0,1$ минимальное возможное значение риска второго рода в условиях данного эксперимента $\beta = 0,43$. Решающее правило (критерий) с рисками $\alpha < 0,1$; $\beta = 0,43$ имеет вид: решение H_0 принимается, если число наблюдаемых на испытаниях отказов $d \leq 3$. Если $d > 3$, то принимается решение H_1 .

Предположим, что объем испытаний увеличен: $S = 53$. Повторяя указанную процедуру при $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,1$, находим $C = 8$, соответствующее значению нижней границы $\lambda(C, 1 - \alpha) = 0,103 > \lambda_0$. Верхняя граница $\bar{\lambda}(C, 1 - \beta) = 0,245 < \lambda_1$, и, следовательно, в этом случае риски $\alpha = \beta = 0,1$ могут быть обеспечены. Соответствующий критерий имеет вид: решение H_0 принимается, если число наблюдаемых отказов $d \leq 8$. Если $d > 8$, принимается решение H_1 .

Пример 23.5. Рассмотрим систему с последовательным соединением элементов. Вероятность безотказной работы системы к заданному времени t $P = \prod_{i=1}^m p_i$,

где $p_i = e^{-\lambda_i t}$, λ_i — параметр интенсивности отказов i -го элемента. Испытания по i -му элементу проводятся до фиксации заранее определенного времени суммарной наработки S_i , в результате чего наблюдается число отказов d_i , $i = 1, \dots, m$. Требуется построить доверительные границы и принять решение о виде гипотезы.

Решение. Оценка показателя P по результатам испытаний сводится к оценке взвешенной суммы неизвестных пуассоновских параметров

$$R = \sum_{i=1}^m \Lambda_i / S_i, \quad \Lambda_i = \lambda_i S_i \quad (23.74)$$

по вектору пуассоновских случайных величин $d = (d_1, \dots, d_m)$.

В качестве доверительных границ для R возьмем границы, вычисляемые на основе статистики — суммарного количества отказов по различным элементам $\xi = d_1 + d_2 + \dots + d_m$ (метод плоскости). Упорядочим индексы элементов в порядке убывания объемов испытаний $S_1 \geq \dots \geq S_m$. Нижняя и верхняя границы с коэффициентами доверия γ_1, γ_2 для R определяются по формулам:

$$\underline{R}(\xi, \gamma_1) = \chi_{1-\gamma_1}^2(\xi) / S_1; \quad (23.75)$$

$$\bar{R}(\xi, \gamma_2) = \chi_{\gamma_2}^2(\xi) / S_m,$$

где S_1, S_m — соответственно максимальный и минимальный объемы испытаний по элементам системы (см. § 23.6). Система неравенств (23.68) имеет вид:

$$\chi_{\alpha}^2(C) / S_1 \geq R_0; \quad \chi_{1-\beta}^2(C) / S_m \leq R_1. \quad (23.76)$$

Пусть число элементов системы $m = 3$. Объемы испытаний: $S_1 = 95$; $S_2 = 80$; $S_3 = 60$. Заданные уровни: $R_0 = 0,100$; $R_1 = 0,300$; риски первого и второго рода: $\alpha = 0,2$; $\beta = 0,1$. При $\alpha = 0,2$ из первого неравенства в (23.76) находим

$$C = \min \{ \xi: \chi_{\alpha}^2(2\xi + 2) / S_1 \geq R_0 \} = 12. \quad (23.77)$$

Соответствующее значение нижней границы $R(C, 1 - \alpha) = 0,104 > R_0$. Верхняя граница $R(C, 1 - \beta) = 0,296$ попадает в интервал (R_0, R_1) . Критерий с рисками не хуже заданных значений $\alpha = 0,2$, $\beta = 0,1$ построен и имеет следующий вид. Решение H_0 принимается, если суммарное количество отказов элементов, полученное на испытаниях, $d_1 + \dots + d_m < 12$. В противном случае принимается решение H_1 .

Нижняя и верхняя доверительные границы $R(\xi, \gamma_1)$, $R(\xi, \gamma_2)$ в общем случае могут быть найдены из уравнений:

$$F_*(\underline{R}, \xi) = \gamma_1; \quad F^*(\bar{R}, \xi) = 1 - \gamma_2, \quad (23.78)$$

где

$$F_*(R, \xi) = \min_{R(\theta)=R} F(\theta, \xi); \quad (23.79)$$

$$F^*(R, \xi) = \max_{R(\theta)=R} F(\theta, \xi), \quad (23.80)$$

(θ, ξ) — функции (23.79), (23.80) монотонно убывают по R , что соответствует условию озрастания границ $\underline{R}, \bar{R}$ по ξ .) Основная система неравенств (23.68) может быть аписана в следующей эквивалентной форме:

$$F_{*}(R_0, C) \geq 1 - \alpha; \quad F^{*}(R_1, C) \leq \beta. \quad (23.81)$$

Нижняя и верхняя доверительные границы $\underline{R}(\xi, \gamma_1), \bar{R}(\xi, \gamma_2)$ могут быть также найдены из уравнений:

$$\bar{K}(\underline{R}, \gamma_1) = \xi; \quad \underline{K}(\bar{R}, \gamma_2) = \xi, \quad (23.82)$$

де

$$\bar{K}(R, \gamma) = \max_{R(\theta)=R} k_{\gamma}(\theta); \quad (23.83)$$

$$\underline{K}(R, \gamma) = \min_{R(\theta)=R} k_{1-\gamma}(\theta), \quad (23.84)$$

$k_{\gamma}(\theta)$ — квантиль уровня γ функции распределения $F(\theta, \xi)$ статистики ξ при данном θ . (Предполагается, что функции (23.83), (23.84) монотонно возрастают по R .) Основная система неравенств (23.68) может быть записана в следующей эквивалентной форме:

$$\bar{K}(R_0, 1 - \alpha) \leq C; \quad \underline{K}(R_1, 1 - \beta) \geq C. \quad (23.85)$$

Последняя форма записи основных неравенств (23.85) удобна при решении задачи планирования объема испытаний исходя из заданных значений R_0, R_1, α, β . Обозначим зависимость функций (23.83), (23.84) от объема испытаний n как: $\bar{K} = \bar{K}(R, \gamma, n)$; $\underline{K} = \underline{K}(R, \gamma, n)$. Неравенства (23.85) после исключения C запишутся в виде

$$\bar{K}(R_0, 1 - \alpha, n) \leq \underline{K}(R_1, 1 - \beta, n). \quad (23.86)$$

Типичным является случай, когда левая часть неравенства (23.86) монотонно убывает, а правая — возрастает по n . Таким образом, минимально необходимый объем испытаний, при котором могут быть обеспечены заданные риски α, β , определяется как минимальное число n , при котором выполняется неравенство (23.86). Указанное неравенство удобно применять, в частности, тогда, когда статистика ξ представляет собой несмещенную точечную оценку R и для распределения ξ можно использовать нормальное приближение. В этом случае величины $\underline{K}, \bar{K}$ представляются в виде:

$$\bar{K}(R, \gamma, n) = R + u_{\gamma} \sqrt{D^{+}(R)}; \quad (23.87)$$

$$\underline{K}(R, \gamma, n) = R - u_{\gamma} \sqrt{D^{+}(R)}, \quad (23.88)$$

где

$$D^{+}(R) = \max_{R(\theta)=R} D(\theta), \quad (23.89)$$

$D(\theta) = E_{\theta}(\hat{R} - R)^2$ — дисперсия несмещенной оценки $\xi = \hat{R}$ при данном θ ; u_{γ} — квантиль уровня γ стандартного нормального распределения. В схеме независимых испытаний величины $D(\theta), D^{+}(R)$ обратно пропорциональны характеристике объема испытаний n . Задача в этом случае сводится к отысканию функции $D^{+}(R)$ — максимальной дисперсии несмещенной оценки R при фиксированном значении показателя R .

ФОРСИРОВАННЫЕ ИСПЫТАНИЯ

24.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть Π_X^0 — некоторое испытание, проводимое с целью оценки или контроля характеристики надежности X , а ε_X^0 , τ_X^0 и $\bar{\tau}_X^0$ — соответственно его режим, максимальная и средняя продолжительности. Под ускорением испытания Π_X^0 понимают сокращение его длительности τ_X^0 или $\bar{\tau}_X^0$. Испытание Π_X^0 называют ускоренным по сравнению с Π_X^0 , если оно не менее информативно, чем Π_X^0 , но менее продолжительно, т. е. $\tau_X^* < \tau_X^0$ или $\bar{\tau}_X^* < \bar{\tau}_X^0$. Количественным критерием одинаковой информативности двух определительных испытаний является равенство точностей получаемых оценок характеристики надежности X , а контрольных — равенство ошибок 1-го и 2-го рода (рисков потребителя и изготовителя).

Степень сокращения испытаний характеризуют коэффициентами ускорения $k_X = \tau_X^0 / \tau_X^*$ и $\bar{k}_X = \bar{\tau}_X^0 / \bar{\tau}_X^*$. Принято не относить к ускоренным испытаниям, у которых сокращено лишь среднее время $\bar{\tau}_X^*$ за счет уменьшения объема выборки. Такое сокращение получается, например, при замене контроля качественных признаков контролем количественных.

Ускоряемое испытание Π_X^0 , как и его режим ε_X^0 , указывают в нормативно-технической документации и называют нормальными. В режиме ε^0 задают показатели надежности X . (В дальнейшем в ε_X^0 будем часто опускать индекс X , так как для многих характеристик надежности X режим испытаний задается одним и тем же). В качестве X могут быть: вероятность безотказной работы $P(t_r, \varepsilon^0)$ за гарантированное время t_r ; средняя наработка на отказ $T(\varepsilon^0)$; q -процентный ресурс $R_q(\varepsilon^0)$ и другие характеристики, представляющие собой некоторые функционалы L_X от распределения $F(t, \varepsilon^0) = P(\xi(\varepsilon^0) < t)$ наработки $\xi(\varepsilon^0)$ изделий партии в нормальном режиме ε^0 , т. е.

$$X(\varepsilon^0) = L_X(F(t, \varepsilon^0)).$$

Соответствующие характеристикам $P(t_r, \varepsilon^0)$, $T(\varepsilon^0)$ и $R_q(\varepsilon^0)$ испытания Π_X принято называть испытаниями на безотказность, долговечность и ресурс.

Ускорение испытаний достигается различными способами: ужесточением режима, прогнозированием характеристик надежности, привлечением дополнительной информации о законах распределения отказов и т. п.

Одним из основных способов сокращения длительности испытаний является ужесточение (форсирование) режима. Такие ускоренные испытания называются форсированными. Уточним, что режим ε^* считают более жестким (форсированным) по сравнению с ε^0 , если изделие отказывает в режиме ε^* раньше, чем в режиме ε^0 . В данной главе рассматриваются именно форсированные испытания.

Для проведения форсированных испытаний необходимо знать закономерности процессов старения изделий, что позволяет предложить не изменяющийся от партии к партии изделий метод оценки характеристик надежности по результатам ускоренных испытаний. Установление требуемых закономерностей является задачей предварительных исследований.

Возможность использования установленных закономерностей для других партий изделий часто обосновывают исходя из принципа инвариантности. Этот принцип предполагает существование такого набора конструкционных параметров $\omega = (\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^J)$, описывающих конфигурацию изделия, свойства материалов и т. п., начальными значениями которых однозначно определяются технические параметры изделия $x(\omega, t, \varepsilon)$ в любом режиме ε . Другими словами, если бы у изделий по каким-либо причинам совпали бы значения параметров ω , то эти изделия в идентичных условиях изменяли бы во времени параметры $x =$

$= x(\omega, t, \varepsilon)$ одинаково, т. е. их дальнейшее поведение в этом случае полностью совпало бы и, в частности, они отказали бы в один и тот же момент времени $\xi(\omega, \varepsilon)$.

Принцип инвариантности утверждает, что производство не может изменить функции $x(\omega, t, \varepsilon)$ и $\xi(\omega, \varepsilon)$, хотя может изменять от изделия к изделию конструктивные параметры ω и их функции распределения $G(y) = P(\omega < y)$ в партии. Инвариантами принято называть характеристики, одинаковые для всех партий. Примером инвариантов являются функции $x(\omega, t, \varepsilon)$, $\xi(\omega, \varepsilon)$ и их любая комбинация.

24.2. ФОРСИРОВАННЫЕ ИСПЫТАНИЯ, ПРОВОДИМЫЕ НА ОДНОЙ ВЫБОРКЕ

Программа таких испытаний состоит в следующем:

из контролируемой партии случайным образом отбирают некоторое количество n изделий и каждое из них испытывают в одном и том же форсированном режиме ε^* ;

отобранные изделия испытываются до отказа, но не дольше некоторого времени t^* . В общем случае продолжительность испытаний t^* может меняться от партии к партии;

в процессе испытаний фиксируются моменты отказов изделий;

по полученным данным находят оценки $\hat{X}$ показателя надежности X контролируемой партии. При необходимости на основе $\hat{X}$ можно принять решение о принятии или забраковке партии.

Форсированный режим ε^* , продолжительность испытаний и способ оценки $\hat{X}$ характеристики надежности устанавливают на стадии предварительных исследований.

После проведения испытаний станут известными наработки $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_n^*$ каждого изделия выборки в форсированном режиме ε^* . Заметим, что $\theta_i^* = \xi_i(\varepsilon^*)$, если i -е изделие отказало, и $\theta_i^* = t^*$ в противном случае. Полученную информацию представляет в другой эквивалентной форме: в виде эмпирической функции распределения отказов партии $\hat{F}(t, \varepsilon^*) = \frac{d(t)}{n}$ на интервале времени $] -\infty, t^* [$, где $d(t)$ — число наработок θ_i^* , меньших t .

Известно, что по одним и тем же статистическим данным можно предложить различные оценки $\hat{X} = \hat{l}_X(\hat{F})$, причем часто трудно отдать предпочтение одной из них. Поэтому наряду с $\hat{l}_X$ вводят способ оценки X по результатам форсированных испытаний при бесконечном объеме выборки. При $n \rightarrow \infty$ эмпирическая функция $\hat{F}$ стремится на интервале времени $] -\infty, t^* [$ к теоретической функции распределения отказов партии F .

Характеристики ε^* , t^* , l_X определяют метод форсированных испытаний, проводимых на одной выборке с целью оценки характеристики надежности X , т. е. $\Pi_X^* = (\varepsilon^*; t^*; l_X)$.

Условия, которым должны удовлетворять характеристики ε^* , t^* и l_X , в значительной степени зависят от состояния процесса производства и от требований, предъявляемых к точности метода форсированных испытаний Π_X^* . Приведем их для случая, когда процесс производства нестабилен, а метод Π_X^* должен давать для каждой партии точное значение показателя надежности X при бесконечном объеме выборки, т. е.

$$X = l_X(F(t, \varepsilon^*)).$$

1. Режим ε^* должен выбираться так, чтобы между моментами отказов $\xi(\varepsilon^0)$ и $\xi(\varepsilon^*)$, относящимися к одному изделию, существовала функциональная зависимость

$$\xi(\varepsilon^0) = \varphi(\xi(\varepsilon^*)). \quad (24.1)$$

2. Форсированные испытания должны проводиться время

$$t^* = \varphi^{-1}(\tau^0). \quad (24.2)$$

3. Оценку характеристики надежности X должны проводить по формуле

$$X = L_X(F(\varphi(t), \varepsilon^*)). \quad (24.3)$$

Таким образом, при нестабильном процессе производства задание форсированного режима, удовлетворяющего условию (24.1), однозначно определяет функция φ , а следовательно, и остальные характеристики точных методов Π_X^* : продолжительность испытания и способ оценки. В соответствии с (24.1) и (24.3) получаем

$$\Pi_X^* = (\varepsilon^*; \varphi^{-1}(\tau^0); L_X(F(\varphi(t), \varepsilon^*))). \quad (24.4)$$

Запишем соотношение (24.4) отдельно для методов форсированных испытаний на безотказность, долговечность и ресурс.

1. Испытание Π_P^* . Так как

$$P(t_T, \varepsilon^0) = L_P(F(t, \varepsilon^0)) \equiv 1 - F(t_T, \varepsilon^0),$$

то продолжительность нормальных испытаний Π_P^0 равняется t_T . Согласно (24.2) и (24.3) надо продолжить испытания Π_P^* время $t^* = \varphi^{-1}(t_T)$, а показатель надежности P рассчитывать по формуле

$$P(t_T, \varepsilon^0) = L_P(F(\varphi(t), \varepsilon^*)) = 1 - F(t^*, \varepsilon^*). \quad (24.5)$$

Способ расчета (24.5) называют методом равных вероятностей. Смысл его состоит в том, что в форсированном режиме испытания проводят в течение такого времени t^* , чтобы вероятности отказов $F(t_T, \varepsilon^0)$ и $F(t^*, \varepsilon^*)$ были равны.

Итак: $\Pi_P^* = (\varepsilon^*; \varphi^{-1}(t_T); 1 - F(t^*, \varepsilon^*))$.

2. Испытание Π_T^* . Поскольку

$$T(\varepsilon^0) = L_T(F(t, \varepsilon^0)) \equiv \int_0^\infty t dF(t, \varepsilon^0),$$

в нормальном режиме изделия надо испытывать до отказа. Следовательно, до отказа должны испытываться изделия и в форсированном режиме, т. е. $\tau^0 = \infty$. Среднюю наработку на отказ необходимо рассчитывать по формуле

$$T(\varepsilon^0) = L_T(F(\varphi(t), \varepsilon^*)) = \int_0^\infty \varphi(t) dF(t, \varepsilon^*).$$

$$\text{Итак, } \Pi_T^* = (\varepsilon^*; \infty; \int_0^\infty \varphi(t) dF(t, \varepsilon^*)).$$

3. Испытание Π_R^* . По определению

$$R_q(\varepsilon^0) = L_R(F(t, \varepsilon^0)) \equiv F^{-1}(1 - q, \varepsilon^0).$$

Для оценки этой характеристики в нормальном режиме надо испытывать партию изделий до отказа $(1 - q)\%$, т. е. $\tau^0 = R_q(\varepsilon^0)$.

Испытание Π_R^* должно продолжаться время

$$t^* = \varphi^{-1}(R_q(\varepsilon_0)) = R_q(\varepsilon^*),$$

при котором откажут $(1 - q)\%$ изделий партии в форсированном режиме ε^* . Значение t^* может меняться от партии к партии. Расчет q -процентного ресурса $R_q(\varepsilon^0)$ партии осуществляют по формуле

$$R_q(\varepsilon^0) = L_R(F(\varphi(t), \varepsilon^*) = \varphi(R_q(\varepsilon^*))).$$

Итак: $\Pi_R^* = (\varepsilon^*; R_q(\varepsilon^*); \varphi(R_q(\varepsilon^*)))$.

На основе (24.3) находят оценки $\hat{X}$ показателя надежности X при конечном объеме n испытаний. Они получаются из (24.3) заменой теоретического распределения $F(t, \varepsilon^*)$ эмпирическим $\hat{F}(t, \varepsilon^*)$, что дает

$$\hat{X}(\varepsilon^0) = L_X(\hat{F}(\varphi(t), \varepsilon^*)). \quad (24.6)$$

Для испытаний Π_X^* , $X = P, T, R$, оценки (24.6) имеют вид:

$$\begin{aligned} \hat{P}(t_r, \varepsilon^0) &= 1 - d/n; \\ \hat{T}(\varepsilon^0) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i, (\varepsilon^*)); \quad \hat{R}_q(\varepsilon^0) = \varphi(\xi_m(\varepsilon^*)), \end{aligned}$$

где d — число отказов в выборке объема n ; $\xi_i(\varepsilon^*)$ — моменты отказов изделий выборки n ; $\xi_m(\varepsilon^*)$ — момент времени, при котором впервые откажут $(1 - q)\%$ изделий выборки объема n .

Перейдем к изложению методики проведения предварительных исследований, на стадии которых проверяется правильность выбора форсированного режима ε^* и определяется зависимость φ . Выбор режима осуществляется на основе экспериментальных исследований, знании физики отказов, интуиции инженера и т. п. Краткий обзор режимов и зависимостей показателей надежности от внешних факторов для ряда изделий электроники представлен в табл. 24.1, в которой приведены зависимости отношения $C(\varepsilon, \varepsilon^0) = T(\varepsilon)/T(\varepsilon^0)$ от ряда внешних факторов. (Верхним индексом «0» помечены номинальные значения соответствующих величин.)

Пусть выбран некоторый форсированный режим ε^* . Как отмечалось выше, в этом режиме можно проводить форсированные испытания Π^* , если моменты отказов $\xi^0 = \xi(\omega, \varepsilon^0)$, $\xi^* = \xi(\omega, \varepsilon^*)$ одного и того же изделия связаны между собой некоторой функциональной зависимостью

$$\xi^0 = \varphi(\xi^*). \quad (24.7)$$

Для проверки гипотезы (24.7) проводят следующий эксперимент.

Предназначенные для исследований изделия разделяют случайным образом на две части объемами m и n ($m \approx 0,5n$). Выборку объема m испытывают в нормальном режиме и определяют моменты отказов изделий $\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_m^0$. Вторую выборку испытывают в переменном режиме

$$\tilde{\varepsilon}(t) = \begin{cases} \varepsilon^0, & 0 \leq t < \tau, \\ \varepsilon^*, & t \geq \tau \end{cases}$$

со случайными моментами переключения τ . Возможные законы переключения указываются ниже. В процессе испытаний у каждого изделия форсируются наработки θ^0 и θ^* соответственно в нормальном и форсированном режимах, т. е. θ_i^0, θ_i^* , $i = 1, 2, \dots, n$.

Обработку полученных данных проводят следующим образом. По результатам испытаний выборки объема m находят эмпирическое распределение $\hat{F}(t, \varepsilon^0) = d(t)/m$, где $d(t)$ — число значений ξ_i^0 , меньших t . Обработку данных испытаний второй выборки проводят по-разному, в зависимости от проверяемой гипотезы (24.7). Выбирают некоторую допустимую функцию φ и рассчитывают n реализаций $\eta_\varphi^i = \theta_i^0 + \varphi(\theta_i^*)$, $i = 1, \dots, n$. По η_φ^i , $i = 1, \dots, n$, строят эмпирическое распределение $\hat{\Pi}(t) = b(t)/n$, где $b(t)$ — число значений η_φ^i , меньших t . Затем находят отклонение

$$D = \max_i |\hat{F}(t, \varepsilon^0) - \hat{\Pi}(t)|.$$

Зависимость коэффициентов C от внешних факторов для изделий различных типов

Тип изделия	C (е, е°)	Параметры режима
Химические источники тока	$(I/I_0)^n$	I — сила тока
Приемно-усилительные лампы	$[0,4 + 0,6(U_H/U_H^0)^{12}] (U_A/U_A^0)^{0,75} \times$ $\times (t_H/t_K^0)^{5,5} \exp \{n(t-t^0)\}$	U_H, U_A — напряжения накала и анода; t_H, t — температуры соответственно колбы и окружающей среды
ЛБВ	$\exp \{\alpha(\sqrt{P} - \sqrt{P_0}) + \beta(U_H - U_H^0)\}$	U_H — напряжение накала; P — мощность входного высокочастотного сигнала
Отражательные клистроны	$\exp \{\alpha(t-t^0) +$ $+ \beta(1/[V\overline{U_H} - 2] - 1/[V\overline{U_H^0} - 2])\}$	t — температура окружающей среды; U_H — напряжение накала
Резонансные разрядники	$\exp \left\{ \alpha \left(\frac{1}{t+\beta} - \frac{1}{t^0+\beta} \right) \right\}$	t — температура окружающей среды
Полупроводниковые диоды СВЧ	$\exp \{\alpha(\sqrt{P} - \sqrt{P_0})\}$	P — мощность СВЧ импульсов
Полупроводниковые приборы	$\exp \{\alpha(t-t^0) + R(U_{I_1} k_1 + U_3 I_3 k_2) -$ $- R(U_2 I_2 k_1^0 + U_4 I_4 k_2^0) - \gamma(U_3 - U_4)\}$	$U_i, I_i, i=1, 4$ — напряжение и ток в рабочем и нерабочем состояниях; k_1, k_2^0 — относительное время работы; $k_2 = 1 - k_1; k_2^0 = 1 - k_1^0$
Резисторы	$(P/P_0)^y \{1 + k\sqrt{RP(z-z^0)}\} \times$ $\times \exp \{\alpha(t-t^0) + R_t P - R_{t^0} P_0\}$	P — рассеиваемая мощность; z — влажность; R_t — тепловое сопротивление; t — температура окружающей среды
Конденсаторы	$(U/U^0)^n \exp \{\alpha(t-t^0)\}$	U — напряжение; t — температура окружающей среды
Двигатели	$\exp(\alpha/t - \alpha/t_0)$	t — температура окружающей среды
Реле	$\exp \{\alpha(U_H/U_H^0) - 1 + \beta(t-t^0)\}$	U_H — напряжение накала; t — температура окружающей среды
Провода и кабели	$\exp(\alpha/t - \alpha/t^0)$	t — температура окружающей среды
Изоляционные материалы	$\exp \{\alpha(t-t^0)\}$	t — температура окружающей среды

Тип изделия	C (ϵ , ϵ^0)	Параметры режима
Твердые материалы	$\exp \left\{ \frac{U - \gamma \sigma}{kt} - \frac{U - \gamma \sigma_0}{kt^0} \right\}$	t — температура окружающей среды; σ — растягивающее напряжение
Радиоэлектронная аппаратура	$(g/g^0)^a$, $2,25 \leq a \leq 2,6$	g — ускорение вибрационных нагрузок

Если D не превышает табулированного¹ значения D_β , то с уровнем значимости β ($\beta \sim 0,1, \dots, 0,3$) гипотезу (24.7) при выбранной функции φ считают выполненной. В противном случае ($D > D_\beta$) выбирают другую функцию φ . Для больших объемов выборок ($m, n \geq 50$) D_β рассчитываются по приближенной формуле $D_\beta \cong \sqrt{1/n + 1/m} \sqrt{-0,5 \ln \beta}$. «Перебирая» функцию φ из допустимого класса, находят такую, при которой отклонение D минимально. Если при этом гипотеза (24.7) выполняется с высоким уровнем значимости (порядка 0,1 ... 0,3), то считают, что форсированный режим ϵ^* выбран правильно. При малых уровнях значимости β строят приближенные методы форсированных испытаний. Практически возможные функции φ выбирают в виде многочленов с неизвестными коэффициентами, которым с некоторым шагом дают различные значения. Такой алгоритм перебора может быть реализован на ЭВМ.

Согласно принципу инвариантности характеристики $\xi(\omega, \epsilon^0)$, $\xi(\omega, \epsilon^*)$ не меняются в процессе производства, а значит, установленная на стадии предварительных исследований функция φ и уравнение (24.7) будут справедливы для всех партий.

Опишем способы выбора моментов переключения τ .

1. Задаются некоторой функцией распределения $H(t)$, имеющей положительную плотность в области изменения распределения отказов $F(t, \epsilon^0)$. В качестве $H(t)$ могут быть экспоненциальный, равномерный, логарифмически-нормальный и другие законы. По таблицам случайных чисел выбирают n чисел $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ и рассчитывают $\tau_i = H^{-1}(\mu_i)$. Изделие второй выборки под номером i испытывают в режиме ϵ^0 время τ_i , а затем, если оно не отказало, продолжают испытывать в режиме ϵ^* .

2. Вначале все n изделий испытываются в нормальном режиме ϵ^0 до момента времени τ_1 , когда наступает первый отказ. Из неотказавших изделий изымается наугад одно, а остальные $n - 2$ изделия продолжают испытывать в режиме ϵ^0 до очередного отказа. Допустим, что это произойдет в момент времени τ_2 . Вновь из отказавших изделий наугад изымается одно, а остальные $n - 4$ изделия продолжают испытывать в режиме ϵ^0 до очередного отказа и т. д. Таким образом, на конечном этапе будет $n/2$ изделий, отказавших в режиме ϵ^0 , и столько же работоспособных изделий. Годные изделия испытывают до отказа в форсированном режиме ϵ^* .

24.3. МЕТОДЫ «ДОЛАМЫВАНИЯ» И СТУПЕНЧАТЫХ НАГРУЖЕНИЙ

Опишем вначале программу испытаний по методу «доламывания»: из контролируемой партии делают две выборки;

одну выборку испытывают в форсированном режиме ϵ^* в течение времени t^1 ;

другую выборку испытывают в переменном режиме

¹ Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1965.

$$\varepsilon^2(t) = \begin{cases} \varepsilon^0, & 0 \leq t < \tau^1, \\ \varepsilon^*, & t \geq \tau^1 \end{cases}$$

в течение времени t^2 ;

в процессе испытаний фиксируют моменты отказов (наработки) изделий в режимах ε^0 и ε^* .

Форсированный режим ε^* и продолжительности испытаний τ^1 , t^1 , t^2 устанавливают на стадии предварительных исследований¹. В общем случае значения τ^1 , t^1 , t^2 могут меняться от партии к партии.

Обозначим Π_X^2 форсированные испытания, проводимые по указанной программе с целью оценки показателя надежности X . Возможные способы обработки результатов испытаний Π_X^2 описывают вначале для бесконечно больших выборок. Тем самым исключают статистические ошибки, обусловленные ограниченностью объема эксперимента. А затем уже предлагают оценки X для конечных выборок.

По результатам испытаний Π_X^2 бесконечно большого числа изделий находят распределения отказов: $F^*(t) = P(\xi(\varepsilon^*) < t)$, $t \leq t^1$; $F^2(t) = P(\xi(\varepsilon^2) < t)$, $t \leq t^2$. Поэтому оценку $\hat{X}$ для X находят по информации (F^*, F^2) , полагая $\hat{X} = l_X^2(F^*, F^2)$. Здесь l_X^2 — некоторый функционал, устанавливающий способ пересчета результатов испытаний Π_X^2 к нормальным условиям для всех партий.

Совокупность характеристик $(\varepsilon^*; \tau^1; t^1; t^2; l_X^2)$ определяет метод «доламывания» Π_X^2 . Различают точные и приближенные методы, в зависимости от того, совпадает или нет оценка $\hat{X}$ с истинным значением X . В последующем ограничимся анализом точных методов Π_X^2 , для которых

$$X = l_X^2(F^*, F^2). \quad (24.8)$$

Уточним, что в формуле (24.8) функционал l_X^2 должен быть одинаковым для всех партий.

Рассмотрим теперь форсированные испытания, проводимые по методу ступенчатых нагружений для оценки показателя надежности X . Обозначим их Π_X^{k+1} . Они проводятся по следующей программе:

выбирают k форсированных режимов ε_1^* , ε_2^* , ..., ε_k^* (обычно режимы ε_i^* предполагают в порядке возрастания их жесткости);

из контролируемой партии делают $k+1$ выборок;

в каждом режиме ε_i^* испытывают одну выборку в течение времени t^i , $i = 1, \dots, k$;

одну выборку испытывают в ступенчатом режиме

$$\varepsilon^{k+1}(t) = \begin{cases} \varepsilon^0, & 0 \leq t < \tau^1, \\ \varepsilon_1^*, & \tau^1 \leq t < \tau^2, \\ \vdots & \vdots \\ \varepsilon_k^*, & t \geq \tau^k \end{cases}$$

в течение времени t^{k+1} ;

в процессе испытаний всех выборок фиксируют наработку (моменты отказов) изделий.

Множества форсированных режимов $E^* = \{\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_k^*\}$, продолжительностей испытаний $I = \{t^1, t^2, \dots, t^{k+1}\}$ и моментов переключений $J = \{\tau^1, \tau^2, \dots, \tau^k\}$ устанавливают на стадии предварительных исследований. Конкретные значения характеристик ε_i^* , τ^i , t^i зависят от оцениваемого показателя надежности X , причем продолжительности испытаний τ^i и t^i могут меняться от партии к партии.

¹ Для компактности записи не будем подчеркивать индексом X возможную зависимость характеристик ε^* , τ^1 , t^1 , t^2 от оцениваемого показателя надежности X .

Принцип расходования ресурса

Название принципа	Математическая формулировка принципа
Пальмгрена — Майнера	$\int_0^{\infty} dF(t, \tilde{\varepsilon}) \int_0^t \frac{d\tau}{T(\tilde{\varepsilon}_{\tau})} = 1$
Пешеса — Степановой	$\int_0^{R_q(\tilde{\varepsilon})} \frac{d\tau}{R_q(\tilde{\varepsilon}_{\tau})} = 1$
Седякина	$P(t, \varepsilon t_2, \varepsilon_2) = P(t, \varepsilon t_1, \varepsilon_1),$ если $P(t_1, \varepsilon_1) = P(t_2, \varepsilon_2)$
Козлова — Серенсена	$\frac{\Theta(\varepsilon_1)}{T(\varepsilon_1)} + \frac{\Theta(\varepsilon_2)}{T(\varepsilon_2)} = \frac{1 + \beta \kappa^m}{1 + \beta \kappa^q},$ где $\beta = \Theta(\varepsilon_2)/\Theta(\varepsilon_1)$; $\kappa = \varepsilon_2/\varepsilon_1$
Фрейденталя	$\sum_{i=1}^k \left[\frac{\omega(\sigma_i) n_i}{N(\sigma_i)} \right]^{\rho(\sigma_i)} = 1$

Определение способа расчета показателя надежности X по результатам испытаний P_X^{k+1} дадим для бесконечных выборок. В этом случае по полученным данным восстанавливаются распределения отказов: $F(t, \varepsilon_j^*)$, $t \leq t_j^*$, $j = 1, \dots, k$; $F(t, \varepsilon^{k+1})$, $t \leq t^{k+1}$.

Для точных методов ступенчатых нагружений по информации $F(E) = \{F(t, \varepsilon_j^*), F(t, \varepsilon^{k+1})\}$ должно однозначно находиться значение показателя надежности X , что возможно при наличии связи X с $F(E)$ вида

$$X = I_X^{k+1}(F(E)). \quad (24.9)$$

Здесь I_X^{k+1} — некоторый функционал, одинаковый для всех партий.

Совокупность характеристик (E^*, I, J, I_X^{k+1}) определяет метод ступенчатых нагружений. Обозначим его P_X^{k+1} . Заметим, что при $k = 1$ метод ступенчатых нагружений совпадает с методом «доламывания».

Конкретно способы I_X^{k+1} пересчета результатов форсированных испытаний P_X^{k+1} к нормальным условиям и продолжительностей испытаний I и J обычно осуществляют на основе различных принципов расходования ресурса. Наиболее часто используемые принципы представлены в табл. 24.2. В таблице использованы следующие обозначения: $\tilde{\varepsilon}_{\tau}(t) = \tilde{\varepsilon}(\tau)$ — постоянный режим, совпадающий с $\tilde{\varepsilon}(\tau)$ при всех t ; $P(t, \varepsilon | t_i, \varepsilon_i)$ — условная вероятность безотказной работы за время t в режиме ε таких изделий партии, которые уже проработали безотказно время t_i в режиме ε_i ; $\Theta(\varepsilon)$ — средняя наработка изделий в режиме ε при испытании их в переменном режиме ε ; $N(\sigma)$ — среднее число циклов, которое изделие выдерживает до разрушения при нагрузке σ ; n_i — общее число циклов с амплитудой σ_i , приложенных к изделию до его разрушения; $m, q, \omega(\sigma_i), \rho(\sigma_i)$ — некоторые эмпирические коэффициенты, учитывающие предысторию нагружения.

Заметим, что принцип Фрейденшталя сформулирован применительно к циклическому нагружению с изменяющейся амплитудой σ , а принцип Козлова—Серенсена — для режимов, характеризующихся одним параметром.

Каждый принцип расходования ресурса может явиться основой некоторого метода «доламывания» или ступенчатых нагружений. В качестве примера построим методы Π_k^* и Π_k^{*+1} , базирующиеся на принципах Пальмгрена—Майнера и Пешеса—Степановой.

Пусть в области E , содержащей нормальный режим ε^0 , выполняется принцип Пальмгрена—Майнера. Составим $\varepsilon^2(t)$, $\varepsilon^{k+1}(t)$ с форсированными режимами ε^* , ε_j^* , $j=1, \dots, k$, из области E и с произвольными моментами переключения τ^j , $j=1, \dots, k$. Для режимов $\varepsilon^2(t)$ и $\varepsilon^{k+1}(t)$ принцип Пальмгрена—Майнера записывается соответственно в виде:

$$\Theta(\varepsilon^0)/T(\varepsilon^0) + \Theta(\varepsilon^*)/T(\varepsilon^*) = 1; \quad (24.10)$$

$$\Theta(\varepsilon^0)/T(\varepsilon^0) + \Theta(\varepsilon_1^*)/T(\varepsilon_1^*) + \dots + \Theta(\varepsilon_k^*)/T(\varepsilon_k^*) = 1. \quad (24.11)$$

Уравнение (24.10) устанавливает связь между показателем надежности $T(\varepsilon^0)$ и средними наработками $\Theta(\varepsilon^0)$, $\Theta(\varepsilon^*)$, $T(\varepsilon^*)$, которые восстанавливаются по результатам испытаний Π_k^* . А значит, на его основе можно предложить следующий метод «доламывания» для испытаний на долговечность. Из контролируемой партии испытаем две выборки до отказа всех изделий в режимах ε^* и ε^2 . При бесконечных выборках по результатам испытаний определим распределения отказов $F^*(t)$ и $F^2(t)$, $\forall t$, а затем вычислим средние наработки:

$$T(\varepsilon^*) = \int_0^\infty t dF^*(t);$$

$$\Theta(\varepsilon^0) = \int_0^{\tau^1} t dF^2(t) + \tau^1 [1 - F^2(\tau^1)]; \quad \Theta(\varepsilon^*) = \int_{\tau^1}^\infty (t - \tau^1) dF^2(t). \quad (24.12)$$

Подставляя (24.12) в (24.10), находим показатель надежности

$$T(\varepsilon^0) = I_T^2(F^*, F^2) \equiv \Theta(\varepsilon^0) T(\varepsilon^*) T[(\varepsilon^*) - \Theta(\varepsilon^*)]. \quad (24.13)$$

Таким образом, метод «доламывания» применен для испытаний на долговечность

$$\Pi_k^* = (\varepsilon^* \in E; t^1 = \infty; t^2 = \infty; \tau^1 \in]0; \infty[; I_T^2),$$

согласно которому выборки испытываются до отказа всех изделий (т. е. $t^1 = \infty$, $t^2 = \infty$), момент переключения τ^1 может быть любым из интервала $]0; \infty[$, а расчет (т. е. I_T^2) средней наработки на отказ $T(\varepsilon^0)$ осуществляется по формуле (24.13).

Отметим, что для расчета $T(\varepsilon^0)$ необязательно знать распределения отказов $F^*(t)$ и $F^2(t)$. Вместо них достаточно определить по результатам испытаний одной выборки характеристику $T(\varepsilon^*)$, а другой — средние наработки $\Theta(\varepsilon^0)$ и $\Theta(\varepsilon^*)$.

На основе (24.13) несложно указать способ оценки показателя надежности $T(\varepsilon^0)$ для конечных выборок. Обычно он сводится к простой замене в (24.13) характеристик $\Theta(\varepsilon^0)$, $\Theta(\varepsilon^*)$, $T(\varepsilon^*)$ их оценками. Опишем его подробнее.

Пусть из контролируемой партии испытано в форсированном режиме n_1 изделий и они отказали в момент времени ξ_1^* , ξ_2^* , ..., $\xi_{n_1}^*$, а в переменном режиме ε^2 испытано n_2 изделий и их наработки оказались равными $\theta_1(\varepsilon^0)$, ..., $\theta_{n_2}(\varepsilon^0)$,

$\theta_1(\varepsilon^*), \dots, \theta_{n_2}(\varepsilon^*)$. Тогда в качестве оценок характеристик $T(\varepsilon^*)$, $\Theta(\varepsilon^0)$, $\Theta(\varepsilon^*)$ можно положить широко известные статистики:

$$\widehat{T}(\varepsilon^0) = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \xi_i^*; \quad (24.14)$$

$$\widehat{\Theta}(\varepsilon^0) = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} \theta_i(\varepsilon^0); \quad \widehat{\Theta}(\varepsilon^*) = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} \theta_i(\varepsilon^*).$$

Заменяя в (24.13) характеристики $T(\varepsilon^*)$, $\Theta(\varepsilon^0)$, $\Theta(\varepsilon^*)$ их оценками (24.14), получаем для показателя надежности точечную оценку

$$\widehat{T}(\varepsilon^0) = \widehat{\Theta}(\varepsilon^0) \widehat{T}(\varepsilon^*) / [\widehat{T}(\varepsilon^*) - \widehat{\Theta}(\varepsilon^*)].$$

Опишем теперь метод ступенчатых нагружений для испытаний на долговечность Π_T^{k+1} , базирующийся на принципе Пальмгрена—Майнера. Из области E выбирают k форсированных режимов $\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_k^*$ и составляют переменный режим ε^{k+1} , задавшись произвольными моментами переключения $\tau^1 < \tau^2 < \dots < \tau^k$. В каждом режиме $\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_k^*$ испытывают по одной выборке из контролируемой партии до отказа всех изделий. По результатам проведенных испытаний для бесконечных выборок находят распределения отказов: $F(E) = \{F(t, \varepsilon_j^*), j = 1, \dots, k; F(t, \varepsilon^{k+1})\}$. По этим функциям рассчитывают средние наработки $\Theta(\varepsilon^0)$, $\Theta(\varepsilon_j^*)$, $T(\varepsilon_j^*)$, $j = 1, \dots, k$, входящие в уравнение (24.12):

$$T(\varepsilon_j^*) = \int_0^\infty t dF(t, \varepsilon_j^*), \quad j = 1, \dots, k;$$

$$\Theta(\varepsilon^0) = \int_0^{\tau^1} t dF(t, \varepsilon^{k+1}) + \tau^1 [1 - F(\tau^1, \varepsilon^{k+1})];$$

$$\Theta(\varepsilon_1^*) = \int_{\tau^1}^{\tau^2} t dF(t, \varepsilon^{k+1}) + (\tau^2 - \tau^1) [1 - F(\tau^2, \varepsilon^{k+1})];$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Theta(\varepsilon_k^*) = \int_{\tau^k}^\infty (t - \tau^k) dF(t, \varepsilon^{k+1}). \quad (24.15)$$

Подставляя затем (24.15) в (24.12), определяем показатель надежности

$$T(\varepsilon^0) = l_T^{k+1}(F(E)) = \Theta(\varepsilon^0) \left[1 - \sum_{j=1}^k \frac{\Theta(\varepsilon_j^*)}{T(\varepsilon_j^*)} \right]^{-1}. \quad (24.16)$$

Таким образом, на основе принципа Пальмгрена—Майнера предложен метод ступенчатых нагружений для испытаний на долговечность, согласно которому все выборки испытываются до отказа ($t_j^i = \infty$, $j = 1, \dots, k+1$), моменты переключения τ^j , $j = 1, \dots, k$, выбираются произвольно, а способ пересчета l_T^{k+1} результатов испытаний Π_T^{k+1} к нормальным условиям осуществляется по формуле (24.16).

В случае конечных выборок для получения точечной оценки показателя надежности $T(\varepsilon^0)$ достаточно заменить входящие в (25.16) характеристики $\Theta(\varepsilon^0)$, $\Theta(\varepsilon_j^*)$, $T(\varepsilon_j^*)$, $j = 1, \dots, k$, их оценками вида (24.14).

Построим методы «доламывания» и ступенчатых нагружений исходя из принципа Пешеса—Степановой. Для двухступенчатого режима $\varepsilon^2(t)$ исходное уравнение (см. табл. 24.2) имеет вид

$$\tau^1/R_q(\varepsilon^0) + [R_q(\varepsilon^2) - \tau^1]/R_q(\varepsilon^*) = 1, \quad (24.17)$$

где $\tau' < R_q(\varepsilon^2)$. Так как соотношение (24.17) устанавливает связь между показателем надежности $R_q(\varepsilon^0)$ и характеристиками $R_q(\varepsilon^*)$, $R_q(\varepsilon^2)$, то на его основе можно предположить метод «доламывания» при испытании на ресурс. Действительно, испытывая одну выборку в форсированном режиме до момента времени $t^1 = R_q(\varepsilon^*)$, при котором откажут $(1 - q)\%$ изделий, определяем характеристику $R_q(\varepsilon^*)$. Для нахождения $R_q(\varepsilon^2)$ испытаем вторую выборку вначале в режиме ε^0 до отказа $(1 - q_1)\%$ изделий, а затем в форсированном режиме ε^* до отказа $(1 - q)\%$ изделий. Другими словами, вторая выборка испытывается в переменном режиме ε^2 с моментом переключения $\tau^1 = R_{q_1}(\varepsilon^0)$, $q_1 > q$, в течение времени $t^2 = R_q(\varepsilon^2)$.

Установленные после испытаний значения $R_{q_1}(\varepsilon^0)$, $R_q(\varepsilon^*)$, $R_q(\varepsilon^2)$ подставим в (24.17) и определим

$$R_q(\varepsilon^0) = l_R^2(F^*, F^2) \equiv \frac{R_{q_1}(\varepsilon^0) R_q(\varepsilon^*)}{R_{q_1}(\varepsilon^0) + R_q(\varepsilon^*) - R_q(\varepsilon^2)}. \quad (24.18)$$

Таким образом, предложен метод «доламывания» для испытаний на долговечность

$$P_R^2 = (\varepsilon^* \in E; t^1 = R_q(\varepsilon^*); t^2 = R_q(\varepsilon^2); \tau^1 = R_q(\varepsilon^2); l_R^2),$$

для которого способ пересчета l_R^2 осуществляется по формуле (24.18), а значение q_1 может быть выбрано любым из интервала $|q; 1|$.

При конечных выборках показатель надежности $R_q(\varepsilon^0)$ рассчитывается также по формуле (24.18), только характеристики $R_q(\varepsilon)$ заменяются точечными оценками $\hat{R}_q(\varepsilon)$. В качестве $\hat{R}_q(\varepsilon)$ можно положить время, когда откажут $(1 - q)\%$ изделий выборки при испытании ее в режиме ε .

Построим на основе принципа Пешеса—Степановой метод ступенчатых нагружений для испытаний на долговечность. Для переменного режима $\varepsilon^{k+1}(t)$ с $\tau^1 < \tau^2 < \dots < \tau^k = R_q(\varepsilon^{k+1})$ исходное уравнение, приведенное в табл. 24.2 запишется так:

$$\frac{\tau^1}{R_q(\varepsilon^0)} + \frac{\tau^2 - \tau^1}{R_q(\varepsilon_1^*)} + \dots + \frac{R_q(\varepsilon^{k+1}) - \tau^k}{R_q(\varepsilon_k^*)} = 1. \quad (24.19)$$

Входящие в (24.19) характеристики можно определить по результатам испытаний $k + 1$ выборок в режимах ε_1^* , ε_2^* , ..., ε_k^* до отказа $(1 - q)\%$ изделий. По данным испытаний выборок в режимах ε_j^* определяем $R_q(\varepsilon_j^*)$, $j = 1, \dots, k$; значения характеристик $\tau^1, \tau^2, \dots, \tau^k$, $R_q(\varepsilon^{k+1})$ станут известными после испытаний выборок в режиме ε^{k+1} . Подставляя установленные характеристики в (24.19), находим показатель надежности

$$R_q(\varepsilon^0) = l_R^{k+1}(F(E)) \equiv \tau^1 \left[1 - \frac{\tau^2 - \tau^1}{R_q(\varepsilon_1^*)} - \frac{R_q(\varepsilon^{k+1}) - \tau^k}{R_q(\varepsilon_k^*)} \right]^{-1}. \quad (24.20)$$

Часто вместо τ^j , $j = 1, \dots, k$, задаются уровнями $q_1 > q_2 > \dots > q_k > q$ и испытание в режиме $\varepsilon^{k+1}(t)$ проводят следующим образом. Вначале испытывают в режиме ε^0 до отказа $(1 - q_1)\%$ изделий, затем в режиме ε_1^* до отказа $(1 - q_2)\%$ изделий и т. д. Другими словами, полагают $\tau^i = R_{q_i}(\varepsilon^{k+1})$, $i = 1, \dots$

..., k . Конкретные значения $R_{qi}(\varepsilon^{k+1})$ становятся известными после испытания $(k+1)$ -й выборки в режиме ε^{k+1} . При этом формула (24.20) принимает вид

$$R_q(\varepsilon^0) = R_{q_1}(\varepsilon^{k+1}) \left[1 - \sum_{i=1}^k \frac{R_{qi+1}(\varepsilon^{k+1}) - R_{qi}(\varepsilon^{k+1})}{R_q(\varepsilon_i^*)} \right]^{-1}, \quad (24.21)$$

где $q_{k+1} = q$.

Для конечных выборок $R_q(\varepsilon^0)$ рассчитывают по формуле (24.21), заменяя в ней характеристики R_{qi} соответствующими оценками.

Отметим, что с увеличением k использование метода ступенчатых нагрузок затрудняется из-за необходимости испытывать большое число изделий. Практически при больших значениях k эти методы можно реализовать, если установлена аналитическая зависимость показателей надежности от режима.

24.4. ПРИМЕР ИССЛЕДОВАНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МИКРОСХЕМ

Приведем результаты исследований интегральных микросхем (ИС), которые проводились с целью создания методики форсированных испытаний.

Согласно техническим условиям (ТУ) микросхемы операционных усилителей должны иметь минимальную наработку 500 ч при температуре окружающей среды 70 °С. В качестве форсированного режима ε^* было выбрано воздействие повышенной температуры 100 °С при одновременной подаче максимально допустимого напряжения. Более высокая температура (порядка 125 °С) для рассматриваемых ИС, работающих при сравнительно высоком рабочем напряжении и большой рассеиваемой мощности, может привести к значительному ужесточению электрического и теплового режимов работы операционных усилителей и, как следствие, — к возникновению отказов (сплавлению токоведущих дорожек, металлизации, тепловому пробую переходов и т. д.).

Для подтверждения правильности выбора форсированного режима на стадии предварительных исследований были взяты две выборки, каждая объемом 50 ИС. Первая выборка испытывалась в форсированном режиме при температуре $t^* = 100$ °С в течение 5000 ч. Вторая выборка испытывалась в течение 9000 ч по следующей программе.

По статистическим таблицам выбиралось 50 случайных чисел τ_i , распределенных по равномерному закону в интервале времени 0 ... 4000 ч. Изделие под номером i испытывалось вначале в форсированном режиме в течение времени τ_i , а затем, если оно не отказывало, — в нормальном. Нормальный режим представлял собой сочетание предельно допустимого по ТУ электрического режима и температуры окружающей среды $t^0 = 70$ °С. В процессе испытаний измерялись параметры — критерии годности ИС, указанные в ТУ, и фиксировались моменты отказов ИС.

В первой выборке за 5000 ч отказало 26 микросхем со следующими наработками, ч: 340, 504, 816, 930, 1176, 1240, 1320, 1600, 1920, 2240, 2590, 2710, 2960, 3248, 3248, 3560, 3724, 3960, 3960, 4258, 4480, 4480, 4740, 4740, 4900, 4900.

Результаты испытаний второй выборки представлены в табл. 24.3, где θ^* и θ^0 означают соответственно наработки ИС в форсированном ε^* и нормальном ε^0 режимах.

По полученным данным проверялась гипотеза о том, что моменты отказов изделия ξ^0 и ξ^* в нормальном и в форсированном режимах связаны между собой линейной зависимостью

$$\xi^0 = C\xi^*. \quad (24.22)$$

Гипотеза (24.22) эквивалентна следующей статистической гипотезе:

$$F(t, \varepsilon^*) \equiv P(\theta^* + C^{-1}\theta^0 < t) = \Pi(t). \quad (24.23)$$

Результаты испытаний второй выборки ИС

Номер ИС	Наработка θ^* , ч	Наработка θ° , ч	Номер ИС	Наработка θ^* , ч	Наработка θ° , ч	Номер ИС	Наработка θ^* , ч	Наработка θ° , ч
1	27	8973	18	1928	3066	35	4017	4983
2	54	8946	19	1345	7655	36	4170	4830
3	224	8776	20	2124	1428	37	3764	0
4	260	0	21	2205	1965	38	4006	4794
5	494	8506	22	2257	6743	39	4000	5000
6	544	8456	23	2300	0	40	4434	4566
7	640	8360	24	2600	0	41	3490	2430
8	590	2550	25	2940	6060	42	4570	4430
9	627	8373	26	2850	6150	43	4880	4120
10	774	8226	27	3060	5940	44	4740	1680
11	928	8072	28	3460	5540	45	4910	4090
12	660	0	29	3100	0	46	4950	4050
13	1176	7824	30	3640	5360	47	4780	4220
14	860	0	31	3700	3492	48	4980	4020
15	1608	7392	32	3660	5340	49	3180	5820
16	1660	6720	33	3180	1140	50	4510	4490
17	1877	7123	34	3270	5730			

Так как в рассматриваемом случае испытания проводились не до отказа всех изделий, то вместо (24.23) проверялась гипотеза о равенстве распределений на ограниченном интервале времени:

$$F(t, \varepsilon^*) \equiv \Pi(t), \quad t < 5000 \text{ ч.} \quad (24.24)$$

Гипотеза (24.24) проверялась с помощью критерия Реньи. Для этого при фиксированном коэффициенте ускорения C рассчитывалось отклонение

$$D = \sup_{t \leq 5000 \text{ ч}} \{ |\hat{F}(t, \varepsilon^*) - \hat{\Pi}(t)| : \hat{F}(t, \varepsilon^*) \},$$

где $\hat{F}(t, \varepsilon^*)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по данным испытаний первой выборки ИС, а $\hat{\Pi}(t)$ определялась по ряду $\theta_i^* + C^{-1}\theta_i^\circ$, $i = 1, 2, \dots, 50$, составленному по результатам испытаний второй выборки ИС.

Если при некотором C значение D не превышает табулированного значения D_β , то с уровнем значимости β гипотеза (24.24) считается выполненной. Обработка данных производилась с помощью ЭВМ. Методом перебора было установлено, что функция D достигает минимума 0,125 при $C = 2,5$. Расчеты показывают, что при $C = 2,5$ с высоким уровнем значимости $\beta \approx 50\%$ гипотеза (24.24), а следовательно, (24.22) справедлива. Таким образом, ужесточение режима — повышение температуры на 30°C от $t^\circ = 70^\circ\text{C}$ до $t^* = 100^\circ\text{C}$ позволяет в 2,5 раза сократить продолжительность испытаний ИС на надежность по сравнению с нормальным режимом.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА

Глава 25

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С МОНОТОННОЙ ФУНКЦИЕЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

25.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В теории надежности редко удается достаточно достоверно знать об истинных законах распределений наработок до отказа, времени восстановления и о других интересующих нас случайных величинах. В то же время на основании предыдущего опыта или просто исходя из общих соображений можно сформулировать определенные качественные свойства тех или иных исследуемых величин. Так например, многие физические объекты подвержены износу и старению, т. е. с течением времени (в частности, времени работы) они ухудшают показатели надежности. Такие объекты естественно назвать «стареющими», а часто и распределения времени безотказной работы этих объектов также называются «стареющими».

На практике встречаются и обратные явления, когда с течением времени физические объекты улучшают свои качества: известны феномены закаливания для металлов, упрочнения некоторых металлов при постоянной нагрузке, «выжигания» слабых мест при эксплуатационной приработке изделий и т. п. Для таких объектов используют термин «молодеющие объекты», а распределения наработки называют «молодеющими».

Оказывается, что подобная информация крайне полезна как для расчетов надежности отдельных устройств, так и при исследовании сложных систем, состоящих из таких элементов.

Феномен старения (молодения) удобно сформулировать в терминах интенсивности отказов

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

или в терминах так называемой ведущей функции

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(x) dx,$$

которая, как известно, определяется через функцию распределения:

$$\Lambda(t) = -\log(1 - F(t)).$$

(В дальнейшем для удобства изложения будем обозначать $p(t)$ через $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$.)

Ниже приводятся основные строгие определения и различные оценки для разных классов распределений с монотонными функциями интенсивности.

25.2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ КЛАССОВ «СТАРЕЮЩИХ» И «МОЛОДЕЮЩИХ» РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

25.2.1. ВФИ (УФИ). Распределение F называется ВФИ (УФИ), если оно характеризуется возрастающей (убывающей) по t функцией интенсивности $\lambda(t)$. (В общем случае $\lambda(t)$ удобнее называть не интенсивностью отказов, а функцией интенсивности.)

25.2.2. **ВСФИ (УСФИ)**. Распределение F имеет возрастающую в среднем функцию интенсивности (далее будем записывать, что F есть ВСФИ-распределение), если функция $\frac{1}{t} \log \bar{F}(t)$ возрастает по $t \geq 0$.

Аналогично F имеет убывающую в среднем функцию интенсивности (F есть УСФИ-распределение) на $[0, \infty)$, если $-\frac{1}{t} \log \bar{F}(t)$ убывает по t .

Очевидно, что ВСФИ-распределение F характеризуется убыванием $\sqrt[t]{\bar{F}(t)}$ на интервале $[0, \infty)$, а УСФИ-распределение характеризуется возрастанием $\sqrt[t]{\bar{F}(t)}$ на интервале $[0, \infty)$. Следовательно, распределение является ВСФИ (УСФИ) тогда, и только тогда, когда

$$\bar{F}(\alpha t) \geq (\leq) [\bar{F}(t)]^\alpha \text{ для всех } 0 < \alpha < 1 \text{ и } t > 0.$$

ВСФИ-распределение, например, возникает, когда по пуассоновскому закону во времени на некоторую конструкцию воздействует ударная нагрузка, причиняя с каждым ударом независимый случайный ущерб, причем рассматриваемое устройство отказывает, когда накопленный ущерб достигнет некоторого критического уровня. Время до достижения подобного отказа подчиняется ВСФИ-распределению. Сформулируем строго случаи появления ВСФИ-распределения.

1. Если вероятность безотказной работы $\bar{H}(t)$ для периода времени $[0, t]$ определяется выражением

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

для $0 \leq t < \infty$ и $\bar{P}_0 = 1$, а $\sqrt[k]{\bar{P}_k}$ убывают по k , то H есть ВСФИ-распределение, т. е. $\sqrt[t]{\bar{H}(t)}$ убывает по $t > 0$.

2. Для всякого распределения F , такого, что $F(x) = 0$ для $x < 0$, $\sqrt[k]{F^{*k}(x)}$ убывает¹ по $k = 1, 2, \dots$

Если

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} F^{*k}(x)$$

представляет собой вероятность безотказной работы в модели накопления ущерба, где неотрицательные повреждения имеют произвольную функцию распределения $F(x)$, то H есть ВСФИ-распределение наработки до отказа.

3. Если функции распределения F_i удовлетворяют условию $F_i(x) = 0$ для $x < 0$, $i = 1, 2, \dots$, и если функция $F(x)$ убывает по i для всех z , то

$\sqrt[k]{F_1 * F_2 * \dots * F(x)}$ убывает по $k = 1, 2, \dots$

Если $F_i(x) = 0$ для $x < 0$ и $F_i(x)$ убывает по $i = 1, 2, \dots$, то

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} F_1 * F_2 * \dots * F_k(t)$$

есть ВСФИ-распределение.

4. Пусть $X_1, X_2, \dots$ есть неотрицательные случайные величины с совместным распределением, удовлетворяющим условиям:

¹ Напомним, что F^{*k} — k -кратная свертка распределения F , т. е.

$$F^{*k}(x) = \int_0^x F^{*(k-1)}(x-y) dF(y).$$

а) $P\{X_h > n | X_1, \dots, X_{k-1}\}$ зависит от $X_1, \dots, X_{k-1}$ только через их сумму

$$Z_{k-1} = X_1 + \dots + X_{k-1};$$

$$\text{б) } P\{X_h > n | Z_{k-1} = z\} \leq P\{X_{k+1} > n | Z_k = z\};$$

в) если $P\{X_h > n | Z_{k-1} = z\}$ возрастают по z , то $\sqrt[k]{P\{X_1 + \dots + X_h \leq x\}}$ убывает по $k = 1, 2, \dots$

Если $X_1, X_2, \dots$ удовлетворяют этим условиям, то распределение $H(t)$, определяемое формулой

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} P\{X_1 + \dots + X_h \leq x\},$$

является ВСФИ-распределением.

Определенные классы распределений вероятностей возникают совершенно естественным образом при исследовании систем с заменой элементов.

25.2.3. НЛИ (НХИ). Распределение наработки до отказа F называется «новое лучше (хуже) использованного» или сокращенно НЛИ (НХИ), если

$$\bar{F}(x+y) \leq (\geq) \bar{F}(x)\bar{F}(y) \quad (25.1)$$

для $x \geq 0, y \geq 0$.

Это эквивалентно утверждению о том, что условная вероятность безотказной работы $\bar{F}(x+y)/\bar{F}(x)$ элемента с наработкой x меньше (больше), чем соответствующая вероятность безотказной работы для совершенно нового элемента. (Равенство в (25.1) имеет место тогда, и только тогда, когда есть экспоненциальное распределение.)

25.2.4. НСЛИ (НСХИ). Распределение наработки до отказа F называется «новое в среднем лучше (хуже) использованного» или сокращенно НСЛИ (НСХИ), если:

1) F имеет конечное (конечное или бесконечное) математическое ожидание;

$$2) \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx \leq (\geq) \mu \bar{F}(t) \text{ для } t \geq 0.$$

Заметим, что интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)} dx$$

представляет собой условную остаточную наработку (условное математическое ожидание наработки до отказа) элемента, проработавшего безотказно в течение времени t . Следовательно, для НСЛИ-распределения остаточная наработка до отказа элемента с наработкой t меньше, чем у нового элемента.

Отсюда следуют отношения между различными классами распределений

$$\text{ВФИ} \subset \text{ВСФИ} \subset \text{НЛИ} \subset \text{НСЛИ};$$

$$\text{УФИ} \subset \text{УСФИ} \subset \text{НХИ} \subset \text{НСХИ}.$$

НЛИ-, НСЛИ-, НХИ-, НСХИ-классы распределений наработки до отказа появляются при исследовании моделей накопления ударов, которые описываются ниже.

Модель 1. Предположим, что некоторое устройство подвергается ударным воздействиям, моменты появления которых образуют пуассоновский поток с интенсивностью λ . Предположим, что вероятность того, что устройство благополучно перенесет k ударов, равна p_k , где $1 = \bar{p}_0 \geq \bar{p}_1 \geq \dots$. Тогда вероятность безот-

казной работы устройства $\bar{H}(t)$ в течение интервала времени $[0, t]$ определяется как

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{p}_k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \text{ для } 0 \leq t < \infty.$$

Если теперь предположить, что вероятность безотказной работы устройства при воздействии очередных k ударов тем меньше, чем больше ударов перенесло данное устройство в течение предыдущей работы, то тогда можно заключить, что распределение H есть НЛИ-распределение.

Модель 2. Если $\bar{p}_k$ удовлетворяют условию

$$\bar{p}_{k+i} \leq (\geq) \bar{p}_k \bar{p}_i \text{ для } k=0, 1, 2, \dots, i=0, 1, 2, \dots,$$

то H есть НЛИ (НХИ)-распределение.

Если p_k удовлетворяет условию

$$\bar{p}_k \sum_{j=0}^{\infty} \bar{p}_j \geq (\leq) \sum_{j=k}^{\infty} \bar{p}_j, \quad k=0, 1, 2, \dots,$$

то H есть НСЛИ (НСХИ)-распределение.

25.3. СОХРАНЕНИЕ МОНОТОННОСТИ ФУНКЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

Практический интерес представляет выяснение того, при каких преобразованиях сохраняются те или иные распределения.

25.3.1. Свертка распределений. Свертка ВФИ-распределений является ВФИ-распределением, например резервированная система с ненагруженным резервом, у которой каждая из элементов имеет ВФИ-распределение времени безотказной работы.

Свертка УФИ-распределений не является УФИ-распределением. Например, если элемент имеет гамма-распределение порядка α , где $0,5 < \alpha < 1$, то дублированная система с ненагруженным резервом будет иметь гамма-распределение наработки до отказа порядка 2α ($2\alpha > 1$), т. е. строго ВФИ-распределение.

25.3.2. Смесь распределений. Смесь УФИ-распределений является УФИ-распределением.

Пусть имеется несколько партий элементов, каждая из которых характеризуется УФИ-распределением наработки до отказа. Если смешать все элементы этих партий, то такая объединенная партия элементов будет также иметь УФИ-распределение.

О смеси ВФИ-распределений в настоящее время нет определенного утверждения. Ясно, что смесь ВФИ-распределений необязательно дает ВФИ-распределение. Более того, не найдены условия, когда это вообще имеет место. (Смесь экспоненциальных распределений, являющихся граничными для ВФИ- и УФИ-распределений, дает, например, строго УФИ-распределение.)

25.3.3. Формирование монотонной структуры. Напомним, что структура называется монотонной, если структурная функция Φ системы из n элементов обладает следующими свойствами:

$$\Phi(x) \geq \Phi(x^*), \text{ если } x \geq x^*,$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, причем

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й элемент работоспособен,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

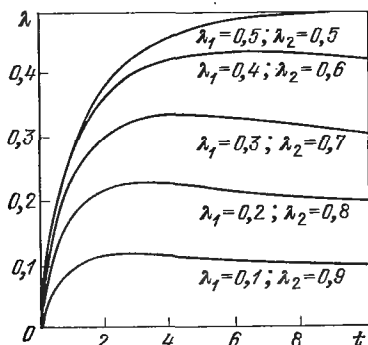
Естественно, что $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(1) = 1$. (Здесь $0 = (0, \dots, 0)$; $1 = (1, \dots, 1)$.)

Представляется, что монотонная структура из элементов с ВФИ-распределениями наработки до отказа будет всегда иметь ВФИ-распределение наработки до отказа. Однако это легко опровергнуть. Рассмотрим дублированную систему из различных элементов, каждый из которых имеет экспоненциальное распределение наработки до отказа с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Интенсивность отказов системы будет

$$\lambda(t) = \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}}{e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}}.$$

Функция $\lambda(t)$ не является монотонно возрастающей для всех λ_1, λ_2 , как это видно из рис. 25.1.

Рис. 25.1. Вид функции интенсивности отказов для невосстанавливаемой дублированной системы из различных элементов



25.3.4. Дополнительные примеры. Предположим, что случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ взаимно независимы и имеют ВСФИ-распределение. Тогда следующие преобразования случайных величин приводят также к ВСФИ-распределению:

$$1) \min_{1 \leq s \leq m} \max_{i \in K_s} \varepsilon_i, \quad \sum_{s=1}^m k_s = n;$$

$$2) \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n;$$

$$3) \left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^\beta \right]^{\frac{1}{\beta}} \quad \text{при } 0 < \beta;$$

$$4) \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \varepsilon_i}.$$

Если $K_1, K_2, \dots, K_h$ есть минимальные сечения двухполюсной сети, то максимальный поток через сеть определяется как

$$\min_k \sum_{i \in K} \varepsilon_i,$$

где ε_i есть случайные по величине пропускные способности дуг графа. Максимальный поток через сеть для определенных выше случайных величин ε_i также будет иметь ВСФИ-распределение.

Результаты воздействия различных операций на указанные распределения сведены в табл. 25.1.

Сохранение вида распределения при преобразованиях

Класс исходных распределений	Операции над распределениями		
	Образование монотонной структуры	Свертка распределений	Смесь распределений
ВФИ	Не сохраняется	Сохраняется	Не сохраняется
ВСФИ	Сохраняется	Неизвестно	» »
УФИ	Не сохраняется	Не сохраняется	Сохраняется
УСФИ	» »	» »	» »
НЛИ	Сохраняется	Сохраняется	Не сохраняется
НСЛИ	Не сохраняется	» »	» »
НХИ	» »	Не сохраняется	» »
НСХИ	» »	» »	Неизвестно

25.4. ГРАНИЧНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ

Эти оценки представляют интерес для вероятности безотказной работы и других показателей надежности в предположении, что известен один из моментов распределения наработки до отказа или квантиль этого распределения, а само распределение является ВФИ, ВСФИ, УФИ и УСФИ. Такие граничные оценки полезны в различных прикладных задачах надежности, поскольку довольно типичной при оценке надежности является ситуация, когда, например, на основании эксперимента известно только среднее значение наработки до отказа, а также априори известно, что элементы подвержены износу или старению.

25.4.1. Граничные оценки вероятности безотказной работы по одному известному значению квантили. Если F есть ВСФИ (УСФИ)-распределение с квантилью ε_p уровня p (это означает, что $F(\varepsilon_p) = p$), то

$$\bar{F}(t) \begin{cases} \geq (\leq) e^{-\alpha t} & \text{для } 0 \leq t \leq \varepsilon_p, \\ \leq (\geq) e^{-\alpha t} & \text{для } t \geq \varepsilon_p, \end{cases}$$

где α определяется из условия

$$\alpha = -\varepsilon_p^{-1} \log(1 - p).$$

25.4.2. Граничные оценки вероятности безотказной работы по одному известному моменту распределения. Введем предварительно понятие звездообразности функции. Звездообразной функцией называется такая, для которой любой луч, проведенный из начала координат до точки пересечения с этой функцией, лежит выше нее. Иными словами, $x^{-1}F(x)$ возрастает для $x \geq 0$. В частности, выпуклые вниз функции являются подклассом звездообразных функций.

Если обратная функция $G^{-1}(F(x))$ является звездообразной, то будем записывать $F <^* G$.

Теперь можно сформулировать следующие оценки.

Если $F <^* G$, $F(0) = G(0) = 0$, F и G — непрерывные функции распределения с равными r -ми начальными моментами

$$m_r = \int_0^\infty t^r dF(t) = \int_0^\infty t^r dG(t)$$

для фиксированного значения $r \geq 1$, то

$$\bar{F}(t) \geq \begin{cases} \bar{G}(t) & \text{для } t < \sqrt[r]{m_r}, \\ 0 & \text{для } t \geq \sqrt[r]{m_r}. \end{cases}$$

Если F есть непрерывное ВФИ-распределение с r -м начальным моментом m_r ,

и $\mu_r = \frac{m_r}{\Gamma(r+1)}$ для $r \geq 1$, то

$$\bar{F}(t) \geq \begin{cases} e^{-\frac{t}{\sqrt[r]{\mu_r}}} & \text{для } t < \sqrt[r]{m_r}, \\ 0 & \text{для } t \geq \sqrt[r]{m_r}. \end{cases}$$

Понятно, что если известен первый начальный момент (математическое ожидание или в данном случае средняя наработка до отказа), то

$$\bar{F}(t) \geq \begin{cases} e^{-t/T} & \text{для } t < T, \\ 0 & \text{для } t \geq T. \end{cases}$$

Если F есть ВФИ-распределение со средним T , то для всякого фиксированного $t > 0$

$$\bar{F}(t) \leq \begin{cases} 1 & \text{для } t \leq T, \\ e^{-\omega_t t} & \text{для } t > T, \end{cases}$$

где $\omega_t > 0$ и является функцией t , удовлетворяющей условию

$$1 - \omega_t T = e^{-\omega_t t}.$$

Значения $F(t)$ для $t > T$ приведены в табл. 3.4.

Характер поведения верхних и нижних границ для ВФИ-распределения показан на рис. 3.1.

Если F есть УФИ-распределение со средним значением T , то

$$\bar{F}(t) \leq \begin{cases} e^{-t/T} & \text{для } t \leq T, \\ Te^{-1/t} & \text{для } t \geq T. \end{cases}$$

Если F есть ВСФИ-распределение и

$$\int_0^{\infty} t^r dF(t) = m_r \quad \text{для } r > 0,$$

то

$$\bar{F}(t) \geq \begin{cases} \min(e^{-b_s s}, e^{-cs}) & \text{для } t < \sqrt[r]{m_r}, \\ 0 & \text{для } t \geq \sqrt[r]{m_r}, \end{cases}$$

где b_s определяется из уравнений

$$s^r (1 - e^{-b_s s}) + \int_s^{\infty} t^r b_s e^{-b_s t} dt = m_r$$

и

$$c = \sqrt[r]{\frac{m_r}{\Gamma(r+1)}}.$$

Численные значения нижней оценки для ВСФИ-распределения при $m_1 = T = 1$ приводятся в табл. 3.7.

25.4.3. Граничные оценки вероятности безотказной работы по известному среднему и дисперсии. Аналитические выражения в неявной форме очень громоздки даже для получения границ, поэтому здесь приводятся лишь таблицы в сокращенной форме (см. табл. 3.5 и 3.6).

25.4.4. **Граничные оценки для моментов распределения.** Если F есть ВСФИ (УСФИ)-распределение с известным средним значением T , граничные оценки для r -го начального момента распределения $m_r = \int_0^{\infty} t^r dF(t)$ определяются как:

$$m_r \geq (\leq) \Gamma(r+1)T^r \text{ для } 0 < r < 1;$$

$$m_r \leq (\geq) \Gamma(r+1)T^r \text{ для } 1 \leq r < \infty.$$

В частности, при $r = 2$ для F , являющегося ВСФИ (УСФИ)-распределением, находим, что

$$M_2 \leq (\geq) 2T^2,$$

или, что эквивалентно, неравенству для коэффициента вариации $\frac{\sigma}{T} \leq (\geq) 1$, где $\sigma^2 = m_2 - T^2$.

Глава 26

НАДЕЖНОСТЬ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

26.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

26.1.1. Предварительные замечания. Под механической системой будем понимать некоторый объект, взаимодействующий с окружающей средой и выполняющий определенные функции, связанные с изменением во времени и пространстве взаимного расположения взаимодействующих между собой элементов. В зависимости от типа рассматриваемых элементов механическая система представляет собой систему материальных точек, твердое тело, сплошную среду и т. д. По характеру изменения во времени и взаимодействия ее элементов состояние механической системы описывается уравнениями статики, кинематики или динамики. Методы исследования механических систем широко применяются при расчетах машин, механизмов, строительных сооружений и конструкций, транспортных средств, летательных аппаратов и т. п.

26.1.2. Нагрузки и воздействия на механические системы. По своей природе нагрузки и воздействия на механическую систему со стороны окружающей среды являются случайными. Случайный характер нагрузок определяется случайными значениями параметров нагрузки, случайным распределением ее во времени и в различных точках системы, случайным сочетанием различных нагрузок и многими другими факторами.

С математической точки зрения случайные нагрузки описываются случайными величинами с заданными законами распределения, случайными процессами, случайными полями или пространственно-временными случайными функциями. Примером первого типа нагрузок служат нагрузки, статически приложенные в отдельных точках или узлах конструкции. Случайными процессами описываются, например, кинематические воздействия на колеса транспортных средств, движущихся по неровному пути. Нагрузки от технологического оборудования на перекрытия промышленных зданий могут служить примером нагрузок, для описания которых привлекаются методы теории случайных полей. Пульсации давления в турбулентном пограничном слое, действующие на поверхности летательного аппарата, являются примером пространственно-временной случайной нагрузки.

В пределах каждого типа нагрузки могут быть классифицированы по различным признакам. Так, нагрузки, задаваемые в виде случайных процессов, могут быть стационарными или нестационарными, скалярными или векторными, одно-

мерными или многомерными, дискретными или непрерывными, кратковременными или длительными и т. д.

26.1.3. Механические свойства материалов и элементов конструкций. Вероятностные свойства поведения механической системы определяются не только случайным характером внешних нагрузок, но и изменчивостью механических свойств материалов, из которых изготовлены отдельные элементы, а также изменением характера взаимодействия элементов в процессе эксплуатации, неточностью изготовления и рядом других факторов.

Стохастический характер изменчивости механических свойств материалов имеет двоякую природу. Во-первых, в процессе эксплуатации происходит изменение во времени параметров, определяющих механические свойства системы. Эти изменения связаны со старением материала, с ухудшением прочностных характеристик, с накоплением повреждений, коррозионным и фрикционным износом, а также с изменением свойств в процессе восстановления и ремонта отдельных элементов. Во-вторых, изменчивость проявляется при рассмотрении данной системы как элемента из множества систем, свойства которой стохастически меняются при переходе от одного элемента к другому.

26.1.4. Особенности расчета механических систем на надежность. Надежность механических систем определяется множеством факторов, важнейшими из которых являются: воздействие случайных внешних нагрузок, свойства самой системы и ее элементов, характер взаимодействия элементов, конструктивные и технологические особенности и т. п.

Оценка надежности механической системы складывается из следующих основных этапов. Сначала с использованием методов механики сплошной среды, твердого тела или материальных точек выбирается расчетная схема реальной системы, строится ее математическая модель. Выбор расчетной схемы включает также аппроксимацию внешних нагрузок и их вероятностное описание. После этого методами статистической динамики находятся вероятностные характеристики параметров, определяющих поведение системы при случайных воздействиях. Затем определяются параметры, характеризующие качество системы, и находится допустимая область, в которой параметры качества должны сохраняться в установленных пределах. Далее производится оценка показателей надежности и долговечности.

26.1.5. Отказ как выброс случайного процесса из допустимой области. Рассмотрим механическую систему, взаимодействующую с окружающей средой. Пусть внешние воздействия q могут принимать значения из пространства Q . Стохастическое поведение системы будем характеризовать элементами $u \in U$, при этом пространство U выбирается таким образом, чтобы с помощью его элементов можно было в рамках выбранной расчетной схемы достаточно полно описать состояние системы. Свойства системы характеризуются оператором L , который каждой реализации элементов из пространства воздействий Q приводит в соответствие реализацию элементов в пространстве состояний U :

$$Lu = q. \quad (26.1)$$

В задачах механики оператор L обычно представляет собой дифференциальный оператор, причем запись основного уравнения в форме (26.1) включает также начальные и краевые условия. Исследование уравнения (26.1) при случайном внешнем воздействии составляет предмет статистической динамики.

В теории надежности механических систем определяющим является пространство качества V . Это пространство выбирается таким образом, чтобы с помощью его элементов v можно было достаточно полно характеризовать качество функционирования системы. Связь между элементами v и u дается операторным соотношением

$$v = Mu.$$

При нормальном эксплутационном состоянии системы ее параметры качества должны сохраняться в установленных пределах в течение всего нормативного срока службы. Математически это соответствует нахождению элементов v в допустимой области Ω пространства качества V . Граница Γ этой области, соответствующая наступлению предельных состояний в системе, называется предельной поверхностью. Выход траектории $v(t)$ из допустимой области Ω соответствует отказу системы.

Таким образом, наступление отказа интерпретируется как случайное пересечение траекторией процесса $v(t)$ предельной поверхности Γ или как выброс случайного процесса $v(t)$ из допустимой области Ω .

26.1.6. Показатели надежности. Основным показателем надежности $P(t)$ вводится как вероятность безотказной работы на отрезке времени $[0, t]$, что соответствует вероятности нахождения вектора качества $v(t)$ в допустимой области Ω в течение этого отрезка времени:

$$P(t) = P\{v(\tau) \in \Omega; \tau \in [0, t]\}. \quad (26.2)$$

Введенный таким образом показатель надежности вычисляется на основе теории выбросов случайных процессов и полей.

В (26.2) не учитывается разброс физико-механических свойств материалов, который имеет место, например, при переходе от одного элемента множества систем к другому, и разброс параметров нагрузок. Пусть случайные свойства параметров системы характеризуются векторной случайной величиной r , а разброс параметров внешнего воздействия $q(t)$ определяется вектором s . Совместную плотность вероятности параметров r и s обозначим через $p(r, s)$. Вероятность безотказной работы в этом случае находится по формуле полной вероятности

$$P(t) = \iint P(t|r, s) p(r, s) dr ds,$$

где интегрирование производится по всей области изменения параметров r и s . Условная вероятность безотказной работы $P(t|r, s)$ вычисляется аналогично (26.2) для системы с фиксированными параметрами r и s ; при этом вектор качества будет зависеть от r и s , а допустимая область — от параметра r .

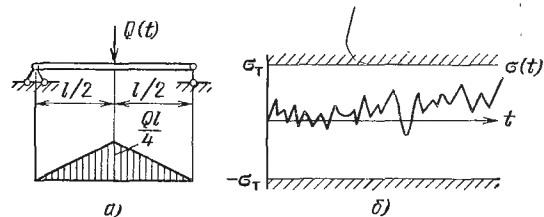


Рис. 26.1. Шарнирно опертая балка (а) и реализация процесса нагружения (б)

26.1.7. Примеры постановки задач. Изложенный подход к определению надежности механических систем проиллюстрируем на простых примерах. Основное внимание в этих примерах уделено выбору пространства качества V и допустимой области Ω в этом пространстве.

1. Рассмотрим шарнирно-опертую балку постоянного поперечного сечения, нагруженную посредине пролета сосредоточенной силой $Q(t)$ (рис. 26.1, а). Будем считать, что эффективная частота случайного процесса $Q(t)$ много меньше нижней собственной частоты балки, так что процесс нагружения можно рассматривать как квазистатический. Напряженное состояние описывается максимальным значением изгибающего момента $M(t) = 0,25 Q(t)$. Качество системы будем характеризовать максимальным нормальным напряжением в опасном сечении: $\sigma(t) = M(t)/W$. Если нормальная эксплуатация возможна лишь при отсутствии пластических деформаций, то условие безотказной работы имеет вид $|\sigma(t)| < \sigma_T$, где σ_T — предел текучести. Пространство V будет одномерным, а область Ω — отрезком прямой: $\Omega = \{v(t): |\sigma(t)| < \sigma_T\}$. Формула (26.2) принимает вид

$$P(t) = P\{-\sigma_T < \sigma(\tau) < \sigma_T; \tau \in [0, t]\}.$$

На рис. 26.1, б показана реализация $\sigma(t)$.

2. Рассмотрим стержневую систему, нагруженную квазистатически сосредоточенными силами $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$, как изображено на рис. 26.2, а. Случайные силы $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ образуют вектор входных воздействий $q(t)$. Пространство состояний будем характеризовать продольными усилиями $N_1(t) = [Q_1(t) + Q_2(t)]/\sqrt{2}$ и $N_2(t) = [Q_1(t) - Q_2(t)]/\sqrt{2}$. Пространство качества определим напряжениями $\sigma_1(t) = N_1(t)/F_1$ и $\sigma_2(t) = N_2(t)/F_2$ в сечениях стержней. Область безотказной работы в пространстве качества будет характеризоваться отсутствием пластических деформаций и отсутствием потери устойчивости сжатых стержней: $\Omega = \{v(t): -\sigma_{*j} < \sigma_j(t) < \sigma_T; j = 1, 2\}$; $\sigma_{*j} F_j = \pi^2 EJ_j/2l^2$ — эйлерово значение сжимающей силы.

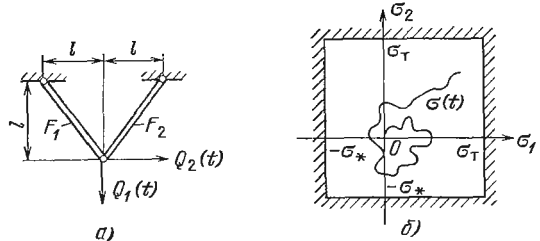


Рис. 26.2. Стержневая система (а) и ее пространство качества (б)

Пространство качества будет двумерным, а допустимая область представляет собой прямоугольник (рис. 26.2, б). При этом вероятность безотказной работы находится как

$$P(t) = P\{-\sigma_{*j} < \sigma_j(\tau) < \sigma_T; j = 1, 2; \tau \in [0, t]\}.$$

3. Рассмотрим стержневую систему ферменного типа (рис. 26.3), состоящую из n стержней и нагруженную случайными силами $Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_m(t)$. Пространство качества и вероятность безотказной работы определяются аналогично примеру 2. При этом пространство качества V будет n -мерным, а допустимая область в этом пространстве представляет собой n -мерный параллелепипед.

4. Рассмотрим простейшую постановку задачи о виброзащите приборов и оборудования. Амортизируемый объект массой M будем трактовать как систему с одной степенью свободы (рис. 26.4, а). С помощью вязкоупругого элемента с жесткостью c и коэффициентом демпфирования b объект присоединен к контейнеру, который совершает колебания с ускорением $a(t)$. Перемещение $u(t)$ массы относительно контейнера удовлетворяет уравнению

$$M\ddot{u} + b\dot{u} + cu = -Ma,$$

которое является реализацией операторного соотношения (26.1) для данного примера. Для надежного функционирования системы требуется, чтобы абсолютное виброускорение в объекте не превышало предельно допустимого значения a_* .

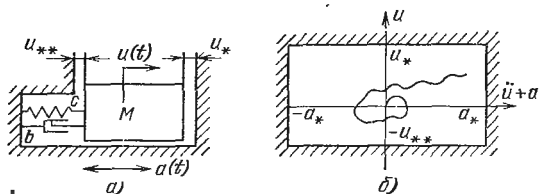
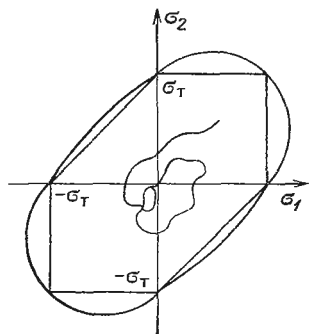


Рис. 26.4. Система с одной степенью свободы (а) и ее пространство качества (б)

Рис. 26.5. Вид допустимой области для плоской задачи



Кроме того, недопустимы соударения со стенками контейнера. Следовательно, вектор качества выберем следующим образом: $v(t) = \{u(t) + a(t), u(t)\}$. Допустимая область в пространстве качества вводится как $\Omega = \{v(t): |v_1(t)| < a_*, -u_{**} < v_2(t) < u_*\}$ (рис. 26.4, б), а вероятность безотказной работы как

$$P(t) = P\{|\ddot{u}(\tau) + a(\tau)| < a_*, -u_{**} < u(\tau) < u_*; \tau \in [0, t]\}.$$

5. Для плоской задачи теории упругости в качестве элементов пространства качества естественно выбрать главные напряжения $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$ в некоторой характерной точке. Требование отсутствия пластических деформаций приводит к определению допустимой области в виде, например, шестиугольника Треска — Сен-Венана или эллипса Мизеса (рис. 26.5). При использовании критерия Мизеса вероятность безотказной работы находится как вероятность невыброса двумерного процесса $v(t) = \{\sigma_1(t), \sigma_2(t)\}$ из эллиптической области:

$$P(t) = P\{\sqrt{\sigma_1^2(\tau) + \sigma_2^2(\tau)} - \sigma_1(\tau)\sigma_2(\tau) < \sigma_T; \tau \in [0, t]\}.$$

26.2. МОДЕЛИ ОТКАЗОВ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

26.2.1. Статические модели отказов. Отказ в теории надежности механических систем трактуется как нарушение условия нахождения параметра качества v в допустимой области Ω . В зависимости от свойств системы и характера воздействия на нее внешних нагрузок описание отказов может быть проведено различными способами.

Рассмотрим статическое нагружение механической системы, когда состояние системы определяется конечным числом параметров — случайных величин. Условие безотказной работы формулируется в виде требования, чтобы некоторый характерный параметр качества v не превышал предельного значения w . Обычно в механических системах параметр v характеризует напряжения, случайная величина w учитывает прочностные свойства системы, а условие безотказной работы эквивалентно условию прочности или условию сохранения несущей способности. При этом допустимая область

$$\Omega = \{v: v < w\}. \quad (26.3)$$

Вероятность безотказной работы определяется как вероятность выполнения неравенства в (26.3):

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^w p(v, w) dv \right] dw, \quad (26.4)$$

где $p(v, w)$ — совместная плотность вероятности случайных величин v и w .

Если ввести вспомогательную случайную величину $x = w - v$, плотность вероятности которой $p_x(x)$ находится через плотность вероятности $p(v, w)$ по известным формулам теории вероятностей, то вероятность безотказной работы

$$P = \int_0^{\infty} p_x(x) dx.$$

Пусть случайные величины v и w распределены нормально с математическими ожиданиями a_v и a_w , дисперсиями σ_v^2 и σ_w^2 и коэффициентом корреляции ρ . Тогда случайная величина x будет также распределена нормально с математическим ожиданием $a_x = a_w - a_v$ и дисперсией $\sigma_x^2 = \sigma_v^2 - 2\rho\sigma_v\sigma_w + \sigma_w^2$. В этом случае вычисление по предыдущей формуле дает

$$P = \Phi(a_x/\sigma_x),$$

где $\Phi(x)$ — интеграл Лапласа в форме

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-x^2/2} dx.$$

Для случая, когда случайные величины v и w независимы и распределены по закону Рэлея¹ с параметрами σ_v и σ_w , формула (26.4) дает

$$P = \sigma_w^2 / (\sigma_w^2 + \sigma_v^2).$$

26.2.2. Марковские модели. Пусть вектор качества $v(t)$ представляет собой n -мерный диффузионный марковский процесс, который характеризуется переходной плотностью вероятности $p(v, t | v_0, t_0)$, где $v_0 = v(t_0)$. Эта плотность вероятности как функция переменных v_0, t_0 удовлетворяет обратному уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial p}{\partial t_0} = - \sum_{j=1}^n \kappa_j \frac{\partial p}{\partial v_{j0}} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \kappa_{jk} \frac{\partial^2 p}{\partial v_{j0} \partial v_{k0}}. \quad (26.5)$$

Интенсивности κ_j и κ_{jk} марковского процесса находятся по формулам:

$$\begin{aligned} \kappa_j &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int (v_j - v_{j0}) p(v, t | v_0, t_0) dv; \\ \kappa_{jk} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int (v_j - v_{j0}) (v_k - v_{k0}) p(v, t | v_0, t_0) dv, \\ \Delta t &= t - t_0. \end{aligned}$$

Для систем, у которых интенсивности не зависят явно от времени, переходная плотность вероятности зависит лишь от разности $t - t_0$, следовательно, $\partial p / \partial t_0 = - \partial p / \partial t$ и уравнение (26.5) принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \kappa_j \frac{\partial p}{\partial v_{j0}} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \kappa_{jk} \frac{\partial^2 p}{\partial v_{j0} \partial v_{k0}}. \quad (26.6)$$

Условная вероятность безотказной работы $P(t | v_0, t_0)$ вводится как вероятность невыхода векторного случайного процесса $v(t)$ из допустимой области Ω в течение отрезка времени $[0, t]$ при условии, что в начальный момент времени t_0 система находится в допустимой области:

$$P(t | v_0, t_0) = \int_{v \in \Omega} p(v, t | v_0, t_0) dv.$$

Проинтегрировав уравнение (26.6) по переменной v в области $v \in \Omega$, получим для условной вероятности безотказной работы уравнение, по виду совпадающее с (26.6):

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \kappa_j \frac{\partial P}{\partial v_{j0}} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \kappa_{jk} \frac{\partial^2 P}{\partial v_{j0} \partial v_{k0}}, \quad (26.7)$$

которое решается при начальном и граничном условиях:

$$P(0 | v_0, t_0) = 1 \quad (v_0 \in \Omega); \quad P(t | v_0, t_0) = 0, \quad v_0 \in \Gamma. \quad (26.8)$$

¹ Другие примеры применения формул (26.4) можно найти в книге Капура К. и Ламберсона Л. Надежность и проектирование систем: Пер. с англ. / Под ред. И. А. Ушакова. — М.: Мнр, 1980, где рассматриваются наиболее распространенные законы распределения параметров v и w для механических систем: логарифмически-нормальное, экспоненциальное, гамма-распределение, распределение Вейбулла, распределения экстремальных значений. (Прим. ред.).

После решения уравнения (27.8) с условиями (26.8) вычисляется априорная вероятность безотказной работы

$$P(t) = \int_{v_0 \in \Omega} P(t | v_0, t_0) p(v_0) dv_0. \quad (26.9)$$

Время безотказной работы $T(v_0, t_0)$, равное времени достижения вектором $v(t)$ границы Γ допустимой области при условии, что в момент времени t_0 система находится в допустимой области, является случайной величиной с условной плотностью вероятности

$$p(T | v_0, t_0) = - \left. \frac{\partial P(t | v_0, t_0)}{\partial t} \right|_{t=T}.$$

Условное математическое ожидание случайной величины $T(v_0, t_0)$ определяется по формуле

$$M[T(v_0, t_0)] = - \int_0^{\infty} t \frac{\partial P(t | v_0, t_0)}{\partial t} dt,$$

которая после интегрирования по частям приводится к виду

$$M[T(v_0, t_0)] = \int_0^{\infty} P(t | v_0, t_0) dt.$$

Для получения уравнения относительно $M[T(v_0, t_0)]$ проинтегрируем почленно (26.7) по переменной t от нуля до бесконечности. Используя начальное условие $P(0 | v_0, t_0) = 1$, получаем уравнение Понтрягина

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \kappa_{jm} \frac{\partial^2 M[T(v_0, t_0)]}{\partial v_{j0} \partial v_{m0}} + \sum_{j=1}^n \kappa_j \frac{\partial M[T(v_0, t_0)]}{\partial v_{j0}} = -1, \quad (26.10)$$

которое решается при граничном условии

$$M[T(v_0, t_0)] = 0, \quad v_0 \in \Gamma. \quad (26.11)$$

Аналогично для условных моментных функций $M[T^k(v_0, t_0)]$ получим рекуррентную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \kappa_{jm} \frac{\partial^2 M[T^k(v_0, t_0)]}{\partial v_{j0} \partial v_{m0}} + \sum_{j=1}^n \kappa_j \frac{\partial M[T^k(v_0, t_0)]}{\partial v_{j0}} = \\ = -k M[T^{k-1}(v_0, t_0)], \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (26.12)$$

с граничными условиями

$$M[T^k(v_0, t_0)] = 0, \quad v_0 \in \Gamma.$$

Система уравнений (26.12) решается приближенно с использованием, например, вариационного метода Бубнова — Галеркина. Среднее время безотказной работы $M[T]$ и моментные функции $M[T^k]$ находятся по формуле

$$M[T^k] = \int_{v_0 \in \Omega} M[T^k(v_0, t_0)] p(v_0) dv_0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Изложенный подход к определению показателя долговечности $M[T]$ проиллюстрируем на примере колебательной системы, рассмотренной в примере 26.4. Уравнение колебаний виброзащитной системы запишем в виде

$$\ddot{u} + 2\epsilon \dot{u} + \omega_0^2 u = -a(t). \quad (26.13)$$

Предположим, что $a(t)$ — нормальный стационарный центрированный случайный процесс со спектральной плотностью

$$S_a(\omega) = \frac{2\sigma^2}{\pi} \frac{\alpha\theta^2}{(\theta^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2},$$

что соответствует прохождению случайного процесса $\xi(t)$ через линейный формирующий фильтр второго порядка

$$\ddot{a} + 2\alpha\dot{a} + \theta^2 a = \sqrt{s}\xi(t). \quad (26.14)$$

Здесь $\xi(t)$ — нормальный стационарный белый шум единичной интенсивности; $s = 4\sigma^2\alpha\theta^2$.

Стохастическое дифференциальное уравнение (26.13), дополненное уравнением фильтра (26.14), описывает четырехмерный марковский процесс $x = \{u, \dot{u}, a, \dot{a}\}$, интенсивности которого равны:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= x_2; \quad \kappa_2 = -2\epsilon x_2 - \omega_0^2 x_1 - x_3; \\ \kappa_3 &= x_4; \quad \kappa_4 = -2\alpha x_4 - \theta^2 x_3; \quad \kappa_{44} = s \end{aligned}$$

(остальные коэффициенты диффузии равны нулю).

Уравнение (26.10) после введения обозначения $T_0(x) \equiv M[T(x_1, x_2, x_3, x_4)]$ принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}s \frac{\partial^2 T_0}{\partial x_4^2} + x_2 \frac{\partial T_0}{\partial x_1} - (2\epsilon x_2 + x_3 + \omega_0^2 x_1) \frac{\partial T_0}{\partial x_2} + \\ + x_4 \frac{\partial T_0}{\partial x_3} - (2\alpha x_4 + \theta^2 x_3) \frac{\partial T_0}{\partial x_4} = -1. \end{aligned} \quad (26.15)$$

Допустимая область Ω в пространстве качества представляет собой прямоугольник (см. рис. 26.4, б). На плоскости параметров $x_1 = u, x_2 = \dot{u}$ эта область трансформируется в параллелограмм (рис. 26.6), а в расширенном четырехмерном фазовом пространстве допустимая область берется в виде цилиндра $\Omega \times R^2$.

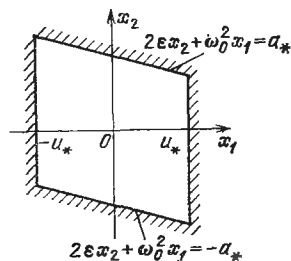


Рис. 26.6. Вид допустимой области на плоскости (x_1, x_2)

Решение уравнения (26.15) должно удовлетворять граничному условию типа (26.11) и условиям ограниченности при $x_3, x_4 \rightarrow \pm\infty$. Приближенное решение ищется в виде ряда

$$T_0(x) = \sum_{k=1}^m T_k \varphi_k(x),$$

где $\varphi_k(x)$ — полная внутри цилиндра $\Omega \times R^2$ система функций, удовлетворяющая всем условиям для функции $M[T(x)]$.

Математическое ожидание времени достижения границы находится по формуле

$$M[T] = \int_{\Omega} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_0(x) p(x) dx_3 dx_4 \right] dx_1 dx_2.$$

Совместная плотность вероятности $p(x)$ централизованного нормального марковского процесса $x(t)$ полностью определяется корреляционной матрицей $K_x = M[x(t)x^T(t)]$, элементы которой находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений, матричная запись которой имеет вид

$$RK_x + K_x R^T = SS^T,$$

где R и S — числовые матрицы размерности 4×4 и 4×1 , соответствующие записи уравнений (26.13) и (26.14) в виде

$$\dot{x}(t) + Rx(t) = S\xi(t),$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \omega_0^2 & 2\varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \theta^2 & 2\alpha \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{s} \end{bmatrix}.$$

26.2.3. Кумулятивные модели. Во многих случаях в механических системах происходит монотонное ухудшение параметров качества. Это имеет место, например, при эксплуатации системы в условиях циклического нагружения, при котором происходит постепенное накопление пластических деформаций или усталостных повреждений.

Случайный процесс $v(t)$ называется кумулятивным, если для любых моментов времени $t_2 > t_1$ выполняется условие

$$\|v(t_2)\| > \|v(t_1)\|,$$

где $\|v(t)\|$ — соответствующим образом выбранная норма вектора $v(t)$ в пространстве качества V . Для выпуклой области Ω в пространстве качества кумулятивный процесс $v(t)$ монотонно приближается к границе допустимой области, а вероятность безотказной работы на отрезке времени $[0, t]$ совпадает с вероятностью пребывания в этой области в момент времени t :

$$P(t) = P\{v(t) \in \Omega\}.$$

26.2.4. Модели пуассоновского типа. Число отказов в системе на отрезке времени $[0, t]$ образует поток событий. Если этот поток является пуассоновским, то вероятность наступления ровно k отказов

$$p_k(t) = \frac{1}{k!} \left[\int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right]^k \exp \left[- \int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right], \quad k=0,1,\dots \quad (26.16)$$

Вероятность безотказной работы $P(t)$ определяется при $k=0$:

$$P(t) = \exp \left[- \int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right]. \quad (26.17)$$

В формулах (26.16) и (26.17) $\lambda(t)$ имеет смысл интенсивности отказов.

В случае когда отказы трактуются как выбросы случайного процесса из допустимой области, вероятность безотказной работы оценивается через числовые характеристики выбросов. Такие модели отказов будем называть пуассоновскими.

26.3. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЫБРОСОВ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

26.3.1. Приближенные оценки для вероятности безотказной работы. Вероятность безотказной работы (26.2) для механической системы, в которой отказ трактуется как выброс вектора качества $v(t)$ из допустимой области Ω , определяется через вероятностные характеристики выбросов векторного случайного процесса из допустимой области.

Обозначим математическое ожидание числа выбросов векторного случайного процесса $v(t)$ из области Ω на отрезке времени $[0, t]$ через $N(t)$. Будем считать, что $P(0) = 1$, т. е. в начальный момент времени случайный процесс $v(t)$ с вероятностью, равной единице, находится в допустимой области. Через $P_k(t)$ обозначим вероятность ровно k пересечений процессом $v(t)$ предельной поверхности Γ области Ω в направлении внешней нормали к этой поверхности на отрезке времени $[0, t]$.

Вероятность безотказной работы

$$P(t) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t).$$

Математическое ожидание числа выбросов $N(t)$ определяется соотношением

$$N(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k P_k(t).$$

Аналогичным образом вводятся моментные функции от числа выбросов $N^2, N^3, \dots$ (средний квадрат, средний куб и т. д.).

Двухсторонние оценки для $P(t)$ имеют вид

$$1 - N(t) \leq P(t) \leq 1 - \frac{3}{2} N(t) + \frac{1}{2} N^2(t). \quad (26.18)$$

Более узкие оценки можно получить, если рассматривать моментные функции от числа выбросов более высокого порядка, например

$$1 - \frac{11}{6} N(t) + N^2(t) - \frac{1}{6} N^3(t) \leq P(t) \leq 1 - \frac{25}{12} N(t) + \frac{35}{24} N^2(t) - \frac{5}{12} N^3(t) + \frac{1}{24} N^4(t). \quad (26.19)$$

Для высоконадежных систем вероятность безотказной работы вычисляется по приближенной формуле

$$P(t) \approx 1 - N(t).$$

Аналогично можно получить уточненные приближенные формулы, следующие из оценок (26.18) и (26.19).

Если выбросы случайного процесса $v(t)$ из области Ω образуют пуассоновский поток, для вероятности безотказной работы имеет место оценка

$$P(t) \approx \exp[-N(t)]. \quad (26.20)$$

При этом оценки, основанные на рассмотрении моментных функций от числа выбросов, соответствуют разложению экспоненциальной оценки (26.20) в степенной ряд и удержанию соответствующего числа членов ряда.

26.3.2. Оценки, основанные на аппроксимации допустимой области. В случае когда допустимая область Ω имеет сложную конфигурацию, вычисление числовых характеристик выбросов и, следовательно, оценка показателей надежности представляют значительные трудности. Тогда эффективным может оказаться подход, основанный на аппроксимации допустимой области областью, для которой вычисление характеристик выбросов осуществляется значительно проще. При этом для вероятности безотказной работы получим оценку

$$P(t) \approx P_0(t), \quad (26.21)$$

где $P_0(t)$ — вероятность безотказной работы для области с предельной поверхностью Γ_0 , которая аппроксимирует область Ω (рис. 26.7).

Для получения двусторонних оценок может быть использован метод мажорантных оценок. Согласно этому методу выбираются две области Ω_1 и Ω_2 , пер-

вая из которых целиком содержит область Ω , а вторая — целиком находится внутри области Ω . На рис. 26.7 для двумерного пространства качества эти области выбраны в виде прямоугольников с границами Γ_1 и Γ_2 . Для вероятности безотказной работы имеем двустороннюю оценку

$$P_2(t) \leq P(t) \leq P_1(t), \quad (26.22)$$

где $P_1(t)$ и $P_2(t)$ — оценки для вероятности безотказной работы, полученные для областей Ω_1 и Ω_2 соответственно.

26.3.3. Выбросы одномерного процесса за заданный уровень. Вероятность безотказной работы $P(t)$ может быть оценена через характеристики выбросов случайного процесса $v(t)$ из допустимой области Ω , в частности через математическое ожидание числа выбросов $N(t)$ или через математическое ожидание числа выбросов в единицу времени

$$\lambda(t) = dN(t)/dt.$$

Рассмотрим вначале случай, когда $v(t)$ — одномерный случайный процесс, а граница Γ допустимой области Ω есть прямая $v = w$, причем допустимая область лежит ниже этой прямой (рис. 26.8).

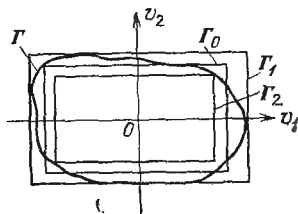


Рис. 26.7. Пример аппроксимации допустимой области

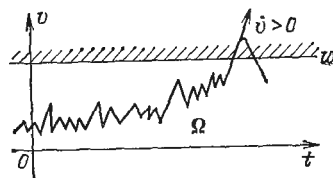


Рис. 26.8. Выброс одномерного случайного процесса

Пусть $v(t)$ — непрерывный дифференцируемый случайный процесс с заданной совместной плотностью вероятности $p(v, \dot{v}, t)$ процесса и его производной. Выбросу случайного процесса $v(t)$ из допустимой области Ω соответствует пересечение процессом $v(t)$ уровня w с положительной производной.

Рассматривая достаточно малый интервал времени $[t, t + \Delta t]$ и вычисляя вероятность выбросов процесса $v(t)$ на этом интервале, после перехода к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ получаем

$$\lambda(t) = \int_0^{\infty} \dot{v} p(w, \dot{v}, t) d\dot{v}. \quad (26.23)$$

Когда уровень $w(t)$ является неслучайной функцией времени, $\lambda(t)$ вычисляется аналогично, с той разницей, что процесс $v(t)$ может пересекать уровень $w(t)$ при выполнении условия $\dot{v}(t) > \dot{w}(t)$. В результате получим

$$\lambda(t) = \int_{\dot{w}(t)}^{\infty} (\dot{v} - \dot{w}) p(w, \dot{v}, t) d\dot{v}. \quad (26.24)$$

При вычислении интегралов (26.23) и (26.24) нужно знать совместную плотность вероятности $p(v, \dot{v}, t)$. Эту вероятность можно найти через двухточечную совместную плотность вероятности $p_v(v_1, v_2)$ случайного процесса $v(t)$, где $v_1 = v(t_1)$, $v_2 = v(t_2)$ — значения случайного процесса в моменты времени t_1 и t_2 . Плотность вероятности $p(v, \dot{v}, t)$ определяется после замены переменных $v = v_1$, $\dot{v} = (v_2 - v_1)/\Delta t$ и перехода к пределу при $\Delta t = t_2 - t_1 \rightarrow 0$:

$$p(v, \dot{v}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [p_v(v, v + \dot{v}\Delta t) \Delta t]. \quad (26.25)$$

26.3.4. Выбросы гауссовского процесса. Двухточечная совместная плотность вероятности гауссовского случайного процесса

$$p_v(v_1, v_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(v_1-a_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(v_2-a_2)^2}{\sigma_2^2} - 2r \frac{(v_1-a_1)(v_2-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} \right] \right\}, \quad (26.26)$$

где $a(t)$ — математическое ожидание процесса $v(t)$; $\sigma_v^2(t)$ — его дисперсия; $a_1 = a(t_1)$; $a_2 = a(t_2)$; $\sigma_1 = \sigma_v(t_1)$; $\sigma_2 = \sigma_v(t_2)$; $r(t_1, t_2)$ — коэффициент корреляции процесса $v(t)$ в моменты времени t_1 и t_2 .

Заменой переменных $v_1 = v$, $v_2 = v + \dot{v}\Delta t$ ($t_1 = t$, $t_2 = t + \Delta t$) по формуле (26.25) после перехода к пределу получим

$$p(v, \dot{v}, t) = \frac{1}{2\pi\sigma_v\sigma_{\dot{v}}\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(v-a)^2}{\sigma_v^2} - 2\rho \frac{(v-a)(\dot{v}-\dot{a})}{\sigma_v\sigma_{\dot{v}}} + \frac{(\dot{v}-\dot{a})^2}{\sigma_{\dot{v}}^2} \right] \right\}.$$

Здесь $\dot{a}(t)$ и $\sigma_{\dot{v}}^2(t)$ — математическое ожидание и дисперсия производной; $\rho(t)$ — коэффициент корреляции процесса и его производной в совпадающие моменты времени. Эти параметры определяются как:

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a_2 - a_1}{\Delta t}; \\ \sigma_{\dot{v}}^2(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sigma_v^2 + \sigma_1^2 - 2r\sigma_1\sigma_v}{(\Delta t)^2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1-r}{(\Delta t)^2} 2\sigma_v^2(t); \\ \rho(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_{\dot{v}}\Delta t} = \frac{\sigma}{\sigma_{\dot{v}}} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r-1}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (26.27)$$

Например, для стационарного гауссовского процесса $v(t)$, для которого $a(t) = a = \text{const}$, $\sigma_v = \text{const}$, а коэффициент корреляции $r(t_1, t_2) = e^{-\alpha\Delta t} \times (\cos \beta\Delta t + \alpha/\beta \sin \beta\Delta t)$, после перехода к пределу по формулам (26.27) получим: $\dot{a} = 0$; $\rho = 0$; $\sigma_{\dot{v}}^2 = \sigma_v^2(\alpha^2 + \beta^2)$.

Таким образом, для стационарного гауссовского процесса формула (26.23) принимает вид

$$\lambda = \frac{1}{2\pi\sigma_v\sigma_{\dot{v}}} \exp \left[-\frac{(w-a)^2}{2\sigma_v^2} \right] \int_0^\infty \dot{v} \exp \left(-\frac{\dot{v}^2}{2\sigma_{\dot{v}}^2} \right) d\dot{v}.$$

Вычислив интеграл, окончательно получим

$$\lambda = \frac{\omega_e}{2\pi} \exp \left[-\frac{(w-a)^2}{2\sigma_v^2} \right]; \quad (26.28)$$

Через $\omega_e = \sigma_{\dot{v}}/\sigma_v$ обозначена эффективная частота процесса.

В случае нестационарного гауссовского процесса для вычисления интеграла (26.23) введем новую переменную интегрирования

$$u = (1-\rho^2)^{-1/2} \left(\frac{\dot{v}-\dot{a}}{\sigma_{\dot{v}}} - \rho \frac{w-a}{\sigma_v} \right).$$

В результате приходим к интегралу

$$\lambda(t) = \frac{\sigma_{\dot{v}}(1-\rho^2)^{1/2}}{2\pi\sigma_v} \exp \left[-\frac{(w-a)^2}{2\sigma_v^2} \right] \int_{-u_0}^\infty (u+u_0) e^{-u^2/2} du,$$

$$u_0 = (1 - \rho^2)^{-1/2} \left(\frac{\dot{a}}{\sigma_v} + \rho \frac{w - a}{\sigma_v} \right). \quad (26.29)$$

Если интеграл Лапласа представить в форме

$$\Phi(u) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-u}^{\infty} e^{-x^2/2} dx,$$

то получим окончательную формулу для математического ожидания числа выбросов в единицу времени нестационарного гауссовского процесса:

$$\lambda(t) = \frac{\omega_e (1 - \rho^2)^{1/2}}{2\pi} [e^{-u_0^2/2} + \sqrt{2\pi} u_0 \Phi(u_0)] \exp \left[-\frac{(w - a)^2}{2\sigma_v^2} \right]. \quad (26.30)$$

Отметим, что числовые характеристики случайного процесса $v(t)$, входящие в эту формулу, являются функциями времени. В случае стационарного процесса формула (26.30) переходит в (26.28).

Для уровня $w(t)$, неслучайным образом изменяющегося во времени, математическое ожидание числа выбросов в единицу времени находится по формуле (26.24). Интеграл вычисляется аналогично тому, как это было сделано выше для нестационарного гауссовского процесса. Окончательное выражение для $\lambda(t)$ будет иметь вид (26.30), если вместо (26.29) ввести обозначение

$$u_0 = (1 - \rho^2)^{-1/2} \left(\frac{\dot{a} - \dot{w}}{\sigma_v} - \rho \frac{a - w}{\sigma_v} \right).$$

26.3.5. Выбросы стационарного рэлеевского процесса. Рэлеевский процесс $v(t)$ определяется как случайный процесс $v(t) = [x^2(t) + y^2(t)]^{1/2}$, где $x(t)$ и $y(t)$ — центрированные стохастически независимые гауссовские случайные процессы с одинаковыми дисперсиями σ^2 . Одноточечная плотность вероятности рэлеевского процесса

$$p_v(v, t) = \frac{v}{\sigma^2} \exp \left(-\frac{v^2}{2\sigma^2} \right).$$

Для получения двухточечного распределения Рэля введем четырехмерный случайный процесс $\{x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2), y_1 = y(t_1), y_2 = y(t_2)\}$, совместная плотность вероятности которого $p_{xy}(x_1, x_2, y_1, y_2) = p(x_1, x_2) p(y_1, y_2)$, а плотности вероятности $p(x_1, x_2)$ и $p(y_1, y_2)$ даются формулой (26.26). Вводя новые переменные $x_1 = v_1 \cos \theta_1, x_2 = v_2 \cos \theta_2, y_1 = v_1 \sin \theta_1, y_2 = v_2 \sin \theta_2$, получаем плотность вероятности

$$p_{v\theta}(v_1, v_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{v_1 v_2}{4\pi^2 (1 - r^2) \sigma_1^2 \sigma_2^2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - r^2)} \left[\frac{v_1^2}{\sigma_1^2} - 2r \frac{v_1 v_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{v_2^2}{\sigma_2^2} \right] \right\},$$

откуда с использованием свойства согласованности находим двухточечную плотность вероятности

$$p_v(v_1, v_2) = \frac{v_1 v_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - r^2)} \exp \left[-\frac{1}{2(1 - r^2)} \left(\frac{v_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{v_2^2}{\sigma_2^2} \right) \right] I_0 \left(\frac{r}{1 - r^2} \frac{v_1 v_2}{\sigma_1 \sigma_2} \right),$$

где $I_0(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента.

Вычисление по формуле (26.25) для стационарного рэлеевского процесса $v(t)$ после перехода к пределу дает

$$p(v, \dot{v}) = \frac{v}{\sqrt{2\pi} \sigma^2 \sigma_v} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{\sigma^2} + \frac{\dot{v}^2}{\sigma_v^2} \right) \right].$$

При этом дисперсия процесса $v(t)$ связана с дисперсией σ^2 процессов $x(t)$ и $y(t)$ соотношением $\sigma_v^2 = (4 - \pi) \sigma^2/2$, а дисперсия производной

$$\sigma_{\dot{v}}^2 = (4 - \pi) \sigma^2 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - r(t, t + \Delta t)}{(\Delta t)^2}.$$

Вычисление интеграла (26.23) не представляет затруднений. Окончательная формула имеет вид

$$\lambda = \frac{\sigma_{\dot{v}} w}{\sqrt{2\pi} \sigma^2} \exp\left(-\frac{w^2}{2\sigma^2}\right).$$

26.3.6. Выбросы многомерного процесса из заданной области. В случае многомерного пространства качества общая схема определения числовых характеристик выбросов векторного процесса $v(t)$ из допустимой области Ω аналогична случаю одномерного пространства качества. Например, математическое ожидание числа выбросов в единицу времени находится по формуле

$$\lambda(t) = \int_{\Gamma} d\Gamma \int_{\dot{v}_n > 0} p(v_{\Gamma}, \dot{v}, t) \dot{v}_n d\dot{v}, \quad (26.31)$$

где первый интеграл берется по поверхности Γ ; $v_{\Gamma}(t)$ — значение вектора $v(t)$ на Γ ; $\dot{v}_n$ — нормальная к Γ составляющая скорости $\dot{v}$.

1. Выбросы многомерного гауссовского процесса из прямоугольной области. Рассмотрим вначале двумерное пространство качества, допустимая область в котором представляет собой прямоугольник со сторонами $v_1^* - v_1^{**}$ и $v_2^* - v_2^{**}$ (рис. 26.9). Для стационарного двумерного гауссовского процесса $v(t)$ совместная плотность вероятности имеет вид $p(v, \dot{v}) = p_1(v_1, v_2) p_2(\dot{v}_1, \dot{v}_2)$, где плотность вероятности $p_1(v_1, v_2)$ определяется формулой (26.26) с параметрами $a_1, a_2, \sigma_{v_1}, \sigma_{v_2}, r_{v_1 v_2}$, а плотность вероятности $p_2(\dot{v}_1, \dot{v}_2)$ имеет аналогичный вид с параметрами $a_1 = a_2 = 0, \sigma_{\dot{v}_1}, \sigma_{\dot{v}_2}, r_{\dot{v}_1 \dot{v}_2}$. Формула (26.31) после вычисления интегралов принимает вид

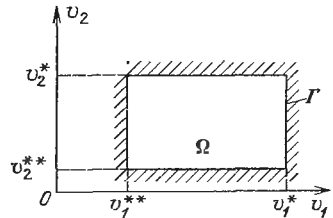


Рис. 26.9. Прямоугольная допустимая область

$$\lambda = \frac{1}{2\pi} [F(v_2^*, v_1^*) - F(v_2^{**}, v_1^*) + F(v_2^*, v_1^{**}) - F(v_2^{**}, v_1^{**}) + \\ + F(v_1^*, v_2^*) - F(v_1^*, v_2^{**}) + F(v_1^{**}, v_2^*) - F(v_1^{**}, v_2^{**})],$$

где обозначено

$$F(v_j, v_k) = \frac{\sigma_{\dot{v}_k}}{\sigma_{v_k}} \exp\left[-\frac{(v_k - a_k)^2}{2\sigma_{v_k}^2}\right] \Phi\left[\left(1 - r_{v_1 v_2}^2\right)^{-1/2} \left(\frac{v_j - a_j}{\sigma_{v_j}} - r_{v_1 v_2} \frac{v_k - a_k}{\sigma_{v_k}}\right)\right].$$

Пусть область Ω представляет собой N -мерный параллелепипед со сторонами $v_k^* - v_k^{**}$ ($k = 1, 2, \dots, N$), а $v(t)$ — N -мерный стационарный гауссовский процесс со стохастически независимыми компонентами $v_k(t)$. В этом случае совместная плотность вероятности

$$p(v, \dot{v}) = \prod_{k=1}^N p_1(v_k) p_2(\dot{v}_k)$$

применение формулы (26.31) дает

$$\lambda = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \frac{\sigma_{v_k}}{\sigma_{v_k}} \left\{ \exp \left[-\frac{(v_k^* - a_k)^2}{2\sigma_{v_k}^2} \right] + \exp \left[-\frac{(v_k^{**} - a_k)^2}{2\sigma_{v_k}^2} \right] \right\} \times \\ \times \prod_{j \neq k}^N \left[\Phi \left(\frac{v_j^* - a_j}{\sigma_{v_j}} \right) - \Phi \left(\frac{v_j^{**} - a_j}{\sigma_{v_j}} \right) \right]. \quad (26.32)$$

Если выбросы являются редкими событиями, то приближенно можно считать, что

$$\Phi \left(\frac{v_j^* - a_j}{\sigma_{v_j}} \right) - \Phi \left(\frac{v_j^{**} - a_j}{\sigma_{v_j}} \right) \approx 1.$$

Последнее соотношение имеет место при выполнении условий:

$$(v_j^* - a_j)/\sigma_{v_j} \gg 1; \quad (a_j - v_j^{**})/\sigma_{v_j} \gg 1, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

В этом случае формула (26.32) принимает более простой вид

$$\lambda = \sum_{k=1}^N \frac{\sigma_{v_k}}{2\pi\sigma_{v_k}} \left\{ \exp \left[-\frac{(v_k^* - a_k)^2}{2\sigma_{v_k}^2} \right] + \exp \left[-\frac{(v_k^{**} - a_k)^2}{2\sigma_{v_k}^2} \right] \right\}. \quad (26.33)$$

Эта формула носит название формулы полосового приближения. Она может быть получена путем суммирования выбросов из полос $v_k^{**} \leq v_k(t) \leq v_k^*$ ($k = 1, 2, \dots, N$), для каждой из которых применима формула (26.28), обобщенная на случай выбросов из полосы:

$$\lambda_k = \frac{\sigma_{v_k}}{2\pi\sigma_{v_k}} \left\{ \exp \left[-\frac{(v_k^* - a_k)^2}{2\sigma_{v_k}^2} \right] + \exp \left[-\frac{(v_k^{**} - a_k)^2}{2\sigma_{v_k}^2} \right] \right\}.$$

2. Выбросы стационарного гауссовского процесса из сферической области. Пусть $v(t)$ — N -мерный стационарный гауссовский случайный процесс с независимыми центрированными компонентами и одинаковыми дисперсиями. Дисперсии компонент обозначим σ^2 , а дисперсии производных s^2 . Если область Ω является N -мерным шаром радиуса R , то в формуле (26.31) целесообразно перейти от переменных $v_1, v_2, \dots, v_N$ к переменным $v_n, v_{\tau_1}, v_{\tau_2}, \dots, v_{\tau_{N-1}}$, где v_n — нормальная к сферической поверхности составляющая скорости векторного процесса $v(t)$, а v_{τ_k} — тангенциальные составляющие скорости. В результате получим

$$\lambda = (2\pi\sigma s)^{-N} \int_{\Gamma} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^N v_{k\Gamma}^2 \right] d\Gamma \prod_{m=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{\dot{v}_m^2}{2s^2} \right) dv_{\tau_m} \times \\ \times \int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{\dot{v}_n^2}{2s^2} \right) \dot{v}_n dv_n.$$

Учитывая, что $\sum_{k=1}^N v_{k\Gamma}^2 = R^2$, после вычисления интегралов приходим к формуле

$$\lambda = \frac{sR^{N-1}}{\frac{N-1}{2} \sqrt{\pi} \Gamma \left(\frac{N}{2} \right) \sigma^N} \exp \left(-\frac{R^2}{2\sigma^2} \right). \quad (26.34)$$

Следует отметить, что задачу о выбросах многомерного процесса из сферической области можно свести к задаче о выбросах одномерного процесса за фиксированный уровень, если вместо N -мерного случайного процесса $\mathbf{v}(t) = \{v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t)\}$ рассматривать случайный процесс $\varphi(t) = [\sum_{k=1}^N v_k^2(t)]^{1/2}$. Пересечению векторным процессом $\mathbf{v}(t)$ сферической поверхности радиуса R будет соответствовать пересечение одномерным процессом $\varphi(t)$ фиксированного уровня $w = R$. В этом случае математическое ожидание числа выбросов в единицу времени определяется по формуле (26.23).

Если $\mathbf{v}(t)$ — N -мерный стационарный гауссовский процесс с независимыми одинаково распределенными центрированными компонентами, то случайный процесс $\varphi(t)$ будет также стационарным и иметь распределение χ -Пирсона. Совместная плотность вероятности этого процесса и его производной

$$p(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{\varphi^{N-1} \eta(\varphi)}{2^{\frac{N-1}{2}} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \sigma^N s} \exp\left(-\frac{\varphi^2}{2\sigma^2} - \frac{\dot{\varphi}^2}{2s^2}\right), \quad (26.35)$$

где $\eta(\varphi)$ — единичная функция Хевисайда. Вычисление интеграла (26.23) после подстановки в него выражения (26.35) приводит к формуле (26.34).

Для приближенного вычисления характеристик выбросов из областей сложной конфигурации можно также использовать оценки, основанные на аппроксимации допустимой области. Для иллюстрации подхода, изложенного в п. 26.3.2, будем аппроксимировать сферическую область прямоугольными. Оценки (26.21) и (26.22) для стационарного процесса $\mathbf{v}(t)$ эквивалентны оценкам $\lambda \approx \lambda_0$, $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$, где λ_0 , λ_1 и λ_2 — соответственно характеристики выбросов из областей Ω_0 , Ω_1 и Ω_2 , которые вычисляются по формулам (26.32) или (26.33). В двумерном случае области Ω_0 , Ω_1 и Ω_2 есть квадраты со сторонами $w_0 = \sqrt{\pi}R$, $w_1 = 2R$ и $w_2 = R\sqrt{2}$, причем область Ω_0 взята равновеликой области Ω . Вычисления по формулам (26.34) и (26.33) для $R/\sigma = 3$ дают: $\lambda = 0,0133$ с/с; $\lambda_0 = 0,0186$ с/с; $\lambda_1 = 0,00707$ с/с; $\lambda_2 = 0,0671$ с/с.

3. Выбросы из эллиптических областей. Пусть поверхность Γ ограничивает N -мерный эллипсоид с полуосями $b_1, b_2, \dots, b_N$, причем оси симметрии эллипсоида совпадают с координатными осями в пространстве качества. Стационарный гауссовский процесс $\mathbf{v}(t)$ зададим вектором математических ожиданий $\mathbf{a}$ и корреляционными матрицами $K_0 = M[\mathbf{v}\mathbf{v}^T]$ и $K = M[(\mathbf{v} - \mathbf{a})(\mathbf{v} - \mathbf{a})^T]$. Для этого процесса $p(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) = p_1(\mathbf{v}) p_2(\dot{\mathbf{v}})$, где

$$p_1(\mathbf{v}) = [(2\pi)^N \det K]^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{v} - \mathbf{a})^T K^{-1}(\mathbf{v} - \mathbf{a})\right];$$

$$p_2(\dot{\mathbf{v}}) = [(2\pi)^N \det K_0]^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\dot{\mathbf{v}}^T K_0^{-1}\dot{\mathbf{v}}\right).$$

Формулу (26.31) можно переписать в виде

$$\lambda = \int_{\Gamma} p_1(\mathbf{v}_{\Gamma}) \left[\int_{\dot{\mathbf{v}}_n > 0} p_2(\dot{\mathbf{v}}) \dot{\mathbf{v}}_n d\dot{\mathbf{v}} \right] d\Gamma. \quad (26.36)$$

Нормальная составляющая скорости $\dot{\mathbf{v}}_n(t)$ на поверхности Γ эллипсоида

$$\dot{\mathbf{v}}_n(t) = \sum_{k=1}^N a_{nk} \dot{v}_k(t), \quad (26.37)$$

где a_{nk} — направляющие косинусы вектора единичной нормали к поверхности Γ .

Размерность $(2N-1)$ -кратного интеграла (26.36) можно понизить, если наряду с нормальной составляющей скорости $u_1 = \dot{v}_n$ ввести взаимно-ортонормальные касательные составляющие скорости на поверхности Γ : $u_{j+1} = \dot{v}_{\tau j} = \sum_{k=1}^N a_{\tau j k} \dot{v}_k$ ($j = 1, 2, \dots, N-1$). Переход к этим составляющим осуществляется с помощью ортогональной матрицы A , составленной из направляющих косинусов $a_{n k}$ и $a_{\tau j k}$ единичной нормали и касательных к поверхности:

$$u(t) = A \dot{v}(t). \quad (26.38)$$

После замены переменных (26.38) внутренний N -кратный интеграл в (26.36) примет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} du_2 \int_{-\infty}^{\infty} du_3 \dots \int_{-\infty}^{\infty} du_N \int_0^{\infty} p_u(u_1, u_2, \dots, u_N) u_1 du_1.$$

Этот интеграл с учетом свойства согласованности для совместной плотности вероятности $p_u(u_1, u_2, \dots, u_N)$ равен $[D(u_1)/2\pi]^{1/2}$, где $D(u_1)$ — дисперсия нормально распределенной централизованной случайной величины u_1 , которая на основании формулы (26.37) вычисляется через направляющие косинусы $a_{n k}$ вектора единичной нормали и элементы корреляционной матрицы K_0 :

$$D(u_1) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{n j} a_{n k} K_{0 j k}.$$

В результате интеграл (26.36) удастся свести к интегралу по поверхности Γ :

$$\lambda = (2\pi)^{-1/2} \int_{\Gamma} p_1(v_{\Gamma}) \left(\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{n j} a_{n k} K_{0 j k} \right)^{1/2} d\Gamma. \quad (26.39)$$

Например, в случае двумерного пространства качества формула (26.39) для выбросов из эллипса принимает вид

$$\lambda = \frac{s_1 s_2}{(2\pi)^{3/2} (1-\rho^2)^{1/2} \sigma_1 \sigma_2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{b_1^2 \sin^2 \varphi}{s_1^2} + r \frac{b_1 b_2 \sin 2\varphi}{s_1 s_2} + \frac{b_2^2 \cos^2 \varphi}{s_2^2} \right)^{1/2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(b_1 \cos \varphi - a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(b_1 \cos \varphi - a_1)(b_2 \sin \varphi - a_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(b_2 \sin \varphi - a_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\} d\varphi.$$

Здесь σ_1^2 и σ_2^2 — дисперсии компонент v_1 и v_2 двумерного гауссовского процесса $v(t)$; s_1^2 и s_2^2 — дисперсии скоростей $\dot{v}_1$ и $\dot{v}_2$; ρ и r — коэффициенты корреляции между компонентами v_1 и v_2 , $\dot{v}_1$ и $\dot{v}_2$ соответственно.

В случае $b_1 = b_2 = R$, $a_1 = a_2 = 0$ получим формулу для математического ожидания числа выбросов в единицу времени централизованного гауссовского процесса из круговой области:

$$\lambda = \frac{s_1 s_2 R}{(2\pi)^{3/2} (1-\rho^2)^{1/2} \sigma_1 \sigma_2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin^2 \varphi}{s_1^2} + r \frac{\sin 2\varphi}{s_1 s_2} + \frac{\cos^2 \varphi}{s_2^2} \right)^{1/2} \times \\ \times \exp \left[-\frac{R^2}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} - \rho \frac{\sin 2\varphi}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2} \right) \right] d\varphi.$$

В частном случае, когда $\rho = r = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, $s_1 = s_2 = s$, последняя формула совпадает с (26.34) при $N = 2$.

26.3.7. Выбросы из области с случайной границей. Граница Γ допустимой области Ω может быть стохастической. Это имеет место, например, при рассмотрении множества систем, при изменении свойств системы под действием случайных факторов в процессе эксплуатации и т. д.

Рассмотрим одномерное пространство качества, а допустимую область в этом пространстве зададим неравенством $v(t) < w(t)$, причем ограничение $w(t)$ представляет собой случайный процесс с заданными вероятностными характеристиками. Математическое ожидание числа выбросов в единицу времени находится по формуле

$$\lambda(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dw \int_{-\infty}^{\infty} d\dot{w} \int_{\dot{w}}^{\infty} (\dot{v} - \dot{w}) p_{vw}(w, \dot{v}, w, \dot{w}, t) d\dot{v}. \quad (26.40)$$

При вычислении интегралов типа (26.40) целесообразно перейти к новой переменной $\dot{u} = \dot{v} - \dot{w}$; тогда (26.40) примет вид

$$\lambda(t) = \int_0^{\infty} d\dot{u} \int_{-\infty}^{\infty} d\dot{w} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u} p_{vw}(w, \dot{u} + \dot{w}, w, \dot{w}, t) d\dot{w}. \quad (26.41)$$

Если вероятностные свойства системы таковы, что случайный процесс $w(t)$ является стохастически независимым от случайного процесса $v(t)$, то задачу об определении $\lambda(t)$ можно разбить на два этапа. На первом этапе, зафиксировав значения w и $\dot{w}$, вычисляется условное математическое ожидание числа выбросов в единицу времени $\lambda(t|w, \dot{w})$, которое находится методами, изложенными выше для неслучайного уровня $w(t)$. Например, в одномерном случае при одностороннем ограничении имеем формулу типа (26.24)

$$\lambda(t|w, \dot{w}) = \int_{\dot{w}}^{\infty} (\dot{v} - \dot{w}) p_v(w, \dot{v}) d\dot{v}.$$

На втором этапе для определения безусловной характеристики выбросов применяется формула полной вероятности

$$\lambda(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(t|w, \dot{w}) p_w(w, \dot{w}, t) dw d\dot{w}. \quad (26.42)$$

Формулы (26.40) и (26.42) для стохастически независимых процессов $v(t)$ и $w(t)$ совпадают, однако с практической точки зрения предпочтительнее применение (26.40) или (26.41). Действительно, характеристика выбросов $\lambda(t|w, \dot{w})$ выражается, как правило, через специальные функции (см., например, (26.30)), в результате чего применение формулы (26.42) приводит к интегралам, не выражающимся ни через элементарные, ни через специальные функции. Формула (26.41) позволяет во многих случаях получить окончательные аналитические выражения для $\lambda(t)$.

1. Выбросы нестационарного гауссовского процесса за нестационарный гауссовский уровень. Будем считать, что процессы $v(t)$ и $w(t)$ стохастически независимы. Непосредственное применение формулы (26.41) дает после довольно громоздких вычислений

$$\lambda(t) = \frac{s(1-\rho^2)^{1/2}}{2\pi\sigma} [e^{-u_1^2/2} + \sqrt{2\pi} u_1 \Phi(u_1)] \exp \left[-\frac{(a_v - a_w)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (26.43)$$

где $\Phi(u)$ — функция Лапласа. Кроме того, введены обозначения:

$$\sigma^2 = \sigma_v^2 + \sigma_w^2; \quad s^2 = \sigma_v^2 + \sigma_w^2; \quad \rho = (\rho_v \sigma_v \sigma_v + \rho_w \sigma_w \sigma_w) / s\sigma; \quad (26.44)$$

$$u_1 = (1 - \rho^2)^{-1/2} \left(\frac{a_v - a_w}{s} - \rho \frac{a_v - a_w}{\sigma} \right).$$

Параметры $\sigma^2(t)$, $s^2(t)$ и $\rho(t)$ представляют собой соответственно дисперсию разности процессов $u(t) = v(t) - w(t)$, дисперсию разности производных $\dot{u}(t) = \dot{v}(t) - \dot{w}(t)$ и коэффициент корреляции процесса $u(t)$ и его производной $\dot{u}(t)$ в совпадающие моменты времени.

Формула (26.43) по внешнему виду совпадает с (26.30). Отсюда вытекает другой способ вычисления характеристик выбросов случайного процесса за случайный уровень: достаточно рассмотреть выбросы вспомогательного процесса $u(t) = v(t) - w(t)$ за неслучайный нулевой уровень. Так как распределение разности двух гауссовских процессов будет также гауссовским, то применение формулы (26.23) при $w = 0$, естественно, приводит к формуле (26.30), которая после замены параметров σ_v , σ_v , a , $\dot{a}$ и ρ на соответствующие параметры (26.44) для вспомогательного процесса $u(t)$ переходит в формулу (26.43). Этот результат является следствием устойчивости нормального распределения по отношению к линейным преобразованиям. Однако этот способ не приводит к существенным облегчениям для процессов $v(t)$ и $w(t)$, распределения которых отличаются от нормальных. Применение формулы (26.23) в этом случае ограничено сложностью нахождения совместной плотности вероятности $p(u, \dot{u}, t)$.

2. Выбросы стационарного гауссовского процесса за уровень, распределенный по закону Рэлея. Предполагается, что уровень w не меняется во времени. В этом случае получим

$$\lambda = \frac{\sigma_v \sigma_v}{2\pi\sigma^2} [e^{-u_2^2/2} + \sqrt{2\pi} u_2 \Phi(u_2)] \exp\left(-\frac{a_v^2}{2\sigma^2}\right),$$

где использованы обозначения $\sigma^2 = \sigma_v^2 + \sigma_1^2$, $u_2 = a_v \sigma_1 / \sigma_v \sigma$; параметр σ_1 характеризует распределение Рэлея и связан с дисперсией σ_w^2 соотношением $\sigma_w^2 = \sigma_1^2 (2 - \pi/2) = 0,43 \sigma_1^2$.

3. Выбросы стационарного рэлеевского процесса за гауссовский уровень. Если уровень w не меняется во времени, то формула (26.41) принимает вид

$$\lambda(t) = \int_0^\infty d\dot{v} \int_{-\infty}^\infty \dot{v} p_v(w, \dot{v}) p_w(w) dw.$$

Для распределения Рэлея $p_v(v, \dot{v})$ с параметрами σ_1 , σ_v и нормального распределения для w с параметрами a_w и σ_w получим

$$\lambda = \frac{\sigma_w \sigma_v}{2\pi\sigma^2} [e^{-u_3^2/2} + \sqrt{2\pi} u_3 \Phi(u_3)] \exp\left(-\frac{a_w^2}{2\sigma^2}\right).$$

Здесь обозначено: $u_3 = a_w \sigma_1 / \sigma_w \sigma$; $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_w^2$.

4. Выбросы многомерного гауссовского процесса из сферической области со случайным радиусом. Как отмечалось выше, задачу о выбросах многомерного процесса из сферической области можно свести к задаче о выбросах одномерного процесса. Рассмотрим N -мерный стационарный гауссовский процесс с независимыми одинаково распределенными центрированными компонентами. В этом случае модуль радиуса-вектора распределен по закону χ -Пирсона с совместной плот-

ностью вероятности (26.35). Пусть радиус сферы, ограничивающей допустимую область распределен по закону Рэлея с параметром σ_1 . В этом случае будем иметь

$$\lambda = \frac{\sigma_v \sigma_v \sigma_1^{N-1} \Gamma[(N+1)/2]}{\sqrt{\pi} (\sigma_v^2 + \sigma_1^2)^{(N+1)/2} \Gamma(N/2)},$$

где σ_v и σ_v — параметры распределения (26.35).

5. Выбросы стационарного гауссовского процесса за уровень, распределенный по закону Вейбулла—Гнеденко. Пусть уровень w является случайной величиной, имеющей распределение Вейбулла—Гнеденко.

$$p_w(w) = \alpha c w^{\alpha-1} \eta(w) \exp(-c w^\alpha)$$

с параметрами α и c . При этом λ определяется через интеграл, который в общем случае не выражается через табличные:

$$\lambda = \frac{\alpha c \sigma_v \sigma_v^{\alpha-1}}{2\pi} \int_0^\infty u^{\alpha-1} \exp \left[-\frac{(u - a_v/\sigma_v)^2}{2} - c \sigma_v^{\alpha-1} u^\alpha \right] du.$$

Глава 27

МЕТОДЫ РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ

27.1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

27.1.1. Предварительные замечания. В теории надежности наиболее трудные аналитические задачи возникают при анализе надежности восстанавливаемых систем. Модели восстанавливаемых систем являются по существу моделями теории массового обслуживания, в которых роль входящего потока требований играет поток отказов элементов, возникающих в системе, а обслуживание состоит в восстановлении этих элементов. Поэтому при анализе восстанавливаемых систем мы можем использовать разработанные к настоящему времени методы теории массового обслуживания. Однако модели восстанавливаемых систем имеют специфические особенности. Для большинства восстанавливаемых систем среднее время восстановления элементов во много раз меньше среднего времени между соседними отказами элементов в системе. Это обстоятельство позволяет использовать для оценки надежности системы асимптотические методы.

27.1.2. Основные характеристики надежности восстанавливаемых систем. Пусть поведение восстанавливаемой системы задается некоторым случайным процессом $\psi(t)$ в фазовом пространстве E . Предположим, что все множество состояний процесса E можно разбить, используя некоторый критерий отказа, на два непересекающихся подмножества: E_+ — подмножество состояний работоспособности, E_- — подмножество состояний отказа системы.

Обозначим через ξ_k и η_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, последовательные случайные интервалы работоспособного и соответственно неисправного состояния системы (мы предполагаем, что в начальный момент система исправна).

Обозначим через ξ_t время от момента t до первого попадания процесса в множество E_- . Если процесс $\psi(t)$ — эргодический, то

$$\xi_k \xrightarrow{P} \xi; \quad \eta_k \xrightarrow{P} \eta; \quad \xi_t \xrightarrow{P} \xi^*.$$

На практике чаще всего используются следующие величины: случайная наработка до первого отказа ξ_0 , время пребывания системы в стационарном режиме в состояниях работоспособности и отказа ξ и η и случайное время от данного мо-

мента до первого появления в состоянии отказа ξ^* , а также их математические ожидания $T = M\xi_0$, $T = M\xi$, $\tau = M\eta$, $T^* = M\xi^*$ и коэффициент готовности $K = T(T + \tau)^{-1}$.

27.1.3. Описание двух моделей восстанавливаемых систем. 1. Общая модель резервирования с восстановлением. Пусть в ремонтный орган, состоящий из r обслуживающих приборов и бесконечного числа мест для ожидания, поступает поток отказавших элементов, определенный следующим условием: если в ремонтном органе в момент t находится k элементов на восстановлении, то вероятность поступления требования на участке $(t, t + \Delta t)$ равна $\lambda_k \Delta t + o(\Delta t)$ и не зависит от поведения процесса до момента t .

Предположим, что время восстановления любого элемента любым обслуживающим прибором распределено произвольно с функцией распределения $G(t)$. Отказавшие элементы восстанавливаются в порядке поступления, и времена их восстановления независимы. Пусть $E_+ = \{0, 1, \dots, n\}$, $E_- = \{n+1, n+2, \dots\}$, т. е. отказ системы — это переход процесса обслуживания из состояния n в состояние $n+1$. Эту модель мы обозначим (λ_k, G, r, n) . Она включает в себя все стандартные модели резервирования с восстановлением при экспоненциальном распределении наработки каждого элемента системы, занимающего определенную (основную или резервную) позицию.

Например, для восстанавливаемой резервированной системы, состоящей из m основных и n резервных элементов, из которых n_1 находятся в нагруженном режиме, n_2 — в облегченном и n_3 — в ненагруженном, можно записать:

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda k & \text{при } 0 \leq k \leq m + n_1, \\ \lambda(m + n_1) + \lambda'(k - m - n_1) & \text{при } m + n_1 + 1 \leq k \leq m + n_1 + n_2, \\ \lambda(m + n_1) + \lambda' n_2 & \text{при } m + n - n_3 + 1 \leq k \leq m + n, \\ 0 & \text{при } k \geq m + n + 1, \end{cases}$$

где λ' — интенсивность отказа элемента в облегченном режиме.

В приведенном выше случае предполагается, что при отказе одного из основных элементов на его место подключается элемент из резерва с максимальным индексом. Это можно трактовать так: на место отказавшего основного подключается нагруженный резервный элемент, если такой имеется в наличии, на его место подключается элемент из облегченного резерва, если такой имеется, и т. д. Восстановленный элемент возвращается в систему в обратном порядке, т. е. в первую очередь укомплектовывается резерв с минимальным индексом, если в системе имеется m исправных основных элементов.

2. Модель сложной восстанавливаемой системы. Рассмотрим систему, состоящую из n элементов. После отказа каждый элемент мгновенно поступает в ремонтный орган, состоящий из нескольких обслуживающих приборов. По окончании восстановления элемент мгновенно возвращается на свое место в системе. Состояние системы в момент t задается двоичным вектором $e(t) = (e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t))$, где

$$e_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } i\text{-й элемент работоспособен в момент } t, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть в момент t процесс $e(t)$ находится в состоянии e . Тогда вероятность отказа i -го элемента на интервале $(t, t + \Delta t)$ равна $\lambda_i(e) \Delta t + o(\Delta t)$ и не зависит от прошлого поведения процесса $e(t)$. Обозначим

$$\lambda(e) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(e).$$

(Если для системы e элемент i находится в состоянии отказа, то полагаем $\lambda_i(e) = 0$).

Предположим, что i -й отказавший элемент поступающий на j -ю ремонтную единицу, имеет функцию распределения времени восстановления $G_{ij}(t)$. Дисциплина обслуживания может быть произвольной, но выполняются следующие ограничения:

- а) восстановление элемента не прерывается при поступлении других отказов;
- б) если отказавший элемент поступает в ремонтный орган, в котором есть свободные обслуживающие приборы, он мгновенно начинает восстанавливаться.

Определенную таким образом модель сложной восстанавливаемой системы обозначим $(\lambda_i(e), G_{ij}, E_+)$.

27.2. МАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ ВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ СИСТЕМ

27.2.1. Марковский процесс общего вида. Предположим, что эргодический процесс $\psi(t)$, описывающий поведение сложной восстанавливаемой системы, является марковским однородным процессом с конечным (или счетным) числом состояний, которые обозначим $E = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Пусть $\Lambda = \|\lambda_{ij}\|$ — матрица интенсивностей переходов. Для вычисления основных показателей надежности достаточно уметь находить следующие характеристики:

- а) стационарные вероятности

$$p_i = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\psi(t) = i\}, \quad i = 0, 1, \dots;$$

- б) время перехода из состояния i в множество A

$$\theta_i(A) = \inf\{t : \psi(t) \in A \mid \psi(0) = i \notin A\};$$

- в) вероятность того, что в момент перехода в множество A в стационарном режиме мы попадаем в состояние i ,

$$\pi_i(A) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\psi(t+0) = i \in A \mid \psi(t-0) \notin A\}.$$

Эти величины находятся стандартными приемами, и мы просто выпишем для них соответствующие уравнения или выражения.

Стационарные вероятности определяются из системы уравнений:

$$p_j = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \lambda_{ij}; \quad \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1.$$

Преобразования Лапласа времен перехода $\theta_i(A)$ для $i \in \bar{A}$ находятся из системы уравнений

$$z\varphi_i(z, A) = \lambda_i(A) + \sum_{j \in A} \lambda_{ij} \varphi_j(z, A), \quad (27.1)$$

где $\varphi_i(z, A) = \text{Me}^{-z\theta_i(\bar{A})}$; $\lambda_i(A) = \sum_{j \in A} \lambda_{ij}$; $\bar{A}$ — дополнительное к A множество.

Вероятности $\pi_i(A)$ легко находятся в явном виде:

$$\pi_i(A) = \sum_{j \in \bar{A}} p_j \lambda_{ji} \Big/ \sum_{i \in A} \sum_{j \in \bar{A}} p_j \lambda_{ji}.$$

Через эти величины выражаются основные характеристики надежности ξ_0 , ξ , η , ξ^* и их средние:

$$\begin{aligned} \text{Me}^{-z\xi_0} &= \text{Me}^{-z\theta_i(E-)}; \\ \text{Me}^{-z\xi} &= \sum_{i \in E_+} \pi_i(E_+) \text{Me}^{-z\theta_i(E-)}; \\ \text{Me}^{-z\eta} &= \sum_{i \in E_-} \pi_i(E_-) \text{Me}^{-z\theta_i(E+)}; \\ \text{Me}^{-z\xi^*} &= \sum_{i \in E_+} p_i \text{Me}^{-z\theta_i(E-)} \end{aligned}$$

Заметим, что, если число состояний процесса конечно, все выведенные выше преобразования Лапласа будут рациональными дробями и поэтому легко обращаются. Средние значения находятся из преобразования Лапласа дифференцированием в нуле.

Пусть $T_i(A) = M \theta_i(A)$; тогда из (27.1) для $i \in A$ получаем

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + \sum_{j \in A} \lambda_{ij} T_j(A); \\ T_0 &= T_i(E_-); \quad T^* = \sum_{i \in E_+} p_i T_i(E_-). \end{aligned}$$

27.2.2. Процесс гибели и размножения. Процессом гибели и размножения называется марковский процесс с конечным или счетным числом состояний $0, 1, 2, \dots$, для которого $\lambda_{i,i+1} = \lambda_i$, $\lambda_{i,i-1} = \mu_i$, $\mu_0 = 0$, $\lambda_{ij} = 0$ при $|j - i| > 1$, т. е. мгновенные скачки процесса могут быть только в соседние состояния.

Процесс гибели и размножения будет эргодическим тогда, и только тогда, когда:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} &< \infty; \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}} &= \infty. \end{aligned}$$

В этом случае стационарные вероятности находятся в явном виде:

$$p_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} p_0.$$

Пусть θ_{ij} — время перехода из состояния i в j :

$$\theta_{ij} = \inf \{t : \psi(t) = j | \psi(0) = i\}.$$

Из марковости процесса следует, что $\theta_{ij} = \theta_{i, i+1} + \dots + \theta_{j-1, j}$, при $j > i$, $\theta_{ij} = \theta_{i, i-1} + \dots + \theta_{j+1, j}$ при $j < i$, причем слагаемые в правых частях независимы.

Распределение величины θ_{0k} легко находится из системы (27.1) при $A = \{k, k+1, \dots\}$:

$$\text{Me}^{-z\theta_{0k}} = 1/\Delta_k(z),$$

где многочлены $\Delta_k(z)$ определяются из рекуррентного уравнения

$$\begin{aligned} \Delta_{k+1}(z) &= \left(1 + \frac{\mu_k + z}{\lambda_k}\right) \Delta_k(z) - \frac{\mu_k}{\lambda_k} \Delta_{k-1}(z), \\ \Delta_{-1}(z) &\equiv 0, \quad \Delta_0(z) = 1. \end{aligned}$$

Многочлены $\Delta_k(z)$ обладают следующими свойствами: 1) все корни $\Delta_k(z)$ — отрицательны и различны; 2) корни соседних многочленов $\Delta_k(z)$ и $\Delta_{k+1}(z)$ — чередуются, т. е. между двумя соседними корнями многочлена $\Delta_{k+1}(z)$ лежит один корень многочлена $\Delta_k(z)$.

Эти свойства позволяют легко (особенно с помощью ЭВМ) вычислить корни многочлена $\Delta_k(z)$.

При $i < j$ получаем

$$\text{Me}^{-z\theta_{ij}} = \Delta_i(z) / \Delta_j(z).$$

Легко найти также

$$T_{0k} = \sum_{s_0}^{k-1} \frac{1}{\lambda_s b_s} \sum_{i=0}^s b_i,$$

где $b_0 = 1$; $b_k = \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1} (\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k)^{-1}$.

Тогда при $i < j$:

$$T_{ij} = M\theta_{ij} = T_{0j} - T_{0i}; \quad \xi_0 = \theta_{0,n+1}; \\ \xi_k = \theta_{n,n+1}; \quad \eta_k = \theta_{n+1,n}.$$

27.2.3. Предельные теоремы для случайных величин с рациональным преобразованием Лапласа. Если система, описываемая марковским процессом $\psi(t)$, достаточно надежна, т. е. процесс $\psi(t)$ «редко» попадает в множество E_- , то величины ξ_0, ξ, ξ^* асимптотически распределены по экспоненциальному закону. Ниже приводятся условия, при которых распределение случайных величин с рациональным преобразованием Лапласа сходится к экспоненциальному.

Введем следующие классы неотрицательных случайных величин:

$$Z_0 = \left\{ \theta : \text{Me}^{-z\theta} = \prod_{k=1}^n (1 + \alpha_k z)^{-1}, \quad M\theta = 1 \right\};$$

$$Z_1 = \left\{ \theta : \text{Me}^{-z\theta} = (1 + z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n)^{-1} \right\};$$

$$Z_2 = \left\{ \theta : \text{Me}^{-z\theta} = \frac{1 + b_1 z + \dots + b_m z^m}{1 + a_1 z + \dots + a_n z^n}, \quad a_1 - b_1 = 1 \right\}.$$

Пусть θ_0 — случайная величина с экспоненциальным распределением $P\{\theta_0 > x\} = e^{-x}$.

Под сходимостью $\theta \rightarrow \theta_0$ будем понимать сходимость функций распределения. Справедливы следующие утверждения.

1. Если $\theta \in Z_0$ и $a_2 < 1/4$, то

$$|P\{\theta > x\} - e^{-x}| \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 4a_2}}{1 + \sqrt{1 - 4a_2}}, \quad (27.2)$$

причем $a_2 = 1 - \frac{1}{2} M\theta^2$.

2. Если $\theta \in Z_1$, то из условия $a_2 \rightarrow 0$ следует $\theta \rightarrow \theta_0$ и при этом для всех $x \geq 0$

$$|P\{\theta > x\} - e^{-x}| \leq c \sqrt{a_2}, \quad c < 10.$$

3. Если $\theta \in Z_2$ и n фиксировано, то из условий $b_1 \rightarrow 0$ и $a_2 \leq 0$ следует $\theta \rightarrow \theta_0$.

Покажем, как можно применять эти утверждения.

1. Для процесса «гибели и размножения» преобразование Лапласа для распределения времени до отказа $\theta_{0,n+1}$ определяется равенством

$$\text{Me}^{-z\theta_{0,n+1}} = (\Delta_{n+1}(z))^{-1}.$$

Все корни $\Delta_{n+1}(z)$ действительны и отрицательны, т. е. нормированная случайная величина $\theta_{0, n+1}/M_{0, n+1}$ и ее асимптотическое распределение можно найти по формуле (27.2).

В этом случае

$$a_2 = T_{0, n+1}^{-2} \sum_{k=1}^n (\lambda_k b_k)^{-1} \sum_{s=1}^k b_s T_{0s}.$$

Для распределения времени работы между отказами $\xi_k = \theta_{n, n+1}$ преобразование Лапласа имеет вид

$$Me^{-z\theta_{n, n+1}} = \Delta_n(z)/\Delta_{n+1}(z). \quad (27.3)$$

Обозначим коэффициенты многочлена $\Delta_k(z) = 1 + \Delta_{k1}z + \dots + \Delta_{kk}z^k$. Тогда по утверждению 3 для сходимости распределения нормированной случайной величины $\theta_{n, n+1} (M \theta_{n, n+1})^{-1}$ к экспоненциальному распределению требуется выполнение условий:

$$\frac{\Delta_{n1}}{\Delta_{n+1,1}} = \frac{T_{01}}{T_{0, n+1}} \rightarrow 0; \quad a_2 = \frac{\Delta_{n+1,2}}{\Delta_{n+1,1}^2} \rightarrow 0. \quad (27.4)$$

Условия сходимости к экспоненциальному распределению случайных величин $\eta_k = \theta_{n+1, 0}$ легко находятся из (27.3) переходом к сопряженному процессу.

Для сходимости распределения нормированной случайной величины ξ^* к экспоненциальному требуется выполнение условия (27.4) и условия $\sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \rightarrow 0$ (здесь p_k — стационарные вероятности).

2. Рассмотрим процесс гибели и размножения с параметрами $\lambda_k = \lambda$; $\mu_k = \mu$ при $k > 0$, $\rho = \lambda\mu^{-1}$. Такой процесс описывает поведение резервной группы с одним основным и n резервными элементами, находящимися в ненагруженном резерве. Величина $\theta_{0, n+1}$ есть время до первого отказа резервной группы при условии, что в начальный момент все элементы были исправны. Нетрудно подсчитать, что

$$a_2 = \frac{(n-1) + (n+2)\rho + \frac{(n+1)(n+2)}{2}\rho^n - (n-1)(n-2)\rho^{n+1} + \frac{n(n-1)}{2}\rho^{n+2}}{[1 - (n+1)\rho^n + n\rho^{n+1}]^2} \rho^n.$$

Отсюда можно получить асимптотически точное неравенство $a_2 \leq n\rho^n$. Подставляя это неравенство в правую часть (27.2), получаем точную оценку распределения наработки до первого отказа:

$$\left| P \left\{ \frac{\theta_{0, n+1}}{T_{0, n+1}} > x \right\} - e^{-x} \right| \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 4n\rho^n}}{1 + \sqrt{1 - 4n\rho^n}}.$$

27.3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ И НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ РЕГЕНЕРИРУЮЩИХ ПРОЦЕССОВ

27.3.1. Постановка задачи и точные формулы. Пусть: $\psi(t)$ — регенерирующий процесс; $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$ — последовательные моменты регенерации; $\theta_n = t_n - t_{n-1}$ — длина n -го периода регенерации.

Предположим, что на каждом n -м периоде регенерации в некоторый момент $t_{n-1} + \kappa_n$, $0 \leq \kappa_n \leq \theta_n$, может произойти событие A_n (например, отказ системы), причем распределение величины κ_n и вероятность события A_n не зависят от номера n и от поведения процесса вне n -го периода регенерации.

Пусть ξ_0 — момент первого наступления события A_n (первого отказа системы). Введем обозначения:

$q = P\{A_n\}$; χ_n — индикатор события A_n , т. е.

$$\chi_n = \begin{cases} 1, & \text{если } A_n \text{ происходит,} \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\xi_n = \chi_n \kappa_n + (1 - \chi_n) \theta_n; \quad \varphi_-(z) = M e^{-z \xi_n} \chi_n;$$

$$\varphi_+(z) = M e^{-z \xi_n} (1 - \chi_n); \quad \varphi(z) = \varphi_-(z) + \varphi_+(z).$$

Преобразование Лапласа для распределения величины ξ_0 имеет вид

$$M e^{-z \xi_0} = [\varphi_-(z)]/[1 - \varphi_+(z)],$$

а математическое ожидание

$$M \xi_0 = M \varphi / q.$$

(Там, где это несущественно, мы опускаем индексы у s_n , χ_n , κ_n , θ_n).

Функции $\varphi_-(z)$ и $\varphi_+(z)$ явно вычисляются только для простых процессов. Если вероятность отказа системы на одном периоде регенерации q мала, то можно получить приближенные формулы для характеристик надежности системы, исследуя асимптотическое поведение случайной величины ξ_0 при $q \leq 0$.

27.3.2. Предельные теоремы. Для любой случайной величины θ введем функционал

$$\alpha(\theta) = (M\theta)^{-1} \int_0^\infty (1 - e^{-x}) P\{\theta > x\} dx.$$

Справедливы следующие утверждения:

$$1) \lim P\left\{\frac{q\xi_0}{T} > x \mid \alpha\left(\frac{q\xi}{T}\right) \rightarrow 0\right\} = e^{-x};$$

$$2) \lim P\left\{\frac{q\xi_0}{T} > x \mid \frac{M\xi^2}{(M\xi)^2} q \rightarrow 0\right\} = e^{-x};$$

$$3) \lim P\left\{\frac{q\xi_0}{T_0} > x \mid \alpha\left(\frac{q\theta}{T_0}\right) \rightarrow 0\right\} = e^{-x},$$

где

$$4) \lim P\left\{\frac{q\xi_0}{T_0} > x \mid \frac{M\theta^2}{(M\theta)^2} q \rightarrow 0\right\} = e^{-x}.$$

27.3.3. Регенерирующий процесс специального типа. Рассмотрим регенерирующий процесс $\psi(t)$, у которого периоды регенерации состоят из двух частей: ξ_n и η_n^0 , причем первая часть ξ_n (работоспособное состояние всех элементов системы) имеет показательное распределение $P\{\xi_n > x\} = e^{-\lambda x}$, а вторая (состояние, при котором восстанавливается хотя бы один элемент системы) — произвольное распределение со средним $\tau_0 = M\eta_n^0$.

Предположим далее, что событие A_n (отказ системы) может появиться только на второй части периода. Обозначим через η_n^+ момент наступления отказа, отсчитываемый от начала второй части, и предположим, что событие A_n и величина η_n^+ не зависят от номера n и от поведения процесса вне второй части n -го периода регенерации.

Пусть χ_n — индикатор события A_n . Введем обозначения: $\eta_n = \eta_n^+ (1 - \chi_n) + \eta_n^0 \chi_n$, где η_n^+ — длина второй части периода регенерации при условии, что событие A_n не произошло; $q = P\{A_n\}$; $\tau = M\eta_n$; ξ_0 — момент первого наступления события A . Тогда справедливы следующие утверждения:

$$1) \lim P\{\lambda q \xi_0 > x \mid \lambda \tau \rightarrow 0\} = e^{-x};$$

2) так как $\tau \leq \tau_0$, то

$$\lim P \{ \lambda q \xi_0 > x | \lambda \tau_0 \rightarrow 0 \} = e^{-x};$$

3) для всех $t \geq 0$ справедливо неравенство

$$e^{-\lambda q t} \leq P \{ \xi_0 > t \} \leq e^{-\lambda q t} + \lambda \tau;$$

4) для всех $t \geq 0$ справедливо неравенство

$$P \{ \xi_0 > t \} \leq (1 + \Delta_-) e^{-\lambda q t (1 - \Delta_+)},$$

где $\Delta^+ = (1 - q) q^{-1} (M e^{\lambda q \eta_n^+} - 1) < \infty$; $\Delta_- + M e^{\lambda q \eta_n^-} - 1 < \infty$.

П р и м е ч а н и е Величины Δ_- и Δ_+ выражаются довольно сложно, однако в большинстве практических случаев можно считать $\Delta_+ \leq \lambda \tau_0$ и $\Delta_- \leq \lambda \tau_0$; и тогда

$$P \{ \xi_0 > t \} \leq (1 + \lambda \tau_0) e^{-\lambda q t (1 - \lambda \tau_0)}.$$

27.3.4. Оценка вероятности q . Для того чтобы применять приведенные выше оценки, надо вычислить или оценить величину q — вероятность наступления отказа системы на одном периоде регенерации. Для одного важного класса процессов $\psi(t)$, который, в частности, включает в себя процессы для моделей (λ_h, G, r, n) и $[\lambda_i(e), G_{ij}, E_+]$, можно получить двустороннюю и весьма точную оценку вероятности q , когда q мало. Рассмотрим в процесс $\psi(t)$ с конечным (или счетным) числом состояний, которые обозначим $E = \{0, 1, 2, \dots\}$, и предположим, что это множество частично упорядочено, причем 0 является единственным минимальным состоянием и $\theta \in E_+$. Эту упорядоченность обозначим $i < j$.

Назовем $\psi(t)$ «марковским вверх» процессом, если он удовлетворяет условиям:

1) для любых $i < j$

$$\begin{aligned} P \{ \psi(t+h) = j | (\psi(t) = i) \cap (\psi(x) = f(x)), x < t \} = \\ = P \{ \psi(t+h) = dj | \psi(t) = i \} = \lambda_{ij} h + o(h); \end{aligned}$$

2) для любого $i \in E_+$ выполняется $0 < \sum_{i < j} \lambda_{ij} = \lambda_i < \infty$;

3) назовем свободным периодом интервал, где $\psi(t) = 0$, и периодом занятости — интервал, где $\psi(t) > 0$. Тогда для любых i и j , $t > j$, вероятность

$$P \{ \psi(t+h) = j | (\psi(t) = i) \cap (\psi(x) = f(x)), x < t \}$$

зависит только от поведения процесса на последнем периоде занятости, на который попал момент t .

Этот процесс является регенерирующим процессом специального типа. Пусть событие A есть попадание процесса $\psi(t)$ в множество E_- (отказы системы), а q — вероятность появления события A на одном периоде регенерации. Назовем монотонным путем

$$\pi = \{0, i_1, i_2, \dots, i_m\};$$

$$0 < i_1 < i_2 < \dots < i_m, i_1 \in E_+, \dots; i_{m-1} \in E_+, i_m \in E_-$$

возрастающую последовательность проходимых процессом состояний от начала периода занятости до первого попадания в множество E_- .

Пусть $q(\tau)$ есть вероятность наступления события A по заданному монотонному пути. Тогда $q_0 = \sum q(\pi)$, где сумма берется по всем монотонным путям, есть вероятность наступления события A по монотонному пути.

Предположим также, что процесс $\psi(t)$ — эргодический, и обозначим через p_i стационарные вероятности:

$$p_i = \lim_{t \rightarrow \infty} P \{ \psi(t) = i \}.$$

Тогда имеет место следующее утверждение:

$$q_0 \leq q \leq (\lambda_0 p_0)^{-1} \sum_{i \in E_-} \sum_{j \in E_+} p_i \lambda_{i,j}.$$

Применение этих предельных теорем и неравенств будет дано ниже, а сейчас мы ограничимся простыми примерами.

Пример 27.1. Рассмотрим систему из двух элементов — рабочего и резервного, находящегося в ненагруженном резерве. При отказе рабочего элемента на его место становится и мгновенно включается в работу резервный элемент, а отказавший рабочий элемент идет в ремонт, после окончания которого становится в резерв. В свою очередь, резервный элемент, ставший на рабочее место, после отказа идет на ремонт, а на его место становится элемент из резерва и т. д. Предполагается, что восстановление полное. Пусть $F(t) = P\{\xi < t\}$ — функция распределения времени безотказной работы каждого элемента, а $G(t) = P\{\eta < t\}$ — функция распределения времени ремонта каждого элемента. Система отказывает тогда, когда неисправны оба элемента. Требуется записать приближенное выражение для вероятности безотказной работы.

Решение. Процесс $\chi(t)$, равный числу неисправных элементов в момент t , будет регениерирующим (если исключить первый период работы элемента). Моменты регенерации — это моменты отказа одного элемента, в которые подключается в работу другой элемент.

Если $[M\xi^2/(M\xi)^2] q \rightarrow 0$, то справедливо асимптотическое равенство

$$P\{\xi_0 > t\} \approx e^{-qt/T},$$

где $q = \int_0^\infty \bar{G}(x) dF(x)$; $T = \int_0^\infty x dF(x) = M\xi = T_0$.

Пример 27.2. Изменим предыдущую модель, предположив, что наработка на отказ основного элемента имеет экспоненциальное распределение с параметром λ , а резервный элемент тоже может отказывать с интенсивностью $\lambda' < \lambda$. Требуется записать приближенное выражение для вероятности безотказной работы.

Решение. Процесс $\psi(t)$ — это число неисправных элементов в момент t , а точки регенерации — это моменты, когда оба элемента становятся исправными. У этого регениерирующего процесса специального вида первая часть периода регенерации имеет показательное распределение с параметром $\lambda + \lambda'$. Как следует из п. 27.3.3, если $(\lambda' + \lambda) T_0 = (\lambda + \lambda') \int_0^\infty \bar{G}(t) dt \leq 0$, то справедлива асимптотическая формула

$$P\{\xi_0 > t\} \approx \exp\{-(\lambda + \lambda') qt\},$$

где $q = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda t}) dG(t) \approx \lambda T_0$.

Тогда окончательно при $\lambda T_0 \ll 1$ справедлива приближенная формула

$$P\{\xi_0 > t\} \approx \exp\{-(\lambda + \lambda') \lambda T_0 t\}.$$

27.4. ОБЩАЯ МОДЕЛЬ РЕЗЕРВИРОВАНИЯ С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ

27.4.1. Предельные теоремы. Для системы (λ_n, G, r, n) справедливы следующие утверждения:

1) $\lim P\{\lambda_n q \xi_0 > x | \bar{\lambda} T \rightarrow 0\} = e^{-x}$,

где q — вероятность отказа системы (переход $n \rightarrow n + 1$) на одном периоде занятости;

2) если $\bar{\lambda} [m_{n+1}/m_1^n] \rightarrow 0$, где $m_k = \int_0^\infty x^k dG(x)$, то

$$q \approx \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \int_0^\infty \frac{x^{n-r}}{(n-r)!} \left[\int_x^\infty \bar{G}(t) dt \right]^{r-1} \frac{\bar{G}(x)}{(r-1)!} dx; \quad (27.5)$$

3) если $\bar{\lambda} [m_{n+1}/m_1^n] \rightarrow 0$, то

$$\lim P\{\Lambda \xi_0 > x\} = e^{-x},$$

где $\Lambda = \Lambda_0 q$ и q определено по формуле (27.5).

Отметим важные частные случаи:

$$r = 1, \text{ тогда } \Lambda = \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_n m_n / n!;$$

$$r = n, \text{ тогда } \Lambda = \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_n m_1^n / n!.$$

В этом случае имеет место асимптотическая инвариантность — предельное распределение ξ_0 не зависит от вида распределения $G(x)$.

Для функции распределения $P\{\xi_0 > t\}$ найдены двусторонние оценки:

$$e^{-\lambda_0 q t} \leq P\{\xi_0 > t\} \leq e^{-\lambda_0 q t} + \frac{\lambda_0 T}{1 - \bar{\lambda} T},$$

где

$$T = \int_0^\infty x dG(x) = m; \quad \bar{\lambda} = \max_{k \leq n} \lambda_k.$$

Наибольшую трудность представляет оценка вероятности q . Асимптотически точную оценку удастся получить только для крайних случаев $r = 1$ и $r = n$. Для них справедливы утверждения:

4) для системы $[\lambda_k, G, n, n]$

$$\underline{q} = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \bar{\lambda} \int_0^\infty e^{-\bar{\lambda} x} \frac{\varphi^n(x)}{n!} dx \leq q \leq \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}{n!} T^n = \bar{q},$$

где

$$\varphi(x) = \int_0^x \bar{G}(t) dt;$$

5) для системы $[\lambda_k, G, 1, n]$

$$q_0 \leq q \leq q_0 A_{n-1}(\gamma), \quad q_0 = \int_0^\infty p_{1n}(t) dG(t),$$

где $\gamma = \bar{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \bar{G}(x) dx$, $\lambda = \max_{k \leq n} \lambda_k$, $\underline{\lambda} = \min_{k \leq n} \lambda_k$; $p_{1n}(t)$ — вероятность перехода процесса чистой гибели с параметрами λ_k за время t из состояния 1 в состояние, большее n ; $A_{n-1}(\gamma) = \sum_{k=0}^\infty (k+1)^{n-1} \gamma^k$.

27.4.2. Оценка послеотказовых характеристик надежности. Приведенные выше результаты дают асимптотические и двусторонние оценки распределения времени до первого отказа ξ_0 в модели (λ_k, G, r, n) . Однако в теории надежности часто используются и послеотказовые характеристики ξ_k и η_k , а также их средние T и τ . Для этих величин в обозначениях теорем 9 и 10 справедливы следующие утверждения:

1) если λ_t, n, r фиксированы, а $m_{n+1}/m_1^n \rightarrow 0$, то $P\{\Lambda \xi_k > x\} \rightarrow e^{-x}$, где Λ определено в п. 27.4.1;

2) если $G(x)$, r , n , λ_k^0 фиксированы, а $\lambda_k \supset \lambda_k^0 \varepsilon$, то при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по номеру k

$$Pk\{\eta > x\} \rightarrow \frac{\int_x^\infty \frac{(t-x)^{n-r}}{(n-r)!} \bar{\varphi}^{r-1}(t) \frac{\bar{G}(t)}{(r-1)!} dt}{\int_0^\infty \frac{t^{n-r}}{(n-r)!} \bar{\varphi}^{r-1}(t) \frac{\bar{G}(t)}{(r-1)!} dt},$$

где $\bar{\varphi}(t) = \int_t^R G(x) dx$.

27.4.3. Произвольное распределение наработки на отказ. Выше мы предполагали, что суммарная интенсивность отказа элементов λ_k постоянна и зависит только от числа отказавших элементов. Это предположение означает, что при фиксированном n наработка на отказ имеет экспоненциальное распределение. Если сам элемент является достаточно сложной системой, ремонт которой состоит в замене отказавшей детали новой, то в силу предельной теоремы Хинчина наработку элемента можно считать распределенной экспоненциально. Однако если элемент достаточно прост и с течением времени в целом быстро стареет, то предположение о показательном характере отказов элементов может привести к существенному искажению характеристик надежности.

Рассмотрим следующую модель ненагруженного резервирования с восстановлением: имеется один основной элемент, n элементов в ненагруженном резерве, r ремонтных единиц, $F(t) = P\{\xi < t\}$ — функция распределения наработки элемента, $G(t) = P\{\eta < t\}$ — функция распределения времени восстановления элемента. Предполагается, что восстановление полное, т. е. после каждого ремонта элемент приходит в исходное состояние. Система отказывает тогда, когда отказывают все $n+1$ элементов.

Пусть: $\alpha_k = P\{\eta \geq \xi_1 + \dots + \xi_k\}$; $P\{\eta < x\} = G(x)$; $P\{\xi_1 < x\} = F(x)$; величины ξ_i независимы; $\alpha = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k$. Тогда справедливы следующие результаты:

1) если r и n фиксированы, а F и G меняются так, что: а) $\alpha_n > 0$; б) $\alpha \rightarrow 0$; в) существуют $\varepsilon_0 > 0$ и $\rho_0 > 0$, такие, что $R\{\eta < (1 - \varepsilon_0)\xi\} \geq \rho_0$, то

$$P\left\{\frac{\xi_0}{M\xi_0} > x\right\} \rightarrow e^{-x}, \quad (27.6)$$

где ξ^0 — время до первого отказа системы;

2) если $r = 1$, n фиксировано, а F и G меняются так, что: а) $\alpha_1 \rightarrow 0$; б) $\alpha_1 > 0$; в) существуют $\varepsilon_0 > 0$ и $\rho_0 > 0$, такие, что $P\{\eta < (1 - \varepsilon_0)\xi\} \geq \rho_0$, то справедливо (27.6);

3) если $r = n$ фиксировано, а распределения F и G меняются так, что: а) $\alpha_m > 0$; б) $\alpha \rightarrow 0$, то справедливо (27.6);

4) если $F'(0) = \lambda > 0$, $G(x) = G_0(x/\varepsilon)$, числа r и n и функции $F(x)$ и $G_0(x)$ фиксированы и существует конечный момент $m_{n+1} = \int_0^\infty x^{n+1} dG_0(x)$, $m_1 = T$, то при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$(M\xi^0)^{-1} = \frac{\lambda^n}{M} \int_0^\infty \frac{x^{n-r}}{(n-r)!} \varphi^{r-1}(x) \frac{1-G_0(x)}{(r-1)!} dx,$$

где $\varphi(x) = \int_x^\infty [1 - G_0(x)] dx$.

27.4.4. Некоторые результаты для нестационарной модели резервирования с восстановлением. Когда сам элемент является сложным устройством и ремонт элемента состоит в замене отказавшей в нем детали, поток отказов элемента (рассматриваемый на оси чистой наработки элемента, когда исключено время восстановления) можно считать пуассоновским.

Однако если в элементе много составных частей, среднее время жизни которых сравнимо, а чаще и значительно больше, чем среднее время жизни всей резервной группы, то поток отказов элемента будет суперпозицией процессов восстановления, которые на интересующем нас участке времени заведомо не войдут в стационарный режим. В этом случае верна уже не теорема Хинчина для суперпозиции стационарных потоков, а теорема Григелиониса, согласно которой поток отказов элемента будет асимптотически пуассоновским потоком с переменным параметром. Существенно, что этот параметр меняется со временем медленно: на участке между соседними отказами элемента его можно считать постоянным. В этой ситуации, видимо, должен быть верен следующий результат.

Пусть в модели $[\lambda_h, G, r, n]$ $\lambda_h = \lambda_h(t)$ зависят от времени и медленно меняются со временем. Тогда вероятность безотказной работы системы асимптотически равна

$$P\{S^0 > t\} \sim e^{-\int_0^t \Lambda(x) dx},$$

где

$$\Lambda(x) = \lambda_0(x) \dots \lambda_n(x) \int_0^\infty \frac{t^{n-r}}{(n-r)!} \bar{\varphi}^{r-1}(t) \frac{1-G(t)}{(r-1)!} dt,$$

$$\bar{\varphi}(t) = \int_t^\infty [1-G(x)] dx.$$

27.5. ОБЩАЯ МОДЕЛЬ СЛОЖНОЙ ВОССТАНАВЛИВАЕМОЙ СИСТЕМЫ

27.5.1. Предварительные замечания. Рассмотрим модель сложной восстанавливаемой системы $[\lambda_i(e), G_{ij}, E_+]$. Заметим, что процесс $e(t)$ является регенерирующим процессом специального типа, а также «марковским вверх» процессом.

Обозначим через $e(i)$ состояние, отличающиеся от e только тем, что в нем на i -м месте стоит 1, т. е. $e(i)$ получается из e при отказе i -го элемента. Назовем состояние $e \in E_+$ граничным, если существует такое i , что $e(i) \in E_-$. Пусть Γ_+ — множество граничных состояний. Монотонным путем π назовем последовательность состояний $0 < e^{(1)} < \dots < e^{(s)}$, где $e^{(k)} \in E_+$, $k < s$, $e^{(s)} \in E_-$, которые проходит процесс от начала периода занятости до первого отказа на этом периоде занятости. Число s назовем длиной пути. Предположим, что при переходе из состояния $e^{(k)}$ в состояние $e^{(k+1)}$ отказывает элемент с номером i_k , т. е. $e^{(k+1)} = e^{(k)}(i_k)$.

Назовем монотонный путь допустимым, если

$$\lambda_{i_0}(0) \lambda_{i_1}(e^{(1)}) \dots \lambda_{i_{s-1}}(e^{(s-1)}) > 0.$$

Пусть $m = \min s$, где минимум берется по всем монотонным допустимым путям (число m называют иногда минимальным сечением системы). Монотонный допустимый путь назовем минимальным, если его длина равна m ; Π_0 — множество монотонных допустимых минимальных путей. Обозначим $q(\pi)$ вероятность отказа системы по монотонному допустимому минимальному пути π и пусть, на-

конец, $q_0 = \sum_{\pi \in \Pi_0} q(\pi)$ — вероятность отказа системы по одному из монотонных минимальных допустимых путей. Обозначим также:

$$\lambda(e) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(e); \quad \bar{\lambda} = \max_{e \in E_+} \lambda(e);$$

$$G(x) = \min_{i,j} G_{ij}(x), \quad T = \int_0^{\infty} x dG(x).$$

27.5.2. Предельные теоремы.

$$1) \lim_{\bar{\lambda} \bar{T} \rightarrow 0} P \left\{ \frac{\xi_0}{M\xi_0} > x \right\} = e^{-x}.$$

Для того чтобы сформулировать результат, в котором дается оценка $M\xi_0$, наложим на процесс дополнительные ограничения:

восстановление отказавшего элемента происходит без прерывания и начинается либо в момент прихода элемента в ремонтный орган, либо в момент окончания восстановления другого элемента;

в предельном переходе число элементов n , функции $G_{ij}(x)$, число обслуживающих приборов ремонтного органа и дисциплина обслуживания фиксированы, а $\lambda_i(e) = \lambda_i^0 e$, где $\lambda_i^0(e)$ фиксированы, а $e \rightarrow 0$;

мажорирующее распределение G имеет конечный момент m -го порядка.

При таких условиях справедливо следующее утверждение:

2) при $e \rightarrow 0$

$$q \sim \sum_{\pi \in \Pi_0} \frac{\lambda_{i_0}(0)}{\lambda(0)} \lambda_{i_1}(e^{(1)}) \dots \lambda_{i_{m-1}}(e^{(m-1)}) J(\pi), \quad (27.7)$$

где

$$J(\pi) = \int_A \dots \int \bar{G}_{i_0 j_0}(x_0) \bar{G}_{i_1 j_1}(x_{s_1}) \dots \bar{G}_{i_{s_l-1} j_{s_l-1}}(x_{s_{l-1}}) dx_1 \dots dx_{m-1},$$

а интеграл берется по области $x_0 > x_1 > \dots > x_{m-1}$; $i_0, i_1, \dots, i_{m-1}$ — номера последовательно отказывающих для данного пути π элементов; j_h — номер обслуживающего прибора, на который поступает элемент с номером i_h ; $l \leq r$. Кроме того, учитывается, что не для всякого из отказавших элементов найдется доступный для него обслуживающий прибор (элемент с номером i_0 сразу начинает восстанавливаться, а следующий элемент, для которого найдется свободный обслуживающий прибор, будет иметь номер i_{s1}).

27.5.3. Частные случаи.

1. Пусть $G_{i,j}(x) = G(x)$ и каждый обслуживающий прибор доступен для каждого элемента. Тогда в формуле (27.7).

$$J(\pi) = \int_0^{\infty} \frac{x^{m-r-1}}{(m-r-1)!} \left[\int_x^{\infty} \bar{G}(t) dt \right]^{r-1} \frac{\bar{G}(x)}{(r-1)!} dx = J_{mr}.$$

2. Пусть дополнительно $\lambda_i(e) = \lambda_i$, и если $e_i = 0$, то $\lambda_i(e) = 0$, $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Тогда формула (27.7) имеет вид

$$q \sim J_{mr} \frac{m!}{\lambda} \sum \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} \dots \lambda_{k_m}, \quad (27.8)$$

где $k_1 < k_2 < \dots < k_m$ — номера отказавших элементов, т. е. номера единиц в состоянии $e^{(m)} \in E_-$, а сумма берется уже не по путям, а по граничным отказовым состояниям $e^{(m)}$, для которых m — минимально,

3. Пусть $G_{ij}(x) = G(x)$, все элементы в системе симметричны (случай скользящего резерва), т. е. $\lambda_i(e) = \lambda_0(|e|)$, где $|e| = \sum_{i=1}^n e_i$, и множество E_+ переходит в себя при любой перестановке координат e_i вектора e . Тогда

$$q \sim \frac{(n-1)!}{(n-m)!} J_{mr} \lambda_0(1) \lambda_0(2) \dots \lambda_0(m-1).$$

4. Пусть $G_{ij}(x) = G_i(x)$, $\lambda_i(e) = \lambda_i$, если $e_i = 0$, $\lambda_i(e) = 0$ и каждый элемент начинает ремонтироваться в момент его отказа. Тогда

$$\lambda q \sim \sum \lambda_{k_1} \dots \lambda_{k_m} \tau_{k_1} \dots \tau_{k_m} (\tau_{k_1}^{-1} + \dots + \tau_{k_m}^{-1}),$$

где $\tau_k = \int_0^\infty t dG_k(t)$, а сумма берется так же, как и в формуле (27.8).

27.5.4. Двусторонняя оценка вероятности q . Для последнего частного случая предыдущего пункта можно получить двустороннюю оценку вероятности $\underline{q} \leq q \leq \bar{q}$, где

$$\underline{q} = \left(\sum_{e \in \Gamma_+} \frac{\lambda_-(e)}{\lambda} \left[1 - \sum_{k=1}^n \frac{\lambda m_k}{2\tau_k} e_k \right] \prod_{i=1}^n (\lambda_i \tau_i)^{e_i}; \right.$$

$$\left. \bar{q} = \sum_{e \in \Gamma_+} \frac{\lambda_-(e)}{\lambda} \prod_{i=1}^n (\lambda_i \tau_i)^{e_i}; \right.$$

$$m_k = \int_0^\infty x^2 dG_k(x), \quad \tau_k = \int_0^\infty x dG_k(x),$$

а $\lambda_-(e) = \sum \lambda_k$, где сумма берется по всем k , для которых $e(k) \in E_-$ (другими словами, $\lambda_-(e)$ есть суммарная интенсивность отказа системы в состоянии e).

Глава 28

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ

28.1. СТАЦИОНАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ ПОЛУМАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

На практике часто возникает необходимость вычисления средней наработки на отказ T и среднего времени простоя τ системы с восстановлением для стационарного процесса функционирования, не описываемого марковским процессом.

Пусть рассматриваемая система, состоящая из n восстанавливаемых элементов, может находиться в 2^n различных состояниях множества E , которые могут быть разделены на два класса: состояния работоспособности (подмножество E_+) и состояния отказа (подмножество E_-). В процессе функционирования система, переходя из одного состояния в другое, блуждает по состояниям внутри одного класса, а затем попадает в другой класс состояний. Переход из подмножества E_+ в подмножество E_- может осуществляться не из любого состояния работоспособности, а только из граничного (подмножество e_+). Аналогично переход из E_- в E_+ может осуществляться только из состояния, принадлежащего подмножеству граничных состояний e_- . (Примеры подмножества E_+ , E_- , e_+ , e_- приведены на рис. 28.1 для условного графа переходов).

В случае полумарковского процесса смена индексов (номеров) состояний системы образует марковскую цепь, а время пребывания в каждом состоянии перед переходом в другое состояние является случайной величиной с произвольным распределением.

Предполагаются известными:

матрица переходных вероятностей соответствующей марковской цепи

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

где p_{ij} вероятность перехода из состояния H_i в состояние H_j ;

функция $F_{ij}(t)$ распределения длительности пребывания процесса в состоянии H_i при условии перехода в состояние H_j .

Можно показать, что в этом случае средняя наработка

$$T = \sum_{i \in E_+} P_i a_i \left(\sum_{i \in E_+} P_i \sum_{j \in E_-} p_{ij} \right)^{-1}$$

или

$$T = \sum_{i \in E_-} P_i a_i \left(\sum_{i \in E_-} P_i \sum_{j \in E_+} p_{ij} \right)^{-1},$$

а среднее время простоя

$$\tau = \sum_{i \in E_-} P_i a_i \left(\sum_{i \in E_+} P_i \sum_{j \in E_-} p_{ij} \right)^{-1}$$

или

$$\tau = \sum_{i \in E_-} P_i a_i \left(\sum_{i \in E_-} P_i \sum_{j \in E_+} p_{ij} \right)^{-1}.$$

Здесь $a_i = \sum_{j \in E} p_{ij} T_{ij}$ — среднее время пребывания полумарковского процесса

в состоянии H_i : $P_i = D_i / \sum_{i=1}^n D_i$ — стационарная вероятность пребывания марковской цепи с матрицей переходных вероятностей P в состоянии H_i , где

$$D = \begin{pmatrix} 1-p_{11} & -p_{12} & \dots & -p_{1n} \\ -p_{21} & 1-p_{22} & \dots & -p_{2n} \\ \dots & \dots & -p_{ij} & \dots \\ -p_{n1} & -p_{n2} & \dots & 1-p_{nn} \end{pmatrix};$$

D_i — минор, получаемый вычеркиванием i -й строки и i -го столбца матрицы D .

При марковском процессе задаются интенсивности λ_{ij} перехода процесса из состояния H_i в состояние H_j , и формулы для данного случая можно получить как частные случаи для полумарковского процесса.

Средняя наработка находится по формулам

$$T = K \left(\sum_{i \in E_+} P_i \sum_{j \in E_-} \lambda_{ij} \right)^{-1}$$

или

$$T = K \left(\sum_{i \in E_-} P_i \sum_{j \in E_+} \lambda_{ij} \right)^{-1},$$

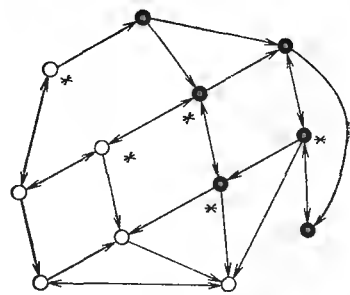


Рис. 28.1. Примеры подмножеств E_- (○) и E_+ (●) (звездочками помечены соответствующие подмножества e_+ и e_-)

а среднее время простоя по формуле

$$\tau = k \left(\sum_{i \in e_+} P_i \sum_{j \in E_-} \lambda_{ij} \right)^{-1}$$

или

$$\tau = k \left(\sum_{i \in e_-} P_i \sum_{j \in E_+} \lambda_{ij} \right)^{-1},$$

где K и k — коэффициенты готовности и простоя:

$$K = \sum_{i \in E_+} \frac{P_i}{\sum_{j \in E} \lambda_{ij}} \left(\sum_{k \in E} \frac{P_k}{\sum_{j \in E} \lambda_{kj}} \right)^{-1};$$

$$k = 1 - K = \sum_{i \in E_-} \frac{P_i}{\sum_{j \in E} \lambda_{ij}} \left(\sum_{k \in E} \frac{P_k}{\sum_{j \in E} \lambda_{kj}} \right)^{-1}.$$

28.2. СПОСОБ ВВЕДЕНИЯ ФИКТИВНЫХ СОСТОЯНИЙ

В некоторых случаях предположения об экспоненциальности распределений оказываются неправомерными, причем не удастся сделать и предположения о существенной малости времени простоя по отношению к времени безотказной работы. В этом случае может быть использован следующий искусственный прием: вводятся дополнительные фиктивные состояния (фазы), которые позволяют с определенными приближениями описывать немарковские модели.

Суть введения фиктивных состояний заключается в том, что распределения с возрастающей интенсивностью отказов (ВФИ-распределения) могут быть получены, если мы просуммируем несколько экспоненциально распределенных случайных величин (т. е. «стареющее» распределение может быть получено как свертка экспоненциальных распределений), а распределения с убывающей интенсивностью отказов (УФИ-распределения) получаются, если произвести «взвешивание» нескольких экспоненциальных распределений. (Вопрос о точности и приемлемости такой аппроксимации должен рассматриваться в каждом конкретном случае особо.)

С одной стороны, используя марковскую модель для произвольных распределений, мы упрощаем задачу, с другой, — вводя дополнительные состояния в граф переходов, мы ее усложняем, увеличивая размерность пространства состояний.

Простейшие графы переходов для типовых случаев (одиночный элемент, дублированная система), когда распределения наработки на отказ $F(t)$ и времени восстановления $G(t)$ отличаются от экспоненциальных, приведены на рис. 28.2. На рисунке индекс «0» соответствует состоянию работоспособности, а индекс «1» — состоянию отказа.

Пример 28.1. Рассмотрим элемент, у которого наработка на отказ имеет экспоненциальное распределение с параметром λ_0 , а время восстановления — ВФИ-распределение, аппроксимируемое сверткой двух экспоненциальных распределений с параметрами μ_1 и μ_2 , т. е.

$$g(t) = \int_0^t \mu_1 \mu_2 e^{-\mu_1(t-y)} e^{-\mu_2 y} dy.$$

Требуется найти выражение для нестационарного коэффициента готовности.

Решение. Система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$P'_0(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_2 P_2(t);$$

$$P'_1(t) = \lambda_0 P_0(t) - \mu_1 P_1(t);$$

$$P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1;$$

$$P_0(0) = 1.$$

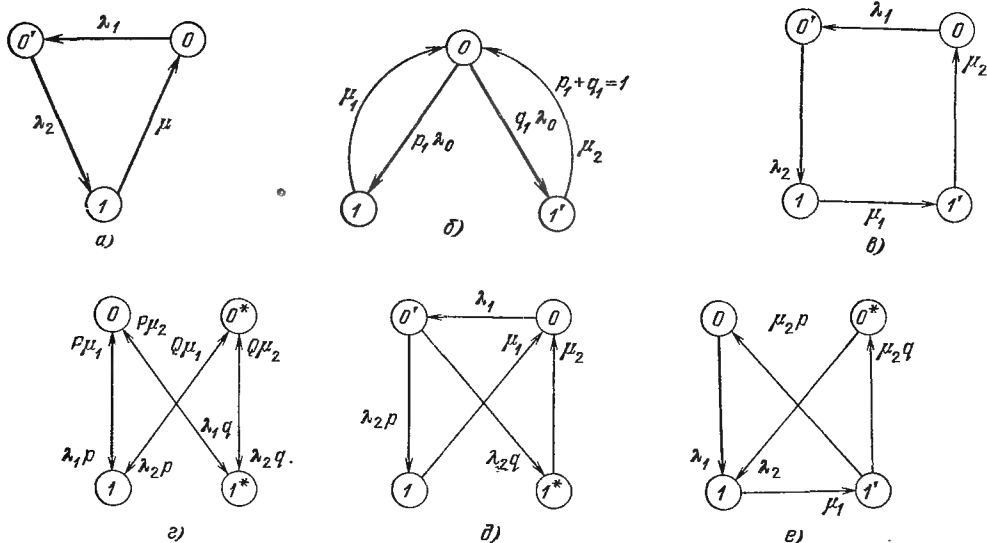


Рис. 28.2. Граф переходов для восстанавливаемого элемента:

а) ВФИ-распределение $E(t)$ и экспоненциальное распределение $G(t)$; б) УФИ-распределение $F(t)$; в) ВФИ-распределения $G(t)$ и $F(t)$; г) УФИ-распределения $F(t)$ и $G(t)$; д) ВФИ-распределение $F(t)$ и УФИ-распределение $G(t)$; е) УФИ-распределение $F(t)$ и ВФИ-распределение $G(t)$

Преобразование Лапласа приводит к системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}(\lambda_0 + s) \varphi_0(s) - \mu_2 \varphi_2(s) &= 1; \\ -\lambda_0 \varphi_0(s) + (\mu_1 + s) \varphi_1(s) &= 0; \\ s \varphi_0(s) + s \varphi_1(s) + s_2 \varphi_2(s) &= 1,\end{aligned}$$

откуда после преобразования получаем

$$\varphi_0(s) = \frac{s^2 + (\mu_1 + \mu_2)s + \mu_1 \mu_2}{s[s^2 + (\lambda_0 + \mu_1 + \mu_2)s + \lambda_0 \mu_1 + \lambda_0 \mu_2 + \mu_1 \mu_2]}.$$

Обозначим корни знаменателя s_1, s_2, s_3 :

$$\begin{aligned}s_{1,2} &= -(\alpha/2) \pm \sqrt{\alpha^2/4 - \beta}; \\ s_3 &= 0,\end{aligned}$$

где $\alpha = \lambda_0 + \mu_1 + \mu_2$; $\beta = \lambda_0 \mu_1 + \lambda_0 \mu_2 + \mu_1 \mu_2$.

Для любых λ_0, μ_1 и μ_2 корни s_1 и s_2 являются комплексно-сопряженными.

Представим $\varphi_0(s)$ в виде

$$\varphi_0(s) = A/s + B/(s - s_1) + C/(s + s_2) = [s(s - s_1)(s + s_2)]^{-1} [A + (B + C)s^2 - (A(s_1 + s_2) + Bs_2 + Cs_1)s + As_1s_2],$$

откуда для определения коэффициентов A, B и C получаем систему:

$$A + B + C = 1; \quad \mu_1 + \mu_2 = -A(s_1 + s_2) - Bs_2 - Cs_1; \quad As_1s_2 = \mu_1\mu_2.$$

Окончательно находим:

$$\begin{aligned}A &= \mu_1\mu_2/(\lambda_0\mu_1 + \lambda_0\mu_2 + \mu_1\mu_2); \\ B = C &= 0,5(1 - \mu_1\mu_2/\beta).\end{aligned}$$

Отсюда обратное преобразование дает

$$K(t) = P_0(t) = \mu_1\mu_2/\beta + 0,5(1 - \mu_1\mu_2/\beta)(e^{-s_1t} + e^{-s_2t}).$$

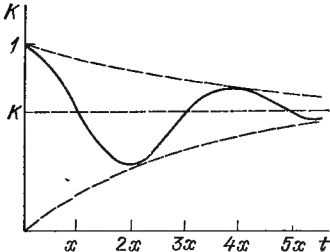


Рис. 28.3. Коэффициент готовности $K(t)$ для примера 28.1:

$K = \mu_1 \mu_2 / \beta$ — стационарный коэффициент готовности; $x = \pi^{-1} \sqrt{\beta - 0,25\alpha^2}$

Учитывая комплексность s_1 и s_2 , окончательно получаем

$$K(t) = \mu_1 \mu_2 / \beta + (1 - \mu_1 \mu_2 / \beta) e^{-\frac{\alpha}{2} t} \cos \sqrt{\beta - \alpha^2 / 4} t.$$

Зависимость нестационарного коэффициента готовности от времени представлена на рис. 28.3.

28.3 ПРОЦЕССЫ МАРКОВСКОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ И АЛГОРИТМЫ ФАЗОВОГО УКРУПНЕНИЯ

28.3.1. Предварительные замечания. В качестве процессов, описывающих функционирование восстанавливаемых систем, как правило, выступают: цепи Маркова, полумарковские процессы с дискретным множеством состояний, многокомпонентные процессы, регенерирующие процессы, процессы с дискретным вмешательством случая. Использование того или иного процесса требует специальных предположений о виде функций распределения наработки элементов и времени их восстановления, дисциплины восстановления и т. д. На практике для расчета показателей надежности чаще всего используются цепи Маркова. Задача оценки надежности сводится при этом к изучению систем линейных алгебраических или дифференциальных уравнений.

Возникает вопрос: можно ли указать класс случайных процессов, столь же удобный для описания функционирования восстанавливаемых систем, но не требующий никаких специальных предположений о характере исходных случайных величин? К такому классу относятся процессы марковского восстановления.

Идея их построения применительно к восстанавливаемым системам чрезвычайно проста: прежде всего (так же как если бы все исходные случайные величины имели экспоненциальные распределения) кодируются возможные физические состояния системы, затем к полученному таким образом дискретному состоянию системы добавляется непрерывная составляющая (фазовое пространство расширяется) так, чтобы, с одной стороны, компенсировать возможный неэкспоненциальный характер исходных распределений и с другой — обеспечить марковский характер полученных в итоге процессов, которые оказываются процессами марковского восстановления и являются естественными моделями стохастических систем, изменение состояний которых происходит скачкообразно через случайные промежутки времени.

28.3.2. Процесс марковского восстановления. Процессом марковского восстановления (ПМВ) называется однородная двумерная цепь Маркова $(\kappa_n, \theta_n, n \geq 0)$, переходные вероятности которой задаются полумарковским ядром

$$Q(t, x, A) = P\{\kappa_{n+1} \in A, \theta_{n+1} \leq t | \kappa_n = x\}.$$

Первая компонента $(\kappa_n, n \geq 0)$ определяет состояние системы и образует вложенную цепь Маркова (ВЦМ) в фазовом пространстве состояний $(E, \mathcal{E})$ с переходными вероятностями

$$p(x, A) = Q(+\infty, x, A) = P\{\kappa_{n+1} \in A | \kappa_n = x\}.$$

Неотрицательные случайные величины θ_n , $n \geq 1$; $\theta_0 = 0$ определяют интервалы между изменениями состояний системы, имеющие функции распределения

$$G_x(t) = Q(t, x, E) = P\{\theta_{n+1} \leq t | \kappa_n = x\}.$$

Так что θ_{n+1} определяет время пребывания системы в состоянии κ_n . Времена пребывания в состояниях $\kappa_n = x$ удобно обозначать

$$G_x(t) = P\{\theta_x \leq t\}.$$

Обозначим через τ_n моменты восстановлений: $\tau_n = \sum_{k=1}^n \theta_k$, а через $\nu(t) = \max\{n : \tau_n \leq t\}$ — число восстановлений к моменту t . Тогда ПМВ (κ_n , θ_n , $n \geq 0$) задает полумарковский процесс (ПМП)

$$\kappa(t) = \kappa_{\nu(t)}$$

в фазовом пространстве состояний $(E, \mathcal{E})$, который описывает функционирование стохастической системы.

В частности, когда полумарковское ядро имеет вид

$$Q(t, x, A) = P(x, A) (1 - e^{-\lambda(x)t}),$$

соответствующий ПМП является однородным марковским процессом, у которого времена пребывания в состояниях распределены экспоненциально с параметром $\lambda(x) \geq 0$.

28.3.3. Описание функционирования стохастических систем. Функционирование стохастических систем, состоящих из независимо работающих элементов, каждый из которых описывается ПМВ, моделируется суперпозицией ПМВ.

Пусть задано конечное число N независимых ПМВ $\{\kappa_n^{(i)}, \theta_n^{(i)}, n \geq 0\}$, $i = 1, \dots, N$, в дискретных фазовых пространствах $E^{(i)}$ с полумарковскими матрицами

$$Q^{(i)}(t) = \{Q_{kr}^{(i)}(t), k, r \in E^{(i)}\}, i = 1, \dots, N.$$

Определим линейчатые компоненты

$$\gamma^{(i)}(t) = \inf\{v > t: \kappa^{(i)}(v) \neq \kappa^{(i)}(t)\} - t,$$

которые называются перескоками и определяют время, оставшееся после момента t до следующего ближайшего момента восстановления.

Введем:

$$\gamma(t) = \min_{1 \leq i \leq N} \gamma^{(i)}(t); \quad (28.1)$$

$$\xi^{(i)}(t) = \gamma^{(i)}(t) - \gamma(t), i = 1, \dots, N. \quad (28.2)$$

Моменты восстановления τ_n , $n \geq 1$, суперпозиции ПМВ определяются соотношением

$$\gamma(\tau_n - 0) = 0, n \geq 1.$$

Все моменты восстановления $\tau_n^{(i)}$, $n \geq 1$, $i = 1, \dots, N$, составляют суперпозицию ПМВ, и только они являются моментами восстановления τ_n .

Введем теперь полумарковские компоненты

$$\zeta_{n+1}^{(i)} = \gamma^{(i)}(\tau_n) - \gamma(\tau_n), n \geq 0, i = 1, \dots, N \quad (28.3)$$

и времена пребывания суперпозиции ПМВ

$$\theta_{n+1} = \gamma(\tau_n), n \geq 0.$$

Суперпозицией независимых ПМВ $\{\kappa_n^{(i)}, \theta_n^{(i)}, n \geq 0\}$, $i = 1, \dots, N$, называется ПМВ $\{\kappa_n, \xi_n, \theta_n, n \geq 1\}$ с компонентами

$$\kappa_n = \{\kappa_n^{(1)}, \kappa_n^{(2)}, \dots, \kappa_n^{(N)}\}, \xi_n = \{\xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}, \dots, \xi_n^{(N)}\}$$

в дискретно-непрерывном фазовом пространстве состояний.

Из определения $\gamma(t)$, τ_n и θ_n следует, что

$$\theta_{n+1} = \tau_{n+1} - \tau_n.$$

Для задания полумарковского ядра суперпозиции проще всего воспользоваться формулой для времен пребывания в состояниях на n -м шаге в виде

$$\theta_{k_1 k_2 \dots k_N x_1 x_2 \dots x_N} = \min (\theta_{k_\mu}^{(\mu)}, x), \quad x = \min_{i \neq \mu} x_i. \quad (28.4)$$

Индекс μ определяется соотношением $\zeta_n^{(\mu)} = x_\mu = 0$. Справедливость формулы (28.4) проще всего установить, используя содержательное определение времени пребывания θ_{kx} в состоянии $kx = k_1 k_2 \dots k_N x_1 x_2 \dots x_N$. Из (28.1) — (28.3) следует, что в каждом состоянии одна из компонент $\zeta_n^{(\mu)} = 0$, при этом $\tau_n = \tau_{n_\mu}^{(\mu)}$, т. е. в этом состоянии происходит восстановление в μ -м ПМВ. Ненулевые компоненты $\zeta_n^{(i)}$ фиксируют время после момента $\tau_{n_\mu}^{(\mu)}$ до ближайшего момента восстановления в

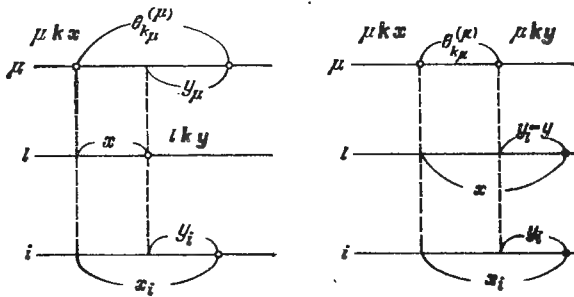


Рис. 28.4. Суперпозиция ПМВ

i -м ПМВ. Так что, если $\zeta_n^{(i)} = x_i > 0$, $i \neq \mu$, в момент τ_n и $\zeta_n^{(\mu)} = 0$, то следующий момент восстановления τ_{n+1} определяется минимумом x_i , $i \neq \mu$, и случайным временем пребывания $\theta_{k_\mu}^{(\mu)}$ в μ -м ПМВ, что и зафиксировано равенством (28.4).

Для удобства дальнейшей записи формул введем следующую формулу кодирования состояний:

μkx — означает код состояния $k_1 k_2 \dots k_N x_1 x_2 \dots x_N$ с $x_\mu = 0$.

Возможны переходы ВЦМ $\{\kappa_n, n \geq 1\}$ двух типов (рис. 28.4):

1. Переход из состояния μkx в состояние lky при $l \neq \mu$ в условиях:

$$x_l = x = \min_{i \neq \mu} x_i; \quad y_\mu \in dy; \quad k'_i = k_i, \quad i \neq l;$$

$$y_i = x_i - x, \quad i \neq \mu.$$

(Запись $y_\mu \in dy$ означает, что y_μ принадлежит окрестности точки $y: y \leq y_\mu < y + dy$.)

2. Переход из состояния μkx в состояния μky в условиях:

$$x_l = x = \min_{i \neq \mu} x_i; \quad y_l \in dy; \quad k'_i = k_i, \quad i \neq \mu;$$

$$y_i \in x_i - x + dy, \quad i \neq \mu, l.$$

Вероятности перехода ВЦМ $\{\kappa_n, n \geq 1\}$ вычисляются по формулам:

$$p_{\mu kx}^{lk'y} = P \{ \kappa_{n+1}^{(l)} = k'_i, \theta_{k_\mu}^{(\mu)} \in x + dy | \kappa_n^{(l)} = k_l \} = p_{k_l k_i}^{(l)} G_{k_\mu}^{(\mu)}(x + dy);$$

$$p_{\mu kx}^{\mu ky} = P \{ \kappa_{n+1}^{(\mu)} = k'_\mu, \theta_{k_\mu}^{(\mu)} \in x - dy | \kappa_n^{(\mu)} = k_\mu \} = p_{k_\mu k_\mu}^{(\mu)} G_{k_\mu}^{(\mu)}(x - dy).$$

ВЦМ суперпозиции ПМВ имеет стационарное распределение (в условиях эргодичности ВЦМ компонент $\{\kappa_n^{(\mu)}, n \geq 0\}$, $\mu = 1, \dots, N$), плотности которого выражаются формулой

$$\rho(\mu k x) = \rho_0 \prod_{i=1}^N \rho_{k_i}^{(i)} \prod_{j \neq \mu} \bar{G}_{k_j}^{(j)}(x_j), \quad (28.5)$$

где $\{\rho_{k_i}^{(i)}, k_i \in E^{(i)}\}$ — стационарные распределения ВЦМ $\{\kappa_n^{(i)}, n \geq 0\}$, $i = 1, \dots, N$, составляющих суперпозицию ПМВ; $\bar{G}_{k_j}^{(j)}(x_j) = 1 - G_{k_j}^{(j)}(x_j)$. Нормирующая константа ρ_0 определяется соотношением

$$\rho_0 = \left[\sum_{\mu=1}^N \sum_{k_i \in E^{(i)}} \prod_{i=1}^N \rho_{k_i}^{(i)} \prod_{j \neq \mu} M \theta_{k_j}^{(j)} \right]^{-1},$$

$$i = 1, \dots, N.$$

Распределения времен пребывания в состояниях имеют вид

$$G_{\mu k x}(t) = P\{\theta_{\mu k x} \leq t\} = \begin{cases} G_{k_\mu}^{(\mu)}(t), & t < x, \\ 1, & t \geq x. \end{cases}$$

Здесь x определяется соотношением (28.4).

Наконец, полумарковское ядро суперпозиции конечного числа независимых ПМВ определяется из следующих соображений. При переходе из состояния μk в состояние $l k'$, $l \neq \mu$, время пребывания в состоянии $\mu k x$ равно x . А при переходе из $\mu k x$ в $l k' y$ время пребывания в состоянии $\mu k x$ равно $x - y$ (см. рис. 28.4). Иначе говоря, на переходах ВЦМ времена пребывания в состояниях — детерминированные величины.

Наличие стационарного распределения (28.5) суперпозиции ПМВ дает возможность применять алгоритмы фазового укрупнения (АФУ) для упрощенного анализа многокомпонентных полумарковских систем.

28.3.4. Алгоритм фазового укрупнения. Основная трудность при моделировании и анализе стохастических систем посредством ПМВ проявляется в существенном усложнении фазового пространства состояний полумарковской модели. Наиболее радикальный подход к преодолению сложности анализа реальных систем состоит в построении более простых (укрупненных) моделей, анализ которых существенно проще анализа исходных математических моделей, а основные характеристики укрупненных моделей могут быть использованы в качестве характеристик исходных моделей.

Алгоритмы фазового укрупнения состояний полумарковских систем основаны на эвристической идее, опирающейся на предельные теоремы, и имеют реальную практическую интерпретацию. Основные математические предположения, при которых применимы АФУ, состоят в следующем.

1. Реальная исходная система описывается ПМВ $(\kappa_n, \theta_n, n \geq 0)$ в фазовом пространстве E с полумарковским ядром

$$Q(t, x, A) = P\{\kappa_{n+1} \in A, \theta_{n+1} \leq t | \kappa_n = x\}.$$

2. Реальная система близка к некоторой опорной системе, функционирование которой описывается ПМВ $(\kappa_n^0, \theta_n^0, n \geq 0)$ в фазовом пространстве $E^0 \subset E$ с полумарковским ядром $Q^0(t, x, A)$. При этом ВЦМ $(\kappa_n^0, n \geq 0)$, задаваемая стохастическим ядром $P^0(x, A) = Q^0(+\infty, x, A)$, — эргодическая со стационарным вероятностным распределением $\rho(A)$:

$$\rho(A) = \int_{E^0} \rho(dx) P^0(x, A), \quad \rho(E^0) = 1.$$

Близость реальной и опорной систем может быть оценена, например, параметром

$$\rho^* = \sup_{A \in \mathcal{G}^0} |\rho(A) - \int_{E^0} \rho(dx) P(x, A)|.$$

3. Фазовое пространство состояний E реальной системы представимо в виде

$$E = E^0 \cup E' \cup e_0, \quad (28.6)$$

где E^0 — класс рабочих (устойчивых) состояний реальной системы; e_0 — класс поглощающих состояний реальной ВЦМ, соответствующий состояниям отказа реальной системы; $E^1 = E_1^1 \cup E_2^1 \cup \dots \cup E_m^1$ — совокупность невозвратных состояний опорной ВЦМ. Невозвратные состояния опорной ВЦМ назовем восстанавливаемыми состояниями реальной системы; в этих еще работоспособных состояниях происходит восстановление рабочих функций системы (путем восстановления,

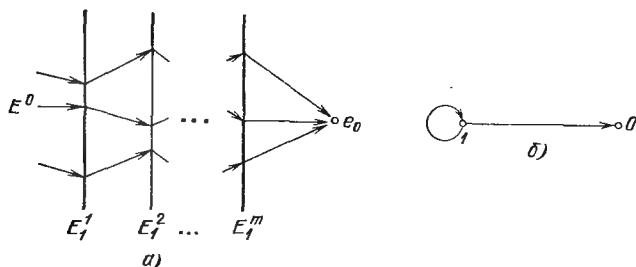


Рис. 28.5. Граф переходов:
а) реальной, б) укрупненной системы

ремонта, резервирования отдельных элементов системы и т. п.). При этом реальная ВЦМ из класса E^0 в состояние e_0 переходит только по цепочкам невозвратных состояний:

$$P(x, E_1^1) \geq 0, P(x, E_k^1) = 0, 2 \leq k \leq m, x \in E^0;$$

$$P(x, E_k^1) = 0, x \in E_\mu^1, \mu \leq k-2, 2 < k \leq m;$$

$$q = \int_{E^0} \rho(dx) \int_{E_1^1} \dots \int_{E_m^1} P(x, dx_1) \dots P(x_{m-1}, dx_m) P(x_m, e_0) > 0. \quad (28.7)$$

Равенство (28.7) выражает известный в теории надежности восстанавливаемых систем принцип минимальных (монотонных) траекторий. Граф возможных переходов реальной системы изображен на рис. 28.5, а.

4. Средние времена пребывания в состояниях

$$m(x) = M\theta_x = \int_0^\infty [1 - G_x(t)] dx \quad (28.8)$$

ограничены.

Примечание. Кроме того, требуется дополнительно выполнение естественных условий регулярности функций распределения $G_x(t)$, как правило имеющих место в конкретных приложениях. Например, достаточно требовать, чтобы функции распределения наработок на отказ были типа «стареющих».

Укрупненная система в простейшем случае определяется в фазовом пространстве состояний $\tilde{E} = \{1, 0\}$, содержащем два состояния: 1 — работоспособности, 0 — поглощающее состояние отказа. Граф переходов укрупненной системы представлен на рис. 28.5, б.

Процесс марковского восстановления ($\tilde{x}_n, \tilde{\theta}_n, n \geq 0$), описывающий укрупненную систему, задается полумарковской матрицей $\tilde{\theta}(t) = \{\tilde{Q}_{ij}(t), i, j = 0, 1\}$, элементы которой выражаются по формулам:

$$\tilde{Q}_{ij}(t) = p_{ij}(1 - e^{-\Lambda_i t}), i, j = 0, 1; \quad (28.9)$$

$$p_{10} = P\{\tilde{x}_{n+1} = 0 | x = 1\} = 1 - p_{11} = q, \quad p_{00} = 1, \quad (28.10)$$

где q вычисляется по формуле (28.7);

$$\Lambda_1 = 1/\tilde{m}, \quad \tilde{m} = \int_{E^0} \rho(dx) m(x). \quad (28.11)$$

Таким образом, укрупненный процесс $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_{\tilde{v}(t)}$ является марковским с двумя состояниями: 1 и 0. В рабочем состоянии 1 время пребывания распределено по экспоненциальному закону с параметром Λ_1 (см. (28.11)), а вероятность перехода в поглощающее состояние $\hat{p}_{10} = q$ определяется формулой (28.7), которая выделяет основную часть вероятности поглощения реальной ВЦМ по минимальному пути.

Для укрупненной системы случайное время безотказной работы $\tilde{\xi}$, т. е. время пребывания укрупненного ПМВ в рабочем состоянии 1 до поглощения в 0, определяется формулой

$$\tilde{\xi} = \sum_{k=1}^{\tilde{v}} \tilde{\theta}_k, \quad (28.12)$$

где $\tilde{v}$ распределено геометрически с параметром q :

$$P\{\tilde{v} = k\} = (1 - q)q^{k-1}, k \geq 1. \quad (28.13)$$

Случайные величины $\tilde{\theta}_k$ независимы между собой и от $\tilde{v}$ и распределены экспоненциально с одинаковым параметром Λ_1 . Из (28.12) и (28.13) следует, что время безотказной работы $\tilde{\xi}$ распределено по экспоненциальному закону:

$$P\{\tilde{\xi} > t\} = e^{-\Lambda t}, \quad \Lambda = q/\tilde{m}. \quad (28.14)$$

Здесь $\tilde{q}$ и $\tilde{m}$ определяются формулами (28.7) и (28.11).

Применение формул (28.7) — (28.14) для исходной реальной системы состоит в том, что времена пребывания ξ_x исходной системы в классе работоспособных состояний E^0 с начальным состоянием x принимается приближенно равным времени пребывания $\tilde{\xi}$ укрупненной системы в состоянии 1:

$$P\{\xi_x > t\} \simeq e^{-\Lambda t}.$$

Формулы (28.7), (28.11) и (28.14) задают АФУ: реальная полумарковская система в фазовом пространстве состояний E укрупняется до марковской системы в фазовом пространстве $\tilde{E} = \{1, 0\}$.

В частности, если невозвратные состояния класса E^1 отсутствуют в опорной системе, тогда упрощается вычисление вероятности отказа укрупненной системы. В этом случае вместо (28.7) вероятность отказа вычисляется по формуле

$$q = \int_{E^0} \rho(dx) P(x, e_0). \quad (28.15)$$

Приведенный здесь АФУ является одним из простейших, однако широко применяемым в анализе надежности стохастических систем.

Пример 28.2. Рассмотрим систему с двумя основными и одним резервным элементом и одним восстанавливающим устройством. Пусть: ξ_1 и ξ_2 — наработки на отказ элементов с функциями распределения $F_1(t)$ и $F_2(t)$ и плотностями $f_1(t)$ и $f_2(t)$ соответственно; η — время восстановления с функцией распределения $G(t)$ и плотностью $g(t)$. В работоспособной системе одновременно и независимо работают два элемента, отказавший элемент восстанавливается, а вместо него включается резервный. Система отказывает, если наступает отказ одного из основных элементов до окончания восстановления отказавшего перед этим элемента (т. е. при отсутствии работоспособного резерва).

Требуется определить показатели надежности системы.

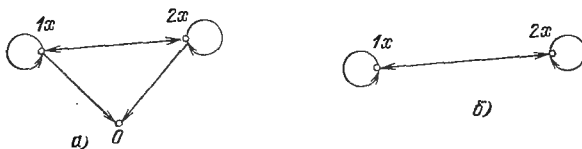


Рис. 28.6. Граф переходов ВЦМ:

а) исходной, б) опорной системы

Решение. Введем полумарковские состояния: $1x$ ($2x$) — в момент отказа 1-го (2-го) элемента оставшееся время до отказа 2-го (1-го) элемента равно x ; восстанавливающее устройство свободно; 0 — в момент отказа основного элемента восстанавливающее устройство занято.

Длительности пребывания в рабочих состояниях:

$$\theta_{1x} = \xi_1 \wedge x; \quad \theta_{2x} = \xi_2 \wedge x.$$

Вероятность перехода ВЦМ в отказовое состояние

$$p_{kx} = P(\eta > \xi_k \wedge x) = \bar{F}_k(x) \bar{G}(x) + \int_0^x \bar{G}(y) \bar{f}_k(y) dy, \quad k=1,2. \quad (28.16)$$

Граф переходов ВЦМ реальной системы изображен на рис. 28.6, а.

В условиях быстрого восстановления в качестве опорной системы определим систему с мгновенным восстановлением: $\eta = 0$; $G(t) = 1$, $t > 0$. Граф переходов ВЦМ опорной системы изображен на рис. 28.6, б.

Плотности вероятностей перехода опорной ВЦМ:

$$p_{1x}^1 = f_1(x-y), \quad p_{1x}^2 = f_1(x+y);$$

$$p_{2x}^1 = f_2(x+y), \quad p_{2x}^2 = f_2(x-y).$$

Стационарное распределение опорной ВЦМ

$$\rho_{1x} = \rho \bar{F}_2(x); \quad \rho_{2x} = \rho \bar{F}_1(x), \quad \rho = [a_1 + a_2]^{-1}. \quad (28.17)$$

Здесь

$$a_k = M\xi_k = \int_0^\infty \bar{F}_k(x) dx, \quad k=1,2. \quad (28.18)$$

Применение АФУ, т. е. формул (28.11), (28.14), (28.15) с учетом (28.16)—(28.18) дает следующий результат: наработка на отказ реальной системы с быстрым восстановлением распределена экспоненциально с параметром

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad \Lambda_1 = \frac{P\{\eta > \xi_1 \wedge \xi_2^*\}}{a_1},$$

$$\Lambda_2 = \frac{P\{\eta > \xi_1^* \wedge \xi_2\}}{a_2}. \quad (28.19)$$

Здесь ξ_k^* — предельные величины перескока в процессе восстановления со скачками ξ_h :

$$P\{\xi_k^* > x\} = \bar{F}_k^*(x) = (a_k)^{-1} \int_x^\infty \bar{F}_k(y) dy, \quad a_k = M\xi_k, \quad k = 1, 2.$$

Пример 28.3. Рассмотрим систему из трех параллельно соединенных приборов с неограниченным восстановлением. Положим

$$k_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й элемент исправен,} \\ 0, & \text{если } i\text{-й элемент восстанавливается.} \end{cases}$$

Полумарковские состояния: μkx , где $\mu = 1, 2, 3$; $k = k_1 k_2 k_3$; $x = x_1 x_2 x_3$, и $x_\mu = 0$. Например, $2110x_1 0x_2$ означает, что первый элемент исправен и отказ наступает через время x_1 , второй начал функционировать после восстановления, третий элемент восстанавливается и до конца восстановления остается время x_3 .

Решение. Времена пребывания в состояниях вычисляются по формуле (28.4). Согласно (28.6):

$$e_0 = \{\mu 0x, \mu = 1, 2, 3\},$$

где $0 = (000)$;

$$E^1 = \{\mu kx, k_1 + k_2 + k_3 = 1\}; \quad E^0 = \{\mu kx, k_1 + k_2 + k_3 \geq 2\}.$$

Нетрудно заметить, что число физических состояний системы $24 = 3 \cdot 2^3$. Опорный процесс получается, если положить в соответствующих формулах функции распределения $G_0^{(i)}(x)$ времен восстановления равными

$$G_0^{(i)}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, 3.$$

Согласно (28.5) стационарное распределение ВЦМ для опорного процесса имеет плотность

$$\rho(\mu kx) = \rho_0 \prod_{i \neq \mu} G_1^{(i)}(x_i). \quad (28.20)$$

Применение АФУ, т. е. в данном случае формул (28.7), (28.11) и (28.14) с учетом (28.20), дает следующий результат: наработка на отказ системы с быстрым восстановлением распределена экспоненциально с параметром

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3,$$

$$\text{где } \Lambda_1 = \frac{1}{a_1} [P\{\xi_2^* < \xi_3^* < \eta_1 \wedge (\xi_2^* + \eta_2)\} +$$

$$+ P\{\xi_3^* < \xi_2^* < \eta_1 \wedge (\xi_3^* + \eta_3)\}],$$

$$P\{\xi_k^* > t\} = (a_k)^{-1} \int_t^\infty \bar{F}_k(u) du, \quad a_k = M\xi_k;$$

ξ_k — время безотказной работы k -го элемента; η_k — время восстановления k -го элемента, $k = 1, 2, 3$; Λ_2 и Λ_3 получаются аналогично перестановкой индексов.

28.4.1. Предварительные замечания. Обычно при вычислении нестационарных характеристик надежности сложных систем с восстановлением, связанных со временем до первого отказа системы, предполагается, что поведение элементов системы и восстанавливающих устройств может быть описано полумарковским процессом с конечным числом состояний E_+ . В этом случае расчет характеристик надежности является стандартной задачей о времени пребывания полумарковского процесса во множестве E_+ . Однако на самом деле поведение сложных систем с восстановлением на всем интервале времени $[0, \infty)$ лишь в нескольких исключительных и довольно тривиальных случаях удается описать полумарковским процессом. Здесь применение находят так называемые полурегенерирующие процессы, или полумарковские процессы со вспомогательными траекториями, а также их обобщение — процессы с вложенными точками (ПВТ).

Известно, что расчет таких нестационарных характеристик надежности, как коэффициента готовности $K(t)$ и коэффициента оперативной готовности $R(t, t_0)$, сопряжен с большими трудностями даже для марковских моделей.

Ниже излагается общий подход к расчету стационарных коэффициентов готовности K , коэффициента оперативной готовности $R(t_0)$, вероятностей состояний p_n , распределений наработки на отказ ξ и времени восстановления η и, в частности, их средних. Этот подход основан на использовании стационарных ПВТ и является обобщением известного метода Кендалла — Хинчина вложенных цепей Маркова.

28.4.2. Моделирование систем с помощью ПВТ. Рассмотрим некоторую систему с восстановлением и обозначим через E (конечное) множество ее состояний. Предположим, что $E = E_+ \cup E_-$, где E_+ и E_- — соответственно подмножества состояний работоспособности и отказа системы. Например, для дублированной системы из одинаковых элементов с одним восстанавливающим устройством, если состояние j означает, что отказало ровно j элементов, то $E = \{0, 1, 2\}$, $E_+ = \{0, 1\}$.

Поведение системы на интервале времени $[0, \infty)$ задается случайным процессом $Z(t)$, $t \geq 0$, с пространством состояний E . Процесс $Z(t)$ меняется лишь скачкообразно, причем каждый скачок обусловлен отказом или завершением восстановления одного из элементов системы. Будем предполагать траектории процесса $Z(t)$ непрерывными справа. Изучение процесса $Z(t)$ существенно облегчается введением соответствующим образом подобранной последовательности вложенных точек.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $Z(t)$ — случайный процесс с пространством состояний E , а $\{T_n\}$ — последовательность случайных величин, удовлетворяющая с вероятностью 1 условию

$$0 = T_1 < T_2 < \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty,$$

причем $Z(t)$ и $\{T_n\}$ определены на одном и том же вероятностном пространстве. Тогда пара $[Z(t), \{T_n\}]$ называется процессом с вложенными точками $T_1, T_2, \dots$

Обычно вложенные точки T_n определяются самим процессом $Z(t)$, т. е. поведением рассматриваемой системы. Например, T_n могут быть моментами пересечения процессом $Z(t)$ некоторого заданного уровня или моментами вхождения процесса $Z(t)$ в некоторое заданное подмножество $C \subset E$ (если $C = E_-$, то T_n будут моментами отказов системы). Однако T_n могут быть и моментами «вмешательства извне», например моментами изменения режима, в котором работает система, и т. д.; фраза «на одном и том же вероятностном пространстве» означает лишь, что $Z(t)$ и $\{T_n\}$ соответствуют одному и тому же случайному явлению.

Вложенные точки разбивают процесс $Z(t)$ на циклы $(Z_n(t), 0 \leq t < L_n)$, где $L_n = T_{n+1} - T_n$ — длина n -го цикла, а

$$Z_n(t) = Z(T_n + t), 0 \leq t < L_n, \quad (28.21)$$

— его «содержание». Простейшим примером ПВТ являются регенерирующие процессы, у которых все циклы независимы, а при $n > 1$ одинаково распределены. В этом случае T_n называют точками регенерации. При этом весь процесс определяется начальным циклом $(Z_0(t), 0 \leq t < L_0)$ и «порождающим» циклом $(Z_1(t), 0 \leq t < L_1)$. Напомним о двух очень важных частных случаях регенерирующих процессов с заданным порождающим циклом $(Z_1(t), 0 \leq t < L_1)$, а именно о синхронном регенерирующем процессе, у которого начальный цикл имеет то же распределение, что и порождающий, и о стационарном регенерирующем процессе,

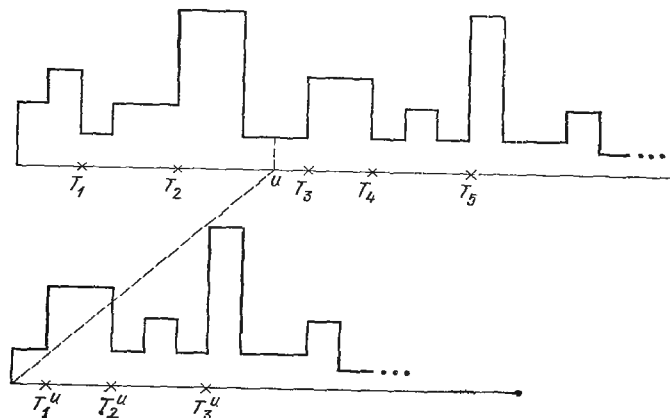


Рис. 28.7. Иллюстрация операции переноса координат

распределение начального цикла которого полностью определено распределением порождающего цикла. Оказывается, что этот факт может быть обобщен и на случай ПВТ, когда уже никаких предположений о независимости циклов не делается.

Определим для ПВТ операцию сдвига $S_u, u \geq 0$:

$$S_u[(Z(t)), (T_n)] = [(Z(t+u)), (T_n^u, n \geq 0)],$$

$$\text{где } T_0^u = 0, T_n^u = T_{n+N(u)} - u, N(u) = \max\{j: T_j \leq u\}.$$

Наглядное представление об этой операции как о переносе начала координат в точку u следует из рис. 28.7.

О п р е д е л е н и е 2. Процесс с вложенными точками $[(Z(t)), (T_n)]$ называется стационарным, если для любого $u \geq 0$ сдвинутый ПВТ $S_u[(Z(t)), (T_n)]$ имеет то же распределение P , что и $[(Z(t)), (T_n)]$. Процесс с вложенными точками $[(\tilde{Z}(t)), (\tilde{T}_n)]$ называется синхронным, если его циклы $(\tilde{Z}_n(t), 0 \leq t < \tilde{L}_n)$, $n \geq 0$, образуют (как случайные элементы некоторого функционального пространства) строго стационарную последовательность, а средняя длина Δ произвольного цикла конечна.

Следует отметить, что синхронность ПВТ $[(\tilde{Z}(t)), (\tilde{T}_n)]$ эквивалентна его инвариантности относительно сдвигов по случайной «вложенной оси» $(\tilde{T}_n)$, т. е. для любого $j \geq 1$ сдвинутый ПВТ $[(\tilde{Z}(t + \tilde{T}_j)), (\tilde{T}_{n+j} - \tilde{T}_j, n \geq 0)]$ имеет то же распределение $\hat{P}$, что и $[(\tilde{Z}(t)), (\tilde{T}_n)]$. На первый взгляд стационарные и синхронные ПВТ представляются весьма различными объектами, однако между ними существует тесная связь.

У т в е р ж д е н и е 1. Каждому синхронному ПВТ соответствует взаимно-однозначно некоторый стационарный ПВТ (с точностью до эквивалентности). В частности, если $[(\tilde{Z}(t)), (\tilde{T}_n)]$ — синхронный ПВТ с законом распределения $\tilde{P}$ и средней длиной цикла Δ , то закон распределения P соответствующего стационарного ПВТ $[Z(t)), (T_n)]$ определяется формулой

$$P((Z(t), t \geq 0) \in (\cdot)) = \frac{1}{\Delta} \int_0^{\infty} \tilde{P}(\tilde{L}_0 > u, (\tilde{Z}(t+u), t \geq 0) \in (\cdot)) du, \quad (28.22)$$

где $(\cdot)$ — произвольное событие (утверждение о процессе).

Для одномерных распределений из (28.22) следует

$$P(Z(0) \in C) = \frac{1}{\Delta} \int_0^{\infty} \tilde{P}(\tilde{L}_0 > u, \tilde{Z}(u) \in C) du. \quad (28.23)$$

Это утверждение эквивалентно следующему: для любой неотрицательной функции g на E

$$M_p g(Z(0)) = \frac{1}{\Delta} M_{\tilde{p}} \left(\int_0^{L_0} g(\tilde{Z}(u)) du \right). \quad (28.24)$$

В частном случае регенерирующих процессов формулы (28.23) и (28.24) общеизвестны.

Следующее утверждение дополняет утверждение 1. Оно показывает, что распределение P стационарного ПВТ является предельным для соответствующего синхронного ПВТ, и наоборот.

У т в е р ж д е н и е 2. Пусть для заданного синхронного ПВТ справедлив закон больших чисел $\tilde{P}(\frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{T}_n = \Delta) = 1$. Тогда для любого $C \subseteq E$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \tilde{P}(\tilde{Z}(u) \in C) du = P(Z(0) \in C); \quad (28.25)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P(Z(T_j) \in C) = \tilde{P}(\tilde{Z}(0) \in C).$$

Для частного случая регенерирующих процессов (28.25) является общеизвестной эргодической теоремой, в которой для случая нерешетчатой функции распределения $\tilde{P}(\tilde{L}_0 \leq t)$ левую часть можно заменить на $\lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{P}(\tilde{Z}(u) \in C))$.

Из утверждений 1 и 2 следует, что поведение одной и той же системы в стационарном режиме можно описать связанными друг с другом в смысле этих утверждений синхронным и стационарным ПВТ. В первом случае начало координат совпадает с произвольной вложенной точкой. Во втором случае начало координат является произвольной точкой на временной оси. Покажем на примерах, что для заданной системы обычно легче построить синхронный ПВТ, описывающий ее поведение, и рассчитать затем по формулам (28.22) — (28.24) характеристики соответствующего стационарного процесса $Z(t)$. При этом внешний вид формул от выбора вложенных точек, т. е. выбора синхронной модели, не зависит. Тем самым можно выбрать для каждой конкретной задачи наиболее удобный вариант синхронной модели. Простейшими примерами являются марковские и полумарковские процессы. Рассмотрим следующее весьма простое, но чрезвычайно важное для приложений обобщение полумарковских процессов — полурегенерирующие процессы. Пусть $e = \{0, \dots, l\}$ — некоторое подмножество E , а $Z(t)$ — случайный про-

цесс с пространством состояний E . В качестве вложенных точек рассмотрим точки T_n , для которых случайная величина $Z_n = Z(T_n + 0)$ принимает значение в e .

О п р е д е л е н и е 3. Процесс с вложенными точками $\{(Z(t)), (T_n)\}$ называется полурегенерирующим, если его циклы $(Z_n(t), 0 \leq t < L_n)$ образуют однородную цепь Маркова, у которой:

$$P(Z_n = j, (Z_n(t), 0 \leq t < L_n) \in C | Z_{n-1} = i, (Z_{n-1}(t), 0 \leq t < L_{n-1})) = q_{ij} Q_j(C); \quad (28.26)$$

$$q_{ij} = P(Z_n = j | Z_{n-1} = i),$$

$$Q_j(C) = P((Z_n(t), 0 \leq t < L_n) \in C | Z_n = j). \quad (28.27)$$

Таким образом, полурегенерирующий процесс — это процесс с $l + 1$ типами точек регенерации, причем распределение n -го цикла зависит от типа Z_n точки T_n , а переходы между типами управляются цепью Маркова с матрицей переходных вероятностей (q_{ij}) . Для полного определения полурегенерирующего процесса нужно еще задать его начальное распределение

$$q_j = P(Z_0 = j), Q'_j(C) = P((Z_0(t), 0 \leq t < L_0) \in C | Z_0 = j). \quad (28.28)$$

Если имеет место $Z_n(t) = Z_n, 0 \leq t < t_n$, а $e = E$, то мы получаем полумарковский процесс с функциями распределения времен пребывания типа $F_{ij}(t) = F_i(t)$. В общем случае мы имеем процесс марковского восстановления $\{T_n, Z_n\}$ с вложенными вспомогательными траекториями $(Z_n(t), 0 \leq t < L_n)$.

Пусть вложенная цепь Маркова (Z_n) имеет единственное стационарное распределение P_j . Тогда для параметров (28.26) и (28.27) существует единственным образом определенный синхронный полурегенерирующий процесс $\{(\tilde{Z}(t)), (\tilde{T}_n)\}$, который получается, если в (28.28) положить $q_j = \hat{P}_j$ и $Q'_j(C) = Q_j(C)$. Для соответствующего стационарного полурегенерирующего процесса, в частности, по формуле (28.24) имеем при $1_{(j)}(x) = \delta_{xj}$ (δ_{xj} — символ Кронекера)

$$P_j = \tilde{P}_j (1/\Delta) M_{\tilde{F}} \left(\int_0^{L_0} 1_{(j)}(\tilde{Z}(t)) | \tilde{Z}(0) = j dt \right), \quad j \in K,$$

где

$$\Delta = \sum_{i \in K} \tilde{P}_i \Delta_i, \quad \Delta_i = \int_0^{\infty} \bar{F}_i(t) dt, \quad F_i(t) = Q_i(L_0 \leq t),$$

что в полумарковском случае приводит к известной формуле

$$P_j = \tilde{P}_j \Delta_j \left(\sum_{i \in E} \tilde{P}_i \Delta_i \right)^{-1}, \quad j \in E.$$

У т в е р ж д е н и е 3. Для полурегенерирующего процесса $Z_a(t)$ с параметрами (28.26) и (28.27) и произвольным начальным условием (28.28) имеет место утверждение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P(Z_a(u) \in C) du = P(C) = \sum_{j \in C} P_j.$$

В теории надежности полурегенерирующие процессы встречаются для случая $e = E_+$, причем поведение системы в подмножестве E_+ определяется полумарковским процессом.

Отметим, что приведенные в этом разделе результаты для ПВТ справедливы и для более общих пространств E .

20.4.3. Расчет стационарных характеристик надежности систем. Рассмотрим некоторую систему с восстановлением и предположим, что в момент $t = 0$ она уже

находясь в стационарном режиме. Тогда при заданном правиле выбора вложенных точек $(\tilde{T}_n)$ мы можем описать ее поведение на $[0, \infty)$ синхронным процессом $[(\tilde{Z}(t)), (\tilde{T}_n)]$. При этом будем полагать, что

$$Z(\tilde{T}_n + 0) \in E \text{ и } Z(\tilde{T}_n + 0) \neq Z(\tilde{T}_n - 0).$$

Наиболее естественным условием, накладываемым на $Z(\tilde{T}_n)$, является:

$$Z(\tilde{T}_n - 0) \in E_-; \quad Z(\tilde{T}_n + 0) \in E_+. \quad (28.29)$$

Длина n -го цикла $\tilde{L}_n = \xi_n + \eta_n$, где ξ_n (η_n) — время пребывания системы в состоянии работоспособности (отказа) в течение n -го цикла. Вследствие стационарности последовательности циклов индекс n можно опустить. Величину L мы будем называть средней длиной цикла. Величины T и τ обозначают среднюю наработку и среднее время восстановления. Функции распределения наработки на отказ ξ и времени восстановления η обозначим через $F(t) = \tilde{P}(\xi \leq t)$ и $G(t) = \tilde{P}(\eta \leq t)$.

Пусть $[(Z(t)), (T_n)]$ — соответствующий $[(\tilde{Z}(t)), (\tilde{T}_n)]$ стационарный ПВТ. Тогда вероятность $K = P(Z(0) \in E_+)$ назовем стационарным коэффициентом готовности, а

$$R(t_0) = P(Z(u) \in E_+, 0 \leq u \leq t_0),$$

— стационарным коэффициентом оперативной готовности. Вероятности

$$p_i = P(Z(0) = j); \quad \tilde{p}_i = P(\tilde{Z}(0) = j), \quad j \in E,$$

будем называть стационарной вероятностью состояния j и вложенной стационарной вероятностью состояния j соответственно.

У т в е р ж д е н и е 4. Стационарный коэффициент готовности и стационарный коэффициент оперативной готовности определяются формулами:

$$K = T/L = T/(T + \tau); \quad (28.30)$$

$$R(t_0) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^{\infty} \tilde{P}(\xi > u) du = \frac{1}{L} \int_{t_0}^{\infty} \bar{F}(u) du. \quad (28.31)$$

Формулу (28.31) можно переписать в следующем виде:

$$R(t_0) = K \bar{F}_R(t),$$

где $\bar{F}_R(t)$ — стационарное распределение остаточного времени безотказной работы ξ_R , определяемое как

$$\bar{F}_R(t) = \frac{1}{T} \int_t^{\infty} \bar{F}(u) du.$$

Отметим, что формулы (28.30), (28.31) внешне полностью совпадают с формулами для соответствующих характеристик надежности простой восстанавливаемой системы. Однако существенная разница заключается в том, что в последнем частном случае правые стороны формул нам известны, тогда как в общем случае их нужно сначала определить, что может быть трудным или даже невозможным.

Чтобы получить формулы для стационарных вероятностей состояний p_j , воспользуемся другой последовательностью вложенных точек. Пусть сначала любой момент изменения состояния системы будет вложенной точкой. Обозначим через $[(Z'(t)), (T'_n)]$ соответствующий синхронный ПВТ. Пусть: $\Delta'_j = M_p \cdot (L'_0 | Z'(0) = j)$, $p'_j = P'(Z'(0) = j)$ и $\Delta' = \sum_{j \in E} p'_j$, $\Delta'_j = M_{p'} \cdot L'$.

Тогда по формуле (28.24) имеем

$$p_j = P(Z(0) = j) = \frac{1}{\Delta'} M_{p'} \left(\int_0^{L'_0} 1_{(j)}(Z'(t)) dt \right) = p'_j \Delta_j \left/ \sum_{i \in E} p'_i \Delta'_i \right. \quad (28.32)$$

Отметим, что (28.32) совпадает с соответствующей формулой для стационарных вероятностей состояний полумарковского процесса, но с той лишь разницей, что величины p'_j, Δ'_j неизвестны.

Иную формулу для стационарных вероятностей $p_j, j \in e \subseteq E$, получим, рассмотрев синхронный ПВТ $\{Z''(t), (T''_n)\}$, причем (T''_n) включает в себя все точки входа процесса в подмножество e . Тогда, соответственно изменив обозначения, по формуле (28.24) получим

$$p_j = \frac{1}{M_{p''}(L'')} p''_j \Delta''_j, \quad j \in e, \quad (28.33)$$

где $p''_j = P''(Z''(0) = j)$;

$$\Delta''_j M_{p''} \left(\int_0^{L''_0} 1_{(j)}(Z''(t)) dt \mid Z''(0) = j \right)$$

— среднее время пребывания в состоянии j , если система стартует в момент $t=0$ в состоянии j .

Рассмотрим применение предлагаемого метода расчета стационарных характеристик надежности на нескольких типовых примерах.

Пример 28.4. Рассмотрим систему с монотонной структурой и индивидуальным восстановлением, состоящую из n независимых элементов, каждый из которых имеет свое восстанавливающее устройство.

Решение. Пусть φ обозначает структурную функцию, а h — функцию надежности системы. Множество E состоит из всех двоичных векторов e , а $E_+ = \{e : e \in E, \varphi(e) = 1\}$. Предположим, что в момент $t = 0$ система уже находится в стационарном режиме. Тогда поведение i -го элемента описывается стационарным двоичным процессом $Z^{(i)}(t)$ и соответствующим ему (по утверждению 1) синхронным процессом $\widehat{Z}^{(i)}(t)$ с циклами вида

$$Z_m^{(i)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t < \xi_m^{(i)}, \\ 0 & \text{при } \xi_m^{(i)} \leq t < \xi_m^{(i)} + \eta_m^{(i)}, \quad m \geq 0, \end{cases}$$

где $(\xi_m^{(i)}, \eta_m^{(i)})$ — последовательности времени безотказной работы и восстановления i -го элемента.

Поведение всей системы задается стационарным векторным процессом

$$Z(t) = [Z^{(1)}(t), \dots, Z^{(n)}(t)].$$

Соответствующий $Z(t)$ синхронный процесс запишем в виде $\widetilde{Z}(t) = [\widetilde{Z}^{(1)}(t), \dots, \widetilde{Z}^{(n)}(t)]$. Его вложенные точки $\widetilde{T}_m$ определяются согласно (28.29) условием:

$$\varphi(\widetilde{Z}(\widetilde{T}_m + 0)) = 1, \quad \varphi(\widetilde{Z}(\widetilde{T}_m - 0)) = 0.$$

Отметим, что двоичные процессы $\widehat{Z}^{(i)}(t)$ и $\widetilde{Z}^{(i)}(t)$ не совпадают. Пусть: $T_i = M\xi_m^{(i)}$; $\tau_i = M\eta_m^{(i)}$, $m \geq 0$. Тогда для коэффициента готовности i -го элемента по формуле (28.30) имеем

$$P(Z^{(i)}(0) = 1) = T_i / (T_i + \tau_i) = K_i.$$

Коэффициент готовности системы

$$K = P(\varphi(Z(0) = 1)) = h(K_1, \dots, K_m)$$

и согласно утверждению 2

$$K = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P(\varphi(\widehat{Z}(u))) du.$$

Средняя наработка на отказ

$$T = \lambda^{-1} h(K_1, \dots, K_n),$$

$$\begin{aligned} \lambda = & \sum_{i=1}^n \lambda_i (h(K_1, \dots, K_{i-1}, 1, A_{i+1}, \dots, A_n) - \\ & - h(A_1, \dots, A_{i-1}, 0, A_{i+1}, \dots, A_n)), \\ & \lambda_i = (T_i + \tau_i)^{-1}, i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

При этом λ имеет смысл интенсивности отказов. Для среднего времени восстановления

$$M_{\widetilde{p}} \eta = \lambda^{-1} [1 - h(K_1, \dots, K_n)].$$

В частном случае для последовательной системы:

$$K = \prod_{i=1}^n \left(\frac{T_i}{T_i + \tau_i} \right); M_{\widetilde{p}} \xi = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i} \right)^{-1}; M_{\widetilde{p}} \eta = \frac{1-K}{K} M_{\widetilde{p}} \xi.$$

В этом случае можно определить и функцию распределения

$$\bar{F}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{(1/T_i) \bar{F}_i(t)}{\sum_{j=1}^n (1/T_j)} \prod_{j \neq i} \frac{1}{T_j} \int_t^\infty \bar{F}_j(u) du,$$

где $F_i(t) = \hat{P}^{(i)}(\xi^{(i)} \leq t)$ — функция распределения наработки на отказ для i -го элемента.

Для параллельной системы:

$$\begin{aligned} \lambda = & \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i + \tau_i} \prod_{j \neq i} \frac{\tau_j}{T_j + \tau_j} = \sum_{i=1}^n (1/\tau_i) \sum_{j=1}^n \frac{\tau_j}{T_j + \tau_j}; \\ K = & 1 - \prod_{j=1}^n \frac{\tau_j}{T_j + \tau_j}; E_{\widetilde{p}} \xi = \frac{\left(\prod_{j=1}^n \frac{T_j + \tau_j}{\tau_j} \right) - 1}{\sum_{j=1}^n 1/\tau_j}. \end{aligned}$$

Для системы типа « m из n » с одинаковыми элементами:

$$\begin{aligned} K = & \sum_{j \geq m} \binom{n}{j} \left(\frac{T}{T + \tau} \right)^j \left(\frac{\tau}{T + \tau} \right)^{n-j}; \\ \lambda = & n \tau^{n-m} T^{m-1} / (T + \tau)^n. \end{aligned}$$

Пример 28.5. Рассмотрим дублированную систему с ненагруженным резервом, мгновенным переключением и одним ремонтным органом. Предположим, что в момент $t = 0$ система уже находится в стационарном режиме. Требуется определить показатели надежности.

Решение. Пусть $((\xi_{1n}, \eta_{1n}) n \geq 0), ((\xi_{2n}, \eta_{2n}) n \geq 0)$ — последовательности наработок на отказ времен восстановления для первого и второго элементов соответственно. Предположим, что эти последовательности независимы друг от друга и строго стационарны. Обозначим через $F_j(t) = P(\xi_{jn} \leq t), G_j(t) =$

$= P(\eta_{jn} \leq t)$ функции распределения наработки на отказ и времени восстановления j -го элемента, $j = 1, 2$. Множество $E = \{1, \dots, 6\}$, где состояние 1 означает, что первый элемент на восстановлении, а второй — работает, 3 — что оба элемента работоспособны, 5 — что первый элемент на восстановлении, а второй отказал и ждет в очереди. Состояния 2, 4, 6 определяются аналогично.

Вложенными точками T_n , удовлетворяющими условию (28.29), будут моменты вхождения системы в состояния 1 и 2. Очевидно, что случайные величины $Z(T_n + 0)$ образуют цепь Маркова с переходными вероятностями $p_{11} = p_{22} = 0$, $p_{12} = p_{21} = 1$ и стационарными вероятностями $p_1^0 = p_2^0 = 1/2$, определенными единственным образом. Следовательно, случайная длина цикла для синхронного ПВТ

$$\tilde{L}_n = \begin{cases} \max(\xi_2, \eta_1'), & \text{если } Z(T_n + 0) = 1, \\ \max(\xi_1, \eta_2'), & \text{если } Z(T_n + 0) = 2, \end{cases}$$

где ξ_2 — типичная наработка второго элемента; η_1' — время восстановления первого элемента, отказавшего на предыдущем цикле (ξ_1, ξ_2 определены по аналогии). Так как по условию ξ_2 и η_1 (ξ_1' и η_2') независимы, по формуле полной вероятности имеем

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{2} E[\max(\xi_2, \eta_1') + \max(\xi_1, \eta_2')] = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty [1 - F_2(t) G_1(t)] dt + \frac{1}{2} \int_0^\infty [1 - F_1(t) G(t)] dt. \end{aligned}$$

Наработка на отказ

$$\xi = \begin{cases} \xi_2, & \text{если } Z(T_n + 0) = 1, \\ \xi_1, & \text{если } Z(T_n + 0) = 2. \end{cases}$$

Отсюда по формулам (28.30) и (28.31) следует:

$$K = \frac{1}{2\mu} (E\xi_1 + E\xi_2); \quad R(t_0) = \frac{1}{2\mu} \int_{t_0}^\infty [\bar{F}_1(t) + \bar{F}_2(t)] dt.$$

Отметим, что рассматриваемая система может быть описана полумарковским процессом лишь в случае $G_i(t) = 1 - e^{-b_i t}$. Однако процесс $Z(t)$ является полурегенерирующим с $K = \{1, 2\}$ даже в рассмотренном нами случае зависимых ξ_{jn} и η_{jn} для каждого $j = 1, 2$.

Пример 28.6. Рассмотрим дублированную систему с нагруженным резервом из одинаковых элементов и с одним ремонтным органом. Предположим, что все случайные величины, характеризующие поведение элементов, независимы и что наработка на отказ ξ_1 каждого элемента имеет функцию распределения $1 - e^{-\lambda t}$, а время восстановления η_1 — произвольную функцию распределения $G(t)$. Требуется найти показатели надежности.

Решение. В данном случае $E = \{0, 1, 2\}$, $E_+ = \{0, 1\}$, а в качестве вложенных точек возьмем моменты окончания восстановления одного из элементов, т. е. моменты скачков $\hat{T}_n$, удовлетворяющие условию $\tilde{Z}(\hat{T}_n + 0) \in E_+$. Очевидно, что случайные величины $\tilde{Z}(\hat{T}_n + 0)$ независимы и

$$\tilde{P}(\tilde{Z}(\hat{T}_n + 0) = 0) = \alpha; \quad \tilde{P}(\tilde{Z}(\hat{T}_n + 0) = 1) = 1 - \alpha,$$

где

$$\alpha = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dG(t) = G^*(\lambda).$$

$$\tilde{L}_n = \begin{cases} \eta^0, & \text{если } \tilde{Z}(\tilde{T}_n + 0) = 1, \\ \xi' + \eta & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где ξ' — случайная величина с функцией распределения $1 - e^{-2\lambda t}$. Следовательно,

$$T = M\eta + G^*(\lambda)/2\lambda.$$

Наработка на отказ

$$\xi_n = \begin{cases} \min(\xi_1, \eta_1), & \text{если } \tilde{Z}(T_n + 0) = 1, \\ \xi' + \min(\xi_1, \eta_1) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отсюда непосредственно получаем:

$$R(t_0) = [\tau + G^*(\lambda)/2\lambda]^{-1} \left[\int_{t_0}^{\infty} e^{-\lambda t} [1 - G(t)] dt + G^*(\lambda) e^{-2\lambda t} / 2\lambda \right];$$

$$K = [2 - G^*(\lambda)] [G^*(\lambda) + 2\lambda E\eta]^{-1}.$$

28.5. ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

28.5.1. Предварительные замечания. Рассматриваемый метод:

позволяет рассчитывать коэффициенты готовности, среднюю наработку на отказ, среднее время восстановления, среднюю наработку до отказа, а также точные значения нижней и верхней границ вероятности безотказной работы системы и коэффициента оперативной готовности;

обеспечивает определение стационарных показателей надежности как в аналитической форме, так и в численном виде с помощью приведенного далее алгоритма;

позволяет определять границы нестационарных показателей надежности только в численном виде с помощью известного алгоритма стохастического программирования, исходными данными для которого являются значения первых трех моментов T_0 , $T_0^{(2)}$ и $T_0^{(3)}$ случайного времени пребывания системы в области работоспособных состояний.

Отличительные признаки метода:

пригоден для расчета надежности систем с большим числом состояний (более 100);

не накладываются ограничения на структуру исследуемой системы;

не требуется преобразовывать исходный граф состояний;

все показатели надежности системы, а также первые три момента времени ее пребывания в фиксированной области состояний определяются решением систем линейных алгебраических уравнений по правилу Крамера, причем все определители рассчитываются по топологической формуле Мезона, операционное исчисление не используется.

28.5.2. Исходные понятия и основы метода.

1. Исходные данные:

ориентированный граф состояний $G(S, \Pi)$, где S — конечное множество вершин (состояний) системы; Π — конечное множество дуг между соседними вершинами i и j (состояниями S_i и S_j);

критерий отказа в виде множества работоспособных состояний $S_p \in S$, множества неработоспособных состояний $\bar{S}_p \in S$, где $S_p \cap \bar{S}_p \neq \emptyset$, граничных работоспособных состояний $S_+ \in S_p$ и граничных неработоспособных состояний $S_- \in \bar{S}_p$, а также начальное состояние $0 \equiv S_0$;

матрица полумарковских вероятностей $\|P_{ij}(t)\|$, где $P_{ij}(t)$ — вероятность перехода из состояния i в состояние j за время, не большее t ;

заданное время работы системы t .

Если поведение системы описывается марковским случайным процессом, то вместо матрицы полумарковских вероятностей $\|P_{ij}(t)\|$ достаточно задать матрицу интенсивностей переходов $\|\lambda_{ij}\|$ между соседними вершинами, где λ_{ij} — интенсивность отказов или восстановлений одного элемента системы при пребывании ее в i -м состоянии, в результате чего она переходит в соседнее j -е состояние.

2. Топологические понятия:

путь — это цепь последовательно соединенных однонаправленных дуг с началом в вершине S_i и окончанием в вершине S_j , вес пути $l_k^{ij} = \prod_{i, r, j \in S} P_{ir} P_{rj}$; замкнутый контур — это цепь последовательно соединенных однонаправленных дуг, причем выход конечной вершины цепи соединен последней дугой с начальной вершиной цепи; вес контура $C_j = \prod_{i, j \in S} P_{ij} P_{ji}$; петля есть частный случай замкнутого контура — в ней входящие и выходящие дуги сливаются в одну; вес петли $C_j = P_{jj}$; разложение графа — это часть графа, не содержащая выделенных вершин и связанных с ними дуг; вес разложения (определитель)

$$\Delta G = 1 - \sum_{(j)} C_j + \sum_{(rj)} C_r C_j - \sum_{(ijl)} C_i C_j C_l + \dots$$

3. Расчетные выражения:

стационарные вероятности π_i полумарковского процесса

$$\pi_i = \frac{\Delta G_0 T_0 + \sum_{(k)} l_k^{0i} \Delta G_k^i T_i}{\Delta G_0 T_0 + \sum_{i \in S} \sum_{(k)} l_k^{0i} \Delta G_k^i T_i}, \quad i \neq 0, \quad (28.34)$$

где ΔG_0 — вес разложения графа без нулевой вершины; ΔG_k^i — вес разложения графа, не содержащего вершин, расположенных на k -м пути из нулевой в i -ю вершину; T_0 (T_i) — математическое ожидание безусловного времени пребывания системы в состоянии S_0 (S_i);

показатели готовности

$$K = \sum_{i \in S_p} \pi_i; \quad (28.35)$$

среднее время восстановления системы

$$\tau = \frac{\sum_{i \in \bar{S}_p} T_i \sum_{(k)} l_k^{0i} \Delta G_k^i}{\sum_{\substack{i \in S_- \\ j \in S_+}} P_{ij} \sum_{i \in S_-} \sum_{(k)} l_k^{0i} \Delta G_k^i}; \quad (28.36)$$

средняя наработка системы до отказа

$$T_0 = \frac{T_0 \Delta G_{\bar{S}_p}^0 + \sum_{j \in S_p} T_j \sum_{(k)} l_k^{0j} \Delta G_k^j}{\Delta G_{\bar{S}_p}}, \quad (28.37)$$

где $\Delta G_{\bar{S}_p}^0$ — вес разложения графа, не содержащего вершин, соответствующих неработоспособным состояниям и нулевую вершину; $\Delta G_{\bar{S}_p}$ — вес разложения графа, не содержащего вершин, соответствующих неработоспособным состояниям; средняя наработка на отказ системы

$$T = \frac{\sum_{i \in S_p} T_i \sum_{(k)} l_k^{0i} \Delta G_k^i}{\sum_{\substack{i \in S_+ \\ j \in S_-}} P_{ij} \sum_{i \in S_+} \sum_{(k)} l_k^{0i} \Delta G_k^i}; \quad (28.38)$$

первый начальный момент времени пребывания системы в фиксированной области состояний S_p при i -м начальном состоянии ($i \in S_p$)

$$T_i = \frac{T_i \Delta G_{S_p}^i + \sum_{j \in S_p} T_j \sum_{(k)} l_k^{ij} \Delta G_k^j}{\Delta G_{S_p}}, \quad (28.39)$$

где $\Delta G_{S_p}^i$ — вес разложения графа, не содержащего вершин, соответствующих неработоспособным состояниям и i -ю вершину;

второй начальный момент времени пребывания системы в фиксированной области состояний S_p при i -м начальном состоянии ($i \in S_p$)

$$T_i^{(2)} = \frac{\left(T_i^{(2)} + 2 \sum_{r \in S_p} P_{ir} T_{ir} T_i \right) \Delta G_{S_p}^i + \sum_{j \in S_p} \sum_{(k)} l_k^{ij} \left(T_j^{(2)} + 2 \sum_{l \in S_p} P_{jl} T_{jl} T_l \right) \Delta G_k^j}{\Delta G_{S_p}}, \quad (28.40)$$

где $T_i^{(2)}$ и $(T_j^{(2)})$ — второй начальный момент времени пребывания системы в состоянии S_i (S_j); $T_{ir}(T_{jl})$ — математическое ожидание условного времени пребывания системы в состоянии S_i (S_j) при условии перехода в состояние S_r (S_l); T_i (T_l) — первый момент времени пребывания системы в фиксированной области состояний S_p при i -м (l -м) начальном состоянии;

дисперсия времени пребывания системы в области работоспособных состояний

$$D = T_0^{(2)} - (T_0)^2,$$

где $T_0^{(2)}$ — рассчитывается по формуле (28.40) при нулевом начальном состоянии, а T_0 — по формуле (28.37);

третий начальный момент времени пребывания системы в фиксированной области состояний при i -м начальном состоянии ($i \in S_p$)

$$T_i^{(3)} = \frac{\left(T_i^{(3)} + 3 \sum_{r \in S_p} P_{ir} T_r^{(2)} T_{cr} + 3 \sum_{r \in S_p} P_{ir} T_{ir} T_{cr}^{(2)} \right) \Delta G_{S_p}^i + \sum_{j \in S_p} \sum_{(k)} l_k^{ij} \left(T_j^{(3)} + 3 \sum_{l \in S_p} P_{jl} T_l^{(2)} T_{cl} + 3 \sum_{l \in S_p} P_{jl} T_{jl} T_{cl}^{(2)} \right) \Delta G_k^j}{1}, \quad (28.41)$$

где $T_i^{(3)}$ ($T_j^{(2)}$) — третий начальный момент времени пребывания системы в состоянии S_i (S_j); $T_r^{(2)}$ ($T_l^{(2)}$) — второй начальный момент времени пребывания системы в состоянии S_r (S_l).

28.5.3. Алгоритм расчета.

1. Подготовительный этап:

определяют вероятности переходов p_{ij} , математические ожидания T_i и T_j , $i, j \in S$, соответственно безусловного и условного времени, а также вторые и третьи начальные моменты времени пребывания системы в каждом из состояний по формулам:

$$p_{ij} = P_{ij}(\infty); \quad T_{ij} = \int_0^{\infty} t dF_{ij}(t),$$

где $F_{ij}(t) = P_{ij}(t)/p_{ij}$;

$$T_i^n = \int_0^{\infty} t^n dF_i(t), \quad i = 1, 2, 3,$$

где $F_i(t) = \sum_{(j)} P_{ij}(t)$;

определяют веса l_k^i всех путей на графе;

определяют веса C_j всех замкнутых контуров на графе.

2. Расчет показателей готовности:

определяют стационарные вероятности полумарковского процесса по формуле (28.34) следующим образом:

- 1) выделяют все k путей из вершины S_0 в вершину S_i графа;
- 2) относительно первого выделенного пути исключают из перечня замкнутых контуров те, которые имеют общие вершины с данным путем;
- 3) рассчитывают вес ΔG_1^i разложения графа относительно первого выделенного пути в такой последовательности:

от единицы вычитают сумму весов C_j оставшихся контуров;
к полученному результату прибавляют попарные произведения весов $C_j C_i$ контуров, не имеющих общих вершин;

от полученного результата вычитают произведение весов троек контуров $C_j C_i C_k$, не имеющих общих вершин, и так далее по всем наборам непересекающихся контуров;

4) определяют произведение веса l_1^{0i} первого выделенного пути на вес ΔG_1^i разложения графа;

5) повторяют операции пп. 2), 3) и 4) для второго, третьего, ... k -го выделенных путей;

6) полученные результаты суммируют;

7) изложенный цикл расчета повторяют для всех оставшихся вершин графа состояний системы.

В результате рассчитывают коэффициенты готовности и простоя системы по формуле (28.35) и рассчитывают среднее время восстановления системы по формуле (28.36).

3. Расчет показателей безотказности:

определяют среднюю наработку до отказа системы по формуле (28.37) следующим образом:

1) рассчитывают вес разложения $\Delta G_{\bar{S}_p}$ графа так же, как и вес ΔG_1^i . При этом из перечня весов путей l_k^{0i} и замкнутых контуров C_j исключают те, которые имеют вершины, принадлежащие множеству $\bar{S}_p$ неработоспособных состояний;

2) рассчитывают вес разложения $\Delta G_{\bar{S}_p}^0$. При этом из перечня оставшихся после выполнения п. 1) весов C_j замкнутых контуров исключают веса тех контуров, которые содержат начальную вершину S_0 ;

3) определяют среднюю наработку на отказ системы по формуле (28.38);

4) относительно каждого состояния в области S_p рассчитывают по формуле (28.39) первые начальные моменты времени пребывания системы в этой области (для всех состояний области S_p);

5) определяют вторые начальные моменты времени пребывания системы в области S_p относительно каждого состояния по формуле (28.40);

6) определяют третий начальный момент времени пребывания системы в области S_p относительно нулевого начального состояния по формуле (28.41);

7) из массива рассчитанных значений начальных моментов выделяют первый, второй и третий моменты времени пребывания системы в области S_p относительно нулевого начального состояния (T_0 , $T_0^{(2)}$, $T_0^{(3)}$);

8) определяют точные значения нижней $P_n(t)$ и верхней $P_v(t)$ границ вероятности безотказной работы системы с помощью численного алгоритма, построенного на основе модифицированного симплекс-метода. Исходные данные для алгоритма:

$$\text{функционалы: } \inf J(F) = \sum_{i=1}^4 f(x_i) p_i = \min; \quad F = 1 - P(t);$$

$$\sup J(F) = \sum_{i=1}^4 f(x_i) (1 - p_i) = \min;$$

$$\text{ограничения: } \sum_{i=1}^4 t_i^k p_i = T_0^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq 3, \quad t_i \in [0, b],$$

$$\sum_{i=1}^4 p_i = 1, \quad p_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq 4;$$

определяют значения нижней и верхней границ коэффициента оперативной готовности:

$$R_n = K P_n(t); \quad R_v = K P_v(t).$$

Пример 28.7. Рассчитать показатели надежности идеальной дублированной системы с однотипными устройствами с помощью изложенного алгоритма.

Исходные данные. Множества состояний: $S_p = \{0, 1\}$; $S_+ = S_1$; $\bar{S}_p = S_- = S_2$. Законы распределения отказов и восстановлений экспоненциальные с интенсивностями отказов и восстановлений λ и μ соответственно.

Решение. Последовательность расчета.

1. Подготовительный этап:

$$\begin{aligned} P_{01} &= 1; P_{10} = \mu / (\lambda + \mu); P_{12} = \lambda / (\lambda + \mu); P_{21} = 1; T_0 = 1/2\lambda; \\ T_1 &= 1/(\lambda + \mu); T_2 = 1/\mu; T_{01} = T_0; T_{10} = T_{12} = T_1; T_{21} = T_2 = T_2; \\ T_0^{(2)} &= 2T_0^2; T_1^{(2)} = 2T_1^2; T_2^{(2)} = 2T_2^2; T_0^{(3)} = 6/(2\lambda)^3; \\ T_1^{(3)} &= 6/(\lambda + \mu)^3; T_2^{(3)} = 6/\mu^3; \\ \{l_1^{01} &= p_{01} = 1\}; \{l_1^{02} = p_{01}p_{12} = \lambda/(\lambda + \mu)\}; C_1 = p_{01}p_{10} = \mu/(\lambda + \mu); \\ \{l_1^{10} &= p_{10} = \mu/(\lambda + \mu)\}; C_2 = p_{12}p_{21} = \lambda/(\lambda + \mu). \end{aligned}$$

2. Расчет показателей готовности:

определяют стационарные вероятности π_i

$$\pi_0 = \frac{\Delta G_0 T_0}{\Delta G_0 T_0 + T_1 l_1^{01} \Delta G_1^1 + T_2 l_1^{02} \Delta G_1^2} = \frac{(1 - C_2) T_0}{(1 - C_2) T_0 + T_1 + p_{01} p_{12} T_2},$$

где $\Delta G_0 = 1 - C_2$; $l_1^{01} = 1$; $\Delta G_1^1 = 1$; $\Delta G_1^2 = 1$.

Следовательно,

$$\pi_0 = (1 + 2\gamma + 2\gamma^2)^{-1},$$

где $\gamma = \lambda/\mu$.

Аналогично:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{T_1 l_1^{01} \Delta G_1^1}{\Delta G_0 T_0 + T_1 l_1^{01} \Delta G_1^1 + T_2 l_1^{02} \Delta G_1^2} = \frac{2\gamma}{1 + 2\gamma + 2\gamma^2}; \\ \pi_2 &= \frac{T_2 l_1^{02} \Delta G_1^2}{\Delta G_0 T_0 + T_1 l_1^{01} \Delta G_1^1 + T_2 l_1^{02} \Delta G_1^2} = \frac{2\gamma^2}{1 + 2\gamma + 2\gamma^2}; \end{aligned}$$

рассчитывают коэффициенты готовности

$$K = \pi_0 + \pi_1 = (1 + 2\gamma)/(1 + 2\gamma + 2\gamma^2);$$

рассчитывают среднее время восстановления:

$$\tau = \frac{T_2 l_1^{02} \Delta G_1^2}{l_1^{02} \Delta G_1^2 p_{21}} = \frac{T_2}{p_{21}} = \frac{1}{\mu}.$$

3. Расчет показателей безотказности:

определяют среднюю наработку до отказа

$$T_0 = \frac{T_0 \Delta G_{\bar{S}_p}^0 + T_1 l_1^{01} \Delta G_1^1}{\Delta G_{\bar{S}_p}} = \frac{T_0 + p_{01} T_1}{1 - C_1},$$

где $\Delta G_{\bar{S}_p}^0 = 1$; $\Delta G_{\bar{S}_p} = 1 - C_1$;

следовательно,

$$T_0 = \frac{1}{\lambda} \frac{1 + 3\gamma}{\gamma};$$

определяют среднюю наработку на отказ

$$T = T_1 = \frac{T_1 \Delta G_{\bar{S}_p}^1 + T_0 l_1^{10} \Delta G_1^0}{\Delta G_{\bar{S}_p}} = \frac{T_1 + p_{10} T_0}{1 - C_1},$$

где $\Delta G_{\bar{S}_p}^1 = 1$; $\Delta G_1^0 = 1$.

Следовательно,

$$T = \frac{1}{\lambda} \frac{1 + 2\gamma}{\gamma};$$

определяют второй начальный момент времени пребывания системы в области S_p при нулевом начальном состоянии

$$\begin{aligned} T_0^{(2)} &= \frac{(T_0^{(2)} + 2p_{01} T_{01} T_1) \Delta G_{\bar{S}_p}^0 + p_{01} (T_1^{(2)} + 2p_{10} T_{10} T_0) \Delta G_1^1}{\Delta G_{\bar{S}_p}} = \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{1 - \gamma}{2\gamma} + \frac{(1 + \gamma)(1 + 2\gamma)}{\gamma^2} + \frac{1 + 4\gamma + (1 + \gamma)^2}{\gamma(1 + \gamma)} \right]; \end{aligned}$$

определяют второй начальный момент времени пребывания системы в области S_p при начальном состоянии S_1

$$T_1^{(2)} = \frac{(T_1^{(2)} + 2p_{10} T_{10} T_0) \Delta G_{\bar{S}_p}^1 + p_{10} (T_0^{(2)} + 2p_{01} T_{01} T_1) \Delta G_1^0}{\Delta G_{\bar{S}_p}},$$

где $\Delta G_{\bar{S}_p}^1 = 1$; $\Delta G_1^0 = 1$;

определяют третий начальный момент времени пребывания системы в области S_p при нулевом начальном состоянии

$$T_0^{(3)} = \frac{(T_0^{(3)} + 3p_{01} T_1^{(2)} T_1 + 3p_{01} T_{01} T_1^{(2)}) \Delta G_{\bar{S}_p}^0 + p_{01} (T_1^{(3)} + 3p_{10} T_0^{(2)} T_0 + 3p_{10} T_{10} T_0^{(2)}) \Delta G_1^1}{\Delta G_{\bar{S}_p}}.$$

Значения первых начальных моментов T_0 и T_1 нужны для определения вторых начальных моментов $T_0^{(2)}$ и $T_1^{(2)}$, а значения T_0 , T_1 , $T_0^{(2)}$ и $T_1^{(2)}$ — для определения третьего начального момента $T_0^{(3)}$. В расчетах граничных значений вероятности безотказной работы системы используются только численные значения моментов T_0 , $T_0^{(2)}$ и $T_0^{(3)}$.

НАДЕЖНОСТЬ СТРУКТУРНО-СЛОЖНЫХ РЕТРАНСЛЯЦИОННЫХ СЕТЕЙ

29.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Сетью называется взаимосвязанная совокупность объектов и соединяющих их каналов. Взаимодействие между объектами организуется на основе ретрансляции сигнала через исправные промежуточные объекты и каналы. Отказ объекта не позволяет использовать этот объект и все примыкающие к нему каналы. Все отказы элементов сети предполагаются взаимонезависимыми в совокупности.

Сеть изображается на рисунках в виде графа, вершины которого соответствуют объектам сети, а ребра (или дуги) — каналам связи (ориентированный канал изображается линией со стрелкой, т. е. дугой, а неориентированный — линией без стрелки, т. е. ребром). Объекты нумеруются арабскими или римскими цифрами, способ нумерации ясен из графического представления сети. Через $[\alpha, \beta]$ обозначается канал между объектами α и β ; если канал ориентированный, то считается, что он исходит из объекта α и входит в объект β . Вероятностью связи (существования пути) между объектами α и β называется вероятность события: «Объекты α и β исправны сами, и существует хотя бы одна последовательность исправных объектов сети $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ и исправных каналов связи $[\alpha, \alpha_1], [\alpha_1, \alpha_2], \dots, [\alpha_{k-1}, \alpha_k], [\alpha_k, \beta]$, соединяющих эти объекты».

Если в сети имеются ориентированные каналы, то понятие пути сохраняет-ся. Если одновременно существует как путь из объекта α в объект β , так и обратный путь из объекта β в объект α , то говорится о существовании сильной связи между объектами α и β . Вероятностью связности (сильной связности) подмножества A объектов сети называется вероятность события: «Любая пара объектов подмножества A связана (сильно связана)».

Под вероятностью безотказной работы понимается вероятность связности всех объектов сети.

Обычно в теории надежности говорят о состояниях отказа и работоспособности и не акцентируют внимание на том, как сеть выполняет требуемые функции в процессе работы. Однако сложная сеть, включающая большое количество объектов и каналов связи, далеко не всегда теряет работоспособность при отказе отдельных элементов и фрагментов — зачастую только снижается эффективность ее функционирования. Поэтому для характеристики качества функционирования сетей используется целый комплекс различных показателей эффективности. В дальнейшем рассматриваются только задачи получения показателей надежности для фиксированного момента времени.

Для количественных оценок используются два класса показателей выходного эффекта e_k сети в состоянии $k \in \overline{1, K}$. Первый определяется требованием связности (сильной связности) заданного подмножества A объектов сети; выходной эффект e_k равен единице, если подмножество A связно, и нулю — в обратном случае. Например, вероятность связи заданных объектов, вероятность безотказной работы и т. д.

Для критериев второго класса характерна зависимость выходного эффекта от размера (мощности) и вида подмножества связанных объектов сети. Например, если эффект e_k определяется числом объектов, связанных с полюсом сети, то задача сводится к нахождению функции распределения числа таких объектов. Если выходной эффект зависит не только от числа, но и от конкретного состава объектов, то отыскивается многомерная функция распределения.

Удобно находить не саму функцию распределения, а производящую функцию $\Phi(t_1, \dots, t_m)$ совместного распределения целочисленных случайных величин

$\xi_1, \dots, \xi_m$. Здесь ξ_i — число объектов i -го типа, связанных с полюсом сети. По определению

$$\Phi(t_1, \dots, t_m) = \sum_{i_1, \dots, i_m} P(\xi_1 = i_1, \dots, \xi_m = i_m) t_1^{i_1} \dots t_m^{i_m},$$

где t_i — переменная производящей функции для i -й случайной величины. Суммирование производится по всем возможным наборам целых неотрицательных чисел $i_1, \dots, i_m$. Начальные моменты распределения случайной величины $\xi_1, \dots, \xi_m$ вычисляются на основе дифференцирования производящей функции $\Phi(t_1, \dots, t_m)$ в единичной точке m -мерного пространства переменных $t_1, \dots, t_m$.

Укажем на практически важный прием получения производящей функции $\Phi(t_1, \dots, t_m)$. Для исходной сети G строится надсеть $\hat{G}$ введением второго полюса и каналов связи, соединяющих этот полюс с объектами (вероятность отказа каж-

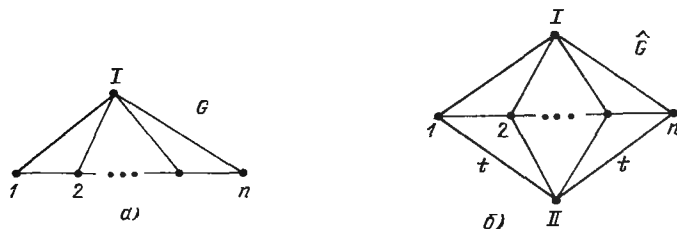


Рис. 29.1. Определение производящей функции числа объектов, связанных с полюсом I сети G :

а) исходная сеть G ; б) надсеть $\hat{G}$

дого из каналов соответственно равна $t_1, \dots, t_m$). После этого вычисляется вероятность Q отсутствия связи между полюсами. Очевидно, что Q есть функция $t_1, \dots, t_m$; $Q = Q(t_1, \dots, t_m)$. Оказывается, что для любых значений $t_i, i = \overline{1, m}$, справедливо тождество

$$Q(t_1, \dots, t_m) \equiv \Phi(t_1, \dots, t_m).$$

Например, для определения производящей функции $\Phi(t)$ распределения числа кольцевых объектов $i, i = \overline{1, n}$, связанных с полюсом I радиально-кольцевой сети, представленной на рис. 29.1, а, достаточно найти вероятность отсутствия пути между полюсами I и II сети на рис. 29.1, б, в которой вероятность отказа канала $[II, i], i = \overline{1, n}$, равна t .

Наиболее целесообразно при исследовании надежности структурно-сложных сетей применение критериев средней эффективности, понимаемой как математическое ожидание выходного эффекта. В большинстве случаев задачу можно при этом свести к нахождению показателей, определяемых состоянием сети в фиксированные моменты времени. Основными из таких показателей являются:

вероятность связности заданного подмножества объектов сети;
моменты совместного распределения числа объектов различных типов, связанных с полюсом сети.

29.2. НАДЕЖНОСТЬ СЕТЕЙ С РЕКУРРЕНТНОЙ СТРУКТУРОЙ

29.2.1. Описание класса сетей с однородной рекуррентной структурой. Сети класса образуются последовательным подсоединением по фиксированному заранее правилу подсетей с одинаковой структурой, но произвольными показателями надежности элементов. Число подсоединенных подсетей определяет ранг сети, количество объектов в каждой из подсетей — степень сети.

Сеть G_n n -го ранга ($n = 2, 3, \dots$) задается начальной сетью первого ранга G_1 и подсетью рекуррентности $g_n = (\kappa, \nu)$, где κ и ν — соответственно множество объектов и каналов связи. Структура подсети $g_n = (\kappa, \nu)$ постоянна для любых n , а показатели надежности элементов произвольны.

В множестве κ выделяются два подмножества одинаковой мощности: входных $\kappa^{(+)}$ и выходных $\kappa^{(-)}$ объектов, между которыми устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Входные объекты не могут соединяться между собой каналами связи; пересечение $\kappa^{(+)}$ и $\kappa^{(-)}$ в общем случае не пусто. В начальной

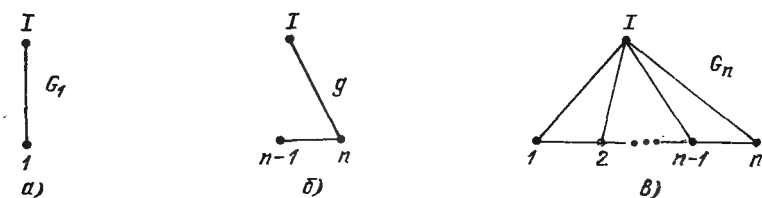


Рис. 29.2. Построение рекуррентной сети n -го ранга:

а) сеть первого ранга G_1 ; б) подсеть рекуррентности g_n ; в) — сеть n -го ранга

сети G_1 определяется подмножество $X_1^{(-)}$ выходных объектов, причем $|X_1^{(-)}| = |\kappa^{(+)}|$, и между объектами из $X_1^{(-)}$ и $\kappa^{(+)}$ устанавливается однозначное соответствие.

Для получения сети G_n n -го ранга каждый из выходных объектов $X_{n-1}^{(-)}$ сети $(n-1)$ -го ранга совмещается с соответствующим входным объектом $\kappa^{(+)}$ подсети рекуррентности g_n , выходные объекты $\kappa^{(-)}$ подсети g_n образуют множество выходных объектов $X_n^{(-)}$ построенной сети n -го ранга G_n . Наряду с операцией присоединения определяется и обратная операция исключения подсети рекуррентности $\hat{g}_n$, отличной в общем случае от g_n .

На рис. 29.2 проиллюстрировано получение рекуррентной сети с радиально-кольцевой структурой. Сеть первого ранга G_1 состоит из объектов I и 1 , $X_1^{(-)} = \{I, 1\}$ и канала связи $[I, 1]$ (рис. 29.2, а). Подсеть g_n состоит из объектов $(n-1)$, n , I и каналов $[I, n]$, $[n-1, n]$, причем $\kappa^{(+)} = \{I, n-1\}$, $\kappa^{(-)} = \{I,$



Рис. 29.3. Приведение нерекуррентной сети (а) к сети с рекуррентной структурой (б)

$n\}$, порядок объектов в $X_1^{(-)}$, $\kappa^{(+)}$, $\kappa^{(-)}$ определяется их взаимно-однозначным соответствием (рис. 29.2, б). Результирующая сеть n -го ранга G_n имеет радиально-кольцевую структуру и представлена на рис. 29.2, в.

В дальнейшем способ построения рекуррентных сетей будет описываться только рисунком.

Сети с рекуррентной структурой (или близкой к ней) достаточно часто встречаются на практике. Произвольность параметров отказа элементов расширяет область применения, так как позволяет вводить «фиктивные» элементы с вероятностью отказа 0 или 1 и тем самым сводить исходную сеть к некоторой рекуррентной. Например, сеть, представленная на рис. 29.3, а, приводится к рекуррентной сети, представленной на рис. 23.3, в, введением безотказных канала $[9, 11]$

и объекта 11, заменой канала [8, 9] на составной канал из двух каналов [8, 11] и [11, 9] с такой же результирующей надежностью, введением неработоспособных каналов [2, 10], [11, 12], [1, 12], объекта 12.

Кроме того, рекуррентные сети, представляя собой хорошее приближение сетей, встречающихся на практике, позволяют достаточно точно и быстро находить количественные показатели надежности.

29.2.2. Описание метода нахождения показателей надежности сетей с однородной рекуррентной структурой. Идея метода определяется рекуррентностью структуры сети n -го ранга G_n . Все множество состояний сети G_n разбивается на подмножества, характеризующиеся фиксированными состояниями отказа или работоспособности элементов подсети g_n . Применением операций стягивания работоспособных объектов, соединенных работоспособным каналом, или удаления отказавших элементов устанавливается эквивалентность каждого из подмножеств множеству состояний деформированной тем или иным образом сети $(n - 1)$ -го ранга G_{n-1}^* . Последняя отличается от сети $(n - 1)$ -го ранга G_{n-1} только подсетью g_{n-1} и (или) начальной сетью G_1^* . По формуле полной вероятности искомый показатель надежности сети G_n записывается как линейная комбинация соответствующих показателей деформированных сетей G_{n-1}^* .

Рекуррентность сетей G_{n-1}^* позволяет построить аналогичным образом деформированные сети, но уже n -го ранга G_n^* . Для каждой из них выполняются те же операции, процесс продолжается до тех пор, пока новые типы деформированных сетей образовываться не будут. Полученные соотношения записываются в матричной форме. Таким образом, показатели надежности деформированных рекуррентных сетей n -го ранга можно вычислить через показатели аналогичных сетей $(n - 1)$ -го ранга. Эта процедура продолжается до тех пор, пока не будут построены сети первого ранга, чьи характеристики можно найти непосредственно благодаря малому числу элементов.

Ограничимся пояснением на простом примере нахождения вероятности связности Π_n всего множества объектов разомкнутой однополюсной радиально-кольцевой сети, представленной на рис. 29.1, а и 29.4.

Введем следующие обозначения: $Q\{i\} = s_i = 1 - r_i$ — вероятность отказа объекта i , $i = \overline{1, n}$; объект I (полюс сети) безотказен; $Q\{[I, i]\} = q_i = 1 - p_i$; $Q\{[i - 1, i]\} = \sigma_i = 1 - \pi_i$ — вероятности отказа каналов $[I, i]$, $[i - 1, i]$, $i = \overline{1, n}$; Π_n — вероятность безотказной работы (связности) сети G_n ; $\Pi_{n|q}$ — то же самое, но для деформированной сети n -го ранга $G_{n|q}^*$, отличающейся от исходной только тем, что канал $[I, n]$ безотказен, т. е. $q_n^* = 0$.

Решение иллюстрируется на рис. 29.4 и реализуется поэтапно за семь шагов.

1. Множество состояний сети G_n разбивается на подмножества $\{s_n\}$, $\{r_n q_n s_n\}$, $\{r_n q_n \pi_n\}$, $\{r_n p_n s_n\}$, $\{r_n p_n \pi_n\}$. Запись параметров элемента подсети g_n в фигурных скобках означает, что соответствующее множество состояний характеризуется отказом или работоспособностью этого элемента. Приведенное разбиение является полным.

2. Анализируется каждое из подмножеств. Подмножества состояний $\{s_n\}$ и $\{r_n q_n s_n\}$ не удовлетворяют условию связности сети G_n , так как объект n отказал или является изолированным, т. е. для них $\Pi_n \equiv 0$.

В состояниях, определяемых подмножествами $\{r_n p_n s_n\}$ ($\{r_n q_n \pi_n\}$), можно удалить канал $[n - 1, n]$ ($[I, n]$). Наличие пути между объектом n и остальными объектами сети полностью определяется состоянием связности объекта I (объекта $n - 1$). Следовательно, объект n можно «стянуть» (совместить) с объектом I (объектом $n - 1$). Но тогда исходная сеть эквивалентна сети $(n - 1)$ -го ранга G_{n-1} .

Так как в состояниях $\{r_n p_n \pi_n\}$ объект I работоспособен по определению, а объект n по условию и они соединяются работоспособным каналом $[I, n]$, то эти

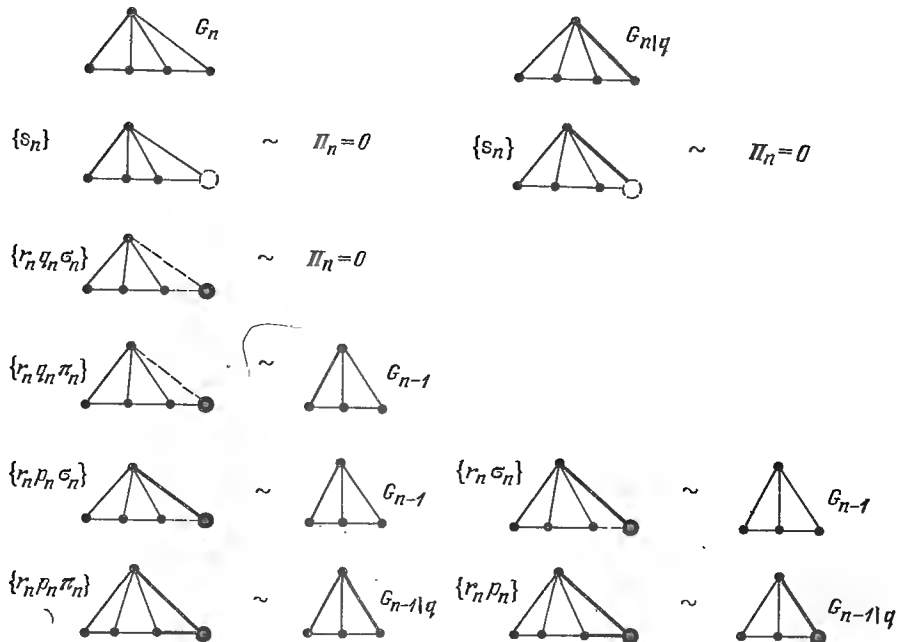


Рис. 29.4. Сведение исследования рекуррентной сети n -го ранга к изучению деформированных сетей $(n-1)$ -го ранга

объекты можно стянуть в один объект I . Следовательно, между объектом $(n-1)$ и I имеются два параллельных канала: один — исходный с вероятностью отказа q_{n-1} , другой — фиктивный, который работоспособен по условию. Эти два канала заменяются одним работоспособным. Но тогда задача сводится к изучению деформированной сети $(n-1)$ -го ранга $G_{n-1|q}^*$, в которой $q_{n-1}^* = 0$, и требуется найти $\Pi_{n-1|q}^*$ — вероятность связности сети G_{n-1}^* .

3. Таким образом,

$$\Pi_n = (s_n + r_n q_n \sigma_n) \cdot 0 + (r_n q_n \pi_n + r_n p_n \sigma_n) \Pi_{n-1} + r_n p_n \pi_n \Pi_{n-1|q}^*. \quad (29.1)$$

4. Строится деформированная сеть n -го ранга $G_n^*|q$ и исследуется по методике пп. 1—3. Легко видеть, что анализ приводит к изучению тех же сетей $(n-1)$ -го ранга G_{n-1} и $G_{n-1|q}^*$, причем

$$\Pi_n^*|q = (s_n + r_n \sigma_n) \cdot 0 + r_n p_n \Pi_{n-1} + r_n \pi_n \Pi_{n-1|q}^*. \quad (29.2)$$

5. Введем вектор характеристик $\Pi_n = \{\Pi_n, \Pi_n^*|q\}^T$, где « T » — индекс транспонирования. Тогда соотношения ((29.1), (29.2)) можно записать в матричном виде

$$\Pi_n = A_n \Pi_{n-1}, \quad (29.3)$$

где матрица перехода

$$A_n = \begin{pmatrix} r_n q_n \pi_n + r_n p_n \sigma_n & r_n p_n \pi_n \\ r_n \sigma_n & r_n \pi_n \end{pmatrix}. \quad (29.4)$$

6. Так как n произвольно, то из выражения (29.3) сразу следует

$$\Pi_n = A_n \Pi_{n-1} = A_n A_{n-1} \Pi_{n-2} = A_n A_{n-1} \dots A_2 \Pi_1. \quad (29.5)$$

7. Координаты начального вектора Π_1 есть вероятность связи сети из полюса I и объекта 1, соединенных каналом связи $\{I, 1\}$. Для сети $G_1 Q \{I, 1\} = q_1 = 1 - p_1$, для сети $G_{1|q}^* Q \{I, 1\} = 0$. Тогда

$$\Pi_1 = |r_1 p_1, r_1|^T. \quad (29.6)$$

Соотношения (29.4)—(29.6) определяют решение поставленной задачи.

Если не зависит от n не только структура подсети рекуррентности, но и параметры отказа элементов (т. е. надежность идентичных по назначению элементов сети G_n одинакова), то рекуррентная сеть G_n называется *изотропной*. Для изотропных сетей ответ удастся получить в конечном виде, так как при всех n матрица перехода A_n постоянна: $A_n = A$, $n = 1, 2, \dots$, и выражение (29.3) представляет собой конечно-разностное уравнение с постоянными коэффициентами, теория решения которых хорошо известна.

Уравнение (29.5) для изотропной сети записывается в виде

$$\Pi_n = A^{n-1} \Pi_1.$$

Находятся характеристические числа λ_i матрицы A , являющиеся корнем определителя $A(\lambda)$ матрицы $A - \lambda E$, где λ — скаляр; E — единичная матрица. Для рассматриваемого примера:

$$A(\lambda) = \begin{vmatrix} rqp + r\rho\sigma - \lambda & r\rho\pi \\ rp & r\pi - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - r(\pi + q\pi + \rho\sigma)\lambda + r^2 q\pi^2;$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{r}{2} [(p + 2q\pi) \pm \sqrt{p^2 + 4\pi\rho q}].$$

Искомая характеристика Π_n — первая координата вектора Π_n — представляется в виде линейной комбинации n -х степеней характеристических чисел матрицы A :

$$\Pi_n = \sum C_i \lambda_i^n.$$

Коэффициенты C_i вычисляются из значений начальных векторов (матриц) характеристик Π_1, Π_2 либо на основе формулы Перрона. В данном случае

$$\Pi_n = \frac{rp}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1^n - \lambda_2^n).$$

29.2.3. Надежность сетей с полносвязной структурой. Сети со структурой в виде полного графа обладают наиболее высокими показателями надежности и живучести. Поэтому они используются при организации связи особо важных (как правило, управляющих) объектов сети. Полносвязные структуры с определенной точки зрения также можно считать рекуррентными, однако их методы анализа весьма специфичны и позволяют анализировать только изотропные сети: вероятности отказа каналов связи одинаковые, показатели надежности любых объектов сети также равны между собой. Аналитические соотношения для нахождения показателей надежности получены для следующих классов полносвязных сетей произвольного размера (ранга) n :

сетей с полной ориентированной специальным образом структурой: любые два объекта соединяются ориентированным каналом, исходящим из объекта с меньшим номером (рис. 29.5);

сетей с полной неориентированной структурой: любые два объекта соединяются неориентированным каналом (рис. 29.6);

многополюсных сетей с полносвязной неориентированной двудольной структурой, отображаемой полным двудольным графом: имеется два подмножества объектов, любой объект связан неориентированными каналами с каждым из объектов другого подмножества, объекты одного и того же подмножества друг с другом каналами не соединяются (рис. 29.7). Структура характерна для сетей с несколькими резервными центрами управления.

Соотношения позволяют вычислять вероятности: вероятности связи сети; моменты распределения числа объектов, связанных с полюсом сети; вероятность связи заданной пары объектов и ряд других характеристик.

29.2.4. Надежность сетей с иерархической структурой. Иерархические структуры характерны для централизованных систем — управления, снабжения и распределения, сбора и передачи информации. В этом случае имеется начальный (нулевого ранга) объект, непосредственно связанный с рядом подчиненных ему объектов первого ранга; каждый из последних, в свою очередь, взаимодействует с объектами второго ранга и т. д.

Множество объектов, непосредственно связанных с одним и тем же управляющим объектом предыдущего ранга, образует некоторую подсеть, т. е. рассматриваемые сети представляют собой иерархическое объединение сравнительно простых подсетей. Более сложный вид иерархической сети и более сложные функции,

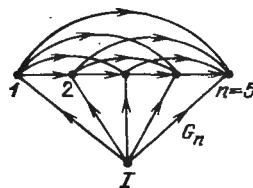


Рис. 29.5

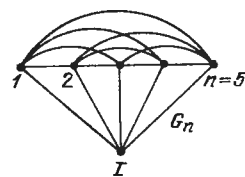


Рис. 29.6

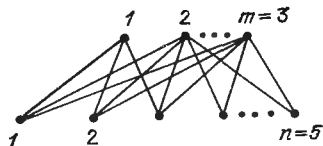


Рис. 29.7

Рис. 29.5. Сеть n -го ранга с ориентированной полной структурой ($n=5$)

Рис. 29.6. Сеть n -го ранга с неориентированной полной структурой ($n=5$)

Рис. 29.7. Сеть n -го ранга с m -полюсной полностью связанной двудольной структурой ($m=3$, $n=5$)

реализуемые ею по сравнению с комплекующими подсетями, определяют и большую сложность применяемых показателей надежности. Используется показатель средней эффективности $M\{E\}$ сети, или математического ожидания выходного эффекта.

Обычно удается с той или иной степенью точности представить выходной эффект E в виде аналитической функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ нормально функционирующих объектов 1, 2, ..., n -го рангов. Объект является нормально функционирующим, если он исправен сам и связан цепочкой из исправных элементов с элементом нулевого ранга. Тогда вычисление $M\{E\}$ можно производить по формуле

$$M\{E\} = \sum_u \sum_{i_1 + \dots + i_n = u} M \xi_{i_1}^{i_1} \dots \xi_{i_n}^{i_n} \frac{1}{i_1! \dots i_n!} \frac{\partial^u f(0, \dots, 0)}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}.$$

Здесь $M \xi_{i_1}^{i_1} \dots \xi_{i_n}^{i_n}$ — начальный момент порядка $u = i_1 + \dots + i_n$ совместного распределения случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ нормально функционирующих объектов соответственно рангов 1, ..., n .

Для определения средней эффективности иерархической сети n -го ранга наиболее удобно предварительное нахождение производящей функции $\Phi_n(t_1, \dots, t_n)$ совместного распределения случайных величин $\xi_i, i \in 1, n$, нормально функционирующих объектов различных рангов:

$$\Phi_n(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} P\{\xi_1 = i_1, \dots, \xi_n = i_n\} t_1^{i_1} \dots t_n^{i_n},$$

где $P\{\xi_1 = i_1, \dots, \xi_n = i_n\}$ — вероятность события: «В сети n -го ранга нормально функционирует ровно i_1 объектов первого ранга, ..., ровно i_n объектов n -го ранга.

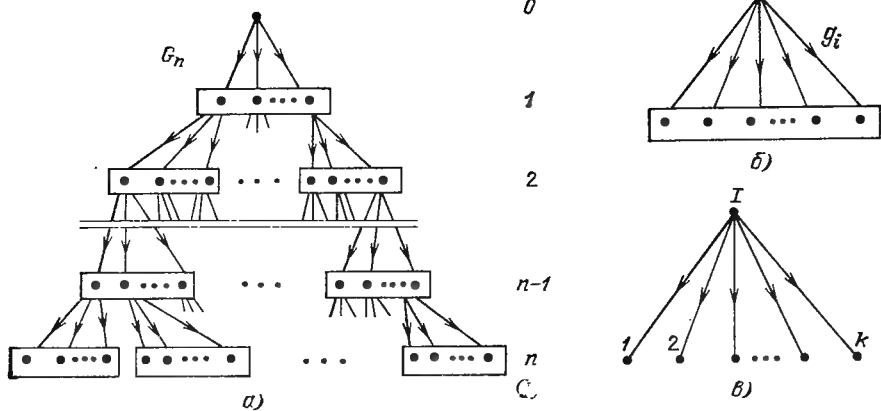


Рис. 29.8. Иерархическая сеть n -го ранга G_n с простым подчинением (а); комплектующие подсети g_i (б); однополюсная подсеть с радиальной структурой (в)

Рассматриваются два класса иерархических сетей: с простым подчинением, в которых любой объект непосредственно подчинен только одному объекту вышестоящего уровня (ранга) (рис. 29.8); со сложным подчинением, в которых каждый объект непосредственно подчинен объектам нескольких вышестоящих рангов (рис. 29.9). Взаимодействие управляющего объекта с управляемым осуществляется через ориентированный канал, исходящий из управляющего объекта. Предполагается рекуррентность иерархических сетей в том смысле, что способ взаимодействия объектов одного и того же ранга с остальными объектами определяется только рангом объекта.

Ориентированная иерархическая сеть n -го ранга с простым подчинением (рис. 29.8) G_n образуется присоединением к сети $(n-1)$ -го ранга G_{n-1} множества одинаковых однополюсных подсетей g_n . Заметим, что не требуется идентичности подсетей g_i и g_j , если $i \neq j$, $i, j \in \overline{1, n}$. В подсети g_n различаются полюс I и выходные объекты i , $i = \overline{1, k}$. Сеть первого ранга G_1 представляет собой подсеть g_1 . Выходные объекты подсети g_1 образуют множество выходных объектов сети G_1 . При построении сети G_n n -го ранга каждый из выходных объектов сети $(n-1)$ -го

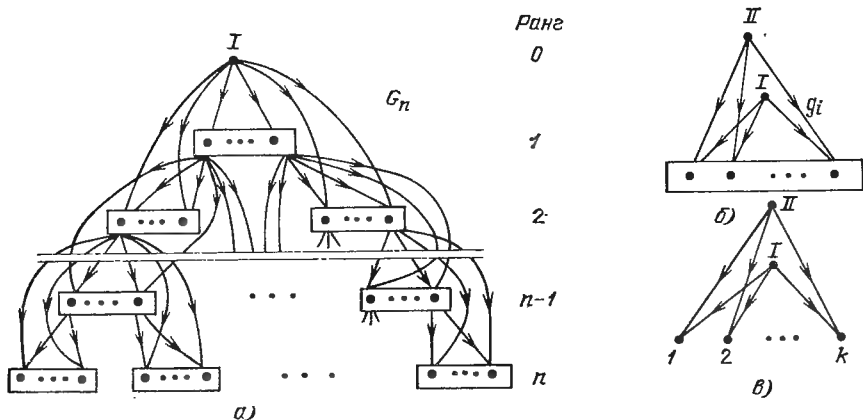


Рис. 29.9. Иерархическая сеть n -го ранга G_n со сложным подчинением (а); комплектующие подсети g_i , $i=\overline{1, n}$ (б) (показаны схематично-двухполюсная подсеть с радиальными объектами (в))

ранга G_{n-1} совмещается с полюсом одной из подсетей g_n . Множество выходных объектов всех присоединенных подсетей образует множество выходных объектов сети G_n . На рис. 29.8 связи между выходными объектами подсетей не показаны, так как подсети различных рангов могут отличаться друг от друга.

В подсети g_n , $n = 1, 2, \dots$, полюс всегда считается безотказным, на параметры надежности остальных элементов ограничений не накладывается. В иерархической сети n -го ранга G_n вероятность отказа каналов совпадает со значениями для соответствующих каналов присоединенных подсетей, вероятности отказа объектов определяются параметрами выходных объектов присоединенных подсетей.

Заметим, что подсеть g_i сама может рассматриваться как иерархическая сеть первого ранга: начальный объект — полюс, выходные объекты первого ранга — выходные объекты подсети. Введем следующее обозначение: $\varphi_n(t_n)$ — производящая функция числа нормально функционирующих выходных объектов подсети g_n , $n = 1, 2, \dots$, рассматриваемой как иерархическая сеть первого ранга.

Нахождение $\Phi_n(t_1, \dots, t_n)$ производится рекуррентным образом последовательной заменой аргумента t_{n-1} на $t_{n-1} \varphi_n(t_n)$ в производящей функции $\Phi_{n-1}(t_1, \dots, t_{n-1})$ для сети G_{n-1} меньшего, $(n-1)$ -го ранга:

$$\begin{aligned}\Phi_n(t_1, \dots, t_{n-1}, t_n) &= \Phi_{n-1}(t_1, \dots, t_{n-1} = t_{n-1} \varphi_n(t_n)), \\ \Phi_1(t_1) &= \varphi_1(t_1).\end{aligned}\tag{29.7}$$

Для вычисления смешанных моментов $M\xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n}$ производящая функция $\Phi_n(t_1, \dots, t_n)$ дифференцируется как сложная функция в единичной точке n -мерного пространства переменных t_i , $i = \overline{1, n}$. В результате определяются рекуррентные соотношения, связывающие моменты для сети n -го и $(n-1)$ -го рангов. Эти соотношения записываются в матричной форме, как и для сетей с однородной рекуррентной структурой. Элементы матрицы перехода определяются на основе вычисления начальных моментов числа нормально функционирующих выходных объектов подсети g_n , $n = 1, 2, \dots$, т. е. дифференцированием производящей функции $\varphi_n(t_n)$.

Непосредственное нахождение производных сложной функции приводит к очень громоздким соотношениям. Поэтому применяются специальные математические приемы, основанные на использовании чисел Стирлинга 1-го и 2-го рода и полиномов Белла.

Для конкретности рассматривается ориентированная иерархическая сеть n -го ранга со сложным подчинением второй степени (рис. 29.9). Сеть n -го ранга G_n образуется присоединением к сети $(n-1)$ -го ранга G_{n-1} множества одинаковых двухполюсных (число полюсов определяется степенью сети) подсетей g_n . Так как способ присоединения аналогичен сетям с простым подчинением и достаточно очевиден из рис. 29.9, ограничимся только замечанием, что полюс II подсети g_n совмещается с объектом $(n-2)$ -го ранга сети G_{n-1} , полюс I подсети g_n — с объектом $(n-1)$ -го ранга. Как и для сетей с простым подчинением, не требуется идентичности подсетей g_i и g_j при $i \neq j$. Начальная подсеть g_1 имеет только один полюс I, полюс II с примыкающими каналами отсутствует.

На значения показателей надежности элементов подсетей g_i , $i = \overline{1, n}$, ограничений не накладывается, за исключением требования безотказности объектов I и II — полюсов сети. Параметры отказа элементов сети G_n такие же, как и у соответствующих элементов комплектующих подсетей, причем вероятность отказа объекта сети равна вероятности отказа выходного объекта соответствующей подсети.

Нахождение начальных моментов распределения числа нормально функционирующих объектов сети со сложным подчинением существенно сложнее, чем для сети с простым подчинением. Любой объект характеризуется уже не двумя состояниями (нормально функционирует, обратное событие), как ранее, а 2^l состояниями, где l — степень сети (в данном случае $l = 2$). Поэтому при первичном анали-

зе рассматривается не одна l -полночная подсеть g_n , а $2^l - 1$ различных преобразований исходной подсети g_n в однополюсную.

В данном случае это:

сеть g_n^{11} , получаемая из g_n совмещением полюсов I и II в один полюс;

сеть g_n^{10} , получаемая из g_n удалением полюса II с примыкающими к нему каналами;

сеть g_n^{01} , получаемая из g_n удалением полюса I с примыкающими к нему каналами.

Соответственно производящая функция для нахождения распределения числа нормально функционирующих объектов сети зависит не от n переменных, как для сети с простым подчинением, а от $n(2^l - 1)$ переменных.

29.3. ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ СЕТЕЙ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ

29.3.1. Предварительные замечания. Описанные в предыдущих разделах методы анализа надежности ретрансляционных сетей связи предназначены для точного вычисления характеристик. Это влечет за собой либо большую трудоемкость (порядка экспоненциальной) при исследовании сетей с произвольной структурой, либо наложение ограничений на класс исследуемых структур, выражающихся в требовании рекуррентности или симметричности их построения.

В данном разделе излагается метод нахождения приближенных значений характеристик связности сетей. Метод позволяет анализировать произвольные структуры с произвольными показателями надежности объектов и каналов связи, однако он наиболее эффективен при исследовании высоконадежных сетей большой размерности. Для таких сетей реализация метода на ЭВМ позволяет добиться степенной зависимости (порядка n^k) трудоемкости от числа n элементов сети. При этом точность метода лежит в диапазоне $nq^k - n^2q^k$, где k — порядок оценки; q — максимальная из вероятностей отказа элементов. Более того, для сетей с ячеистой структурой (в виде решетки, триангуляционные сети и т. п.) удастся снизить трудоемкость метода до линейной зависимости от числа элементов сети. Заметим, что подобные структуры наиболее часто встречаются при организации избыточных сетей связи.

Искомый показатель надежности сети в общем случае есть многомерная функция показателей надежности ее элементов. Как правило, это ограниченная функция, непрерывная и дифференцируемая по каждому аргументу. Предлагаемый подход фактически сводится к нахождению начальных членов разложения интересующей характеристики (или некоторой функции от нее) в многомерный ряд Тейлора. Основной сложностью при этом является получение частных производных, так как мы не располагаем аналитической записью характеристики.

Есть некоторая аналогия между рассматриваемым методом и интерполяцией функций. И в том и другом случае строится функция, совпадающая с искомой на пространстве меньшей размерности. При интерполяции оценивается функция одной переменной, а совпадение достигается на конечном числе точек; в нашем примере оценивается функция n переменных, а совпадение достигается на k -мерных подпространствах, причем остальные $n - k$ переменных полагаются равными константе. В обоих случаях производные (конечные разности) до k -го порядка включительно искомой функции и оценки совпадают. Все это объясняет принятое название — интерполяционный метод.

Основные свойства метода определяются выбором подмножеств переменных, на которых достигается совпадение искомой функции и оценки. При нахождении характеристик надежности сетей связи вычисления резко упрощаются, если параметры отказа элементов равны нулю или единице и возможно применение следующих операций, позволяющих сократить размерность задачи. Если нулю равна вероятность работоспособного состояния линии связи (объекта) сети, то эта

линия (объект) с примыкающими линиями удаляется. Если нулю равны вероятности отказа двух объектов и соединяющей их линии связи, то проводится операция стягивания — объекты совмещаются в один, а соединяющая их линия связи удаляется. Таким образом, наиболее целесообразно при оценке использования характеристик искомой функции в точках, где свободными (ненулевыми) являются только k переменных, а остальные $n - k$ полагаются равными нулю. В результате задача сводится к исследованию множества сетей, но всегда с k стохастическими элементами, что при $k \ll n$ намного проще.

29.3.2. Основные положения интерполяционного метода. Введем следующие обозначения и определения: $\Phi(<n>) = \Phi(q_1, \dots, q_n)$ — искомый показатель надежности сети — функция n переменных q_i , $i = \overline{1, n}$. Зафиксируем набор n переменных q_i в качестве исходного. Пока не конкретизируется природа переменного q_i , считается только, что это некоторый показатель надежности элемента или группы элементов сети. Введем: $<k>$ — набор переменных, получающийся из исходного приравниванием нулю $n - k$ переменных; $\{<k>\}$ — множество различных $<k>$ -наборов; $<m|k>$ — поднабор переменных, получающийся из $<k>$ -набора приравниванием нулю $(k - m)$ переменных; $\{<m|k>\}$ — множество различных $<m|k>$ -поднаборов; $\Phi(<k>)$; $\Phi(<m|k>)$ — значение искомой функции Φ для набора $<k>$ и поднабора $<m|k>$ соответственно. Отметим, что не конкретизируется и искомая функция $\Phi(<n>)$.

Пусть задан некоторый $<k>$ -набор переменных для исходной сети. В результате проведения описанных выше операций стягивания и (или) удаления элементов, соответствующие показатели надежности которых равны нулю, сеть преобразуется. Такая преобразованная сеть в дальнейшем называется $<k>$ -сетью и обозначается как $G(<k>)$. Исходная $<n>$ -сеть обозначается $G(<n>)$.

Функция n переменных $R_k(<n>) = R_k(q_1, \dots, q_n)$ называется оценкой k -го порядка для функции $\Phi(<n>)$, если для любого произвольного $<k>$ -набора $R_k(<k>) \equiv \Phi(<k>)$.

Очевидно, что при $k_1 < k$ имеем $R_k(<k_1>) \equiv \Phi(<k_1>)$, так как $<k_1>$ -набор можно трактовать как $<k>$ -набор с нулевыми переменными. Из определения следует, что в точке $q_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, смешанные производные любого порядка функций $R_k(<n>)$ и $\Phi(<n>)$ совпадают, если только число переменных дифференцирования не превосходит k . Следовательно, совпадают и начальные (до k -го порядка включительно) члены разложения $R_k(<n>)$ и $\Phi(<n>)$.

Рассматриваются две модификации метода: первая основана на вычислении оценки в виде суммы характеристик $<k>$ -сетей, вторая — в виде произведения этих характеристик. Соответственно в дальнейшем будем говорить об аддитивной и мультипликативной модификациях метода (оценки).

Аддитивная $R_k(<n>)$ и мультипликативная $\tilde{R}_k(<n>)$ оценки k -го порядка функции $\Phi(<n>)$ вычисляются на основе рекуррентных соотношений:

$$R_k(<n>) = R_{k-1}(<n>) + \sum_{\{<k>\}} [\Phi(<k>) - r_{k-1|k}]; \quad (29.8)$$

$$\tilde{R}_k(<n>) = \tilde{R}_{k-1}(<n>) \prod_{\{<k>\}} [\Phi(<k>)/\tilde{r}_{k-1|k}], \quad (29.9)$$

где сумма (произведение) берется по всем возможным $<k>$ -наборам переменных q_i .

Очевидно, что общее число слагаемых (сомножителей) есть C_n^k . Начальные значения $R_0(<n>)$, $\tilde{R}_0(<n>)$ определяются как

$$R_0(<n>) = \tilde{R}_0(<n>) = \Phi(0, 0, \dots, 0). \quad (29.10)$$

Вычисление $r_{k-1|k}$, $\tilde{r}_{k-1|k}$, учитывая взаимозависимость различных $\langle k \rangle$ -наборов, производится для каждого фиксированного $\langle k \rangle$ -набора по формулам:

$$r_{k-1|k} = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^{k-1-m} \sum_{\{\langle m|k \rangle\}} \Phi(\langle m|k \rangle); \quad (29.11)$$

$$\tilde{r}_{k-1|k} = \sum_{m=0}^{k-1} \left[\prod_{\{\langle m|k \rangle\}} \Phi(\langle m|k \rangle) \right] (-1)^{k-1-m}. \quad (29.12)$$

Если k невелико, то трудоемкость нахождения оценок составляет примерно n^k операций для вычисления всех слагаемых (сомножителей) в формулах (29.8), (29.9). Вычисление каждого слагаемого требует порядка 2^k операций.

Выбор аддитивной или мультипликативной модификации определяется классом оцениваемого показателя. Как правило, аддитивная оценка более удобна при исследовании показателей надежности, «линейно-изменяющихся» с увеличением размера сети (типа математического ожидания числа нормально функционирующих объектов). Мультипликативная оценка предпочтительна для показателей надежности, «экспоненциально» зависящих от размера сети (типа вероятности связности объектов).

Рассмотрим подробнее вопрос о природе переменных q_i . Как следует из способа вычисления оценок $R_k(\langle n \rangle)$, $\tilde{R}_k(\langle n \rangle)$, основными требованиями, определяющими выбор переменных q_i , являются: простота вычисления значения $\Phi(\langle k \rangle)$ — искомой характеристики для $\langle k \rangle$ -набора; минимизация погрешности получаемой оценки. Из первого следует, что в качестве q_i может рассматриваться как вероятность отказа элемента сети (объекта или канала связи), так и вероятность исправного состояния. Более того, q_i можно рассматривать как векторный параметр, характеризующий некоторое подмножество элементов. Тогда $q_i = 0$ означает, что для любого элемента подмножества соответствующий показатель надежности равен нулю, $q_i \neq 0$ — что ограничений на значения показателей не накладывается (тем самым, допускаются разные значения показателей надежности элементов одного и того же подмножества). Требование минимизации погрешности оценки определяет, учитывая, что оценка фактически дает начальные члены разложения функции в ряд по q_i , целесообразность выбора в качестве q_i наименьшего из показателей отказа или работоспособности элемента. Таким образом, для высоконадежных элементов в качестве q_i выбирается вероятность отказа, для ненадежных элементов — вероятность работоспособного состояния.

Выбор векторного параметра q_i сокращает размерность задачи, так как уменьшается общее число параметров, однако возрастает сложность анализа $\langle k \rangle$ -сети в силу увеличения в ней числа стохастических элементов. Поэтому такое задание используется, только когда получаемые $\langle k \rangle$ -сети имеют специальную структуру и показатель $\Phi(\langle k \rangle)$ вычисляется достаточно просто.

Пример 29.1. Задана триангуляционная сеть (рис. 29.10). Необходимо оценить $\Phi(\langle n \rangle)$ — вероятность связности сети. Объекты считаются безотказными.

Решение. Множество объектов сети X разбивается на подмножество X_1 , X_2 , X_3 , как показано на рис. 29.10, а; объекты X_1 выделены белыми кружками, объекты X_2 — заштрихованными, объекты X_3 — черными кружками. Под q_i понимается множество значений вероятности отказа каналов связи, соединяющих объекты одного и того же множества X_i , $i = \overline{1, 3}$; под σ — множество вероятностей отказа остальных каналов. Искомая характеристика $\Phi(\langle 3 \rangle) = \Phi(q_1, q_2, q_3, \sigma)$. Ищется оценка $R_1(\langle 3 \rangle)$ первого порядка.

Легко видеть, что $G(\langle 0 \rangle)$ представляет собой последовательное объединение четырех объектов, так как объекты одного и того же множества X_i стягиваются в один объект x_i (рис. 29.10, б, для простоты множество каналов между объектами 1 и x_1 , x_1 и x_2 , x_2 и x_3 заменяются одним каналом). Имеется три раз-

личных $\langle 1 \rangle$ -сети: $G(\langle q_1 \rangle)$, $G(\langle q_2 \rangle)$, $G(\langle q_3 \rangle)$ (обозначение определяется ненулевым параметром отказа). Каждая из этих сетей имеет одно- или двухполюсную рекуррентную радиально-кольцевую структуру (рис. 29.10, в, г, д), вероятность связности сети $G(\langle q_i \rangle)$ может быть найдена на основе результатов § 29.2.

Для произвольных сетей возможность векторного задания аргументов встречается сравнительно редко, поэтому для компактности изложения в дальнейшем предполагается, что q_i — показатель надежности одного элемента. Для определен-

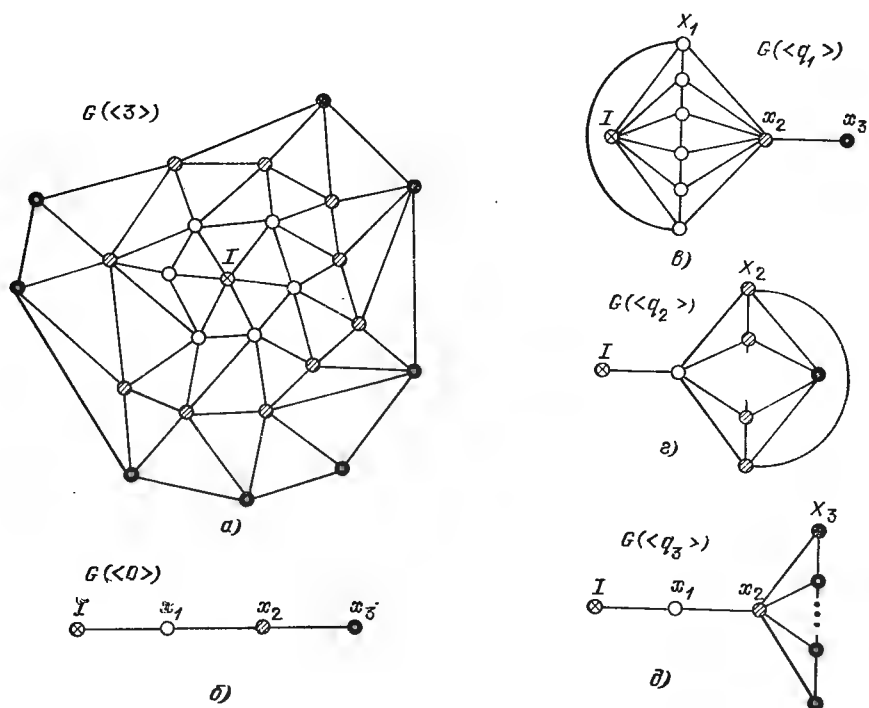


Рис. 29.10. Оценка характеристик триангуляционной сети на основе интерполяционного метода при векторном задании аргументов:

а) исходная сеть $G(\langle 3 \rangle)$; б) $\langle 0 \rangle$ -сеть $G(\langle 0 \rangle)$; в, г, д $\langle 1 \rangle$ -сети $G(\langle q_1 \rangle)$, $G(\langle q_2 \rangle)$, $G(\langle q_3 \rangle)$

ности считается, что q_i — вероятность отказа элементов. В силу общности исходных положений приводимые в дальнейшем результаты справедливы (если это специально не оговаривается) и для векторного задания.

Физический смысл оцениваемого показателя $\Phi(\langle n \rangle)$ надежности сети не имеет принципиального значения при использовании интерполяционного метода. Основное требование — удобство вычисления $\Phi(\langle k \rangle)$ и быстрая сходимость оценки с ростом k . Следует отметить, что при построении сети $G(\langle k \rangle)$ операциями стягивания и удаления элементов в общем случае получается сеть с «взвешенными» объектами. Вес объекта определяется весами стянутых объектов. Например, при оценке среднего числа нормально функционирующих объектов сети $G(\langle n \rangle)$ вес объекта в сети $G(\langle k \rangle)$ равен числу объектов, стянутых в этот объект.

В дальнейшем для простоты рассматривается оценка вероятности связности сети (вероятности безотказной работы). При этом вес объекта сохраняется неизменным и построение сети $G(\langle k \rangle)$ очевидно. Более того, так как для связности необходима безотказность всех объектов, то считается, что объекты безотказны и отказывать могут только каналы связи. Указанные ограничения непринципиальны

и достаточное просто учитываются в общем случае. Алгоритм вычисления оценки очевиден из формул (29.8)—(29.12).

Точность получаемой оценки определяется типом оцениваемого показателя, структурой и параметрами надежности исследуемой сети. При отсутствии каких-либо априорных предположений о типе структуры сети Δ_k — абсолютная погрешность аддитивной оценки k -го порядка вероятности связности сети с n ненадежными каналами — удовлетворяет неравенству

$$\Delta_k = |\Phi(<n>) - R_k(<n>)| \leq \frac{1}{2 \sqrt{2\pi} (k+1)} \left(\frac{2enq}{k+1} \right)^{k+1} \frac{1}{1-2nq/(k+2)},$$

где q — максимальная из вероятностей отказа каналов связи.

При большинстве практических расчетов точность, как показало сравнение результатов, существенно выше и составляет $(n \div n^2) q^k$. Результат относится к сетям, число каналов в которых примерно в полтора—два раза больше числа объектов, а структура сравнительно однородна. (Подробнее об этом сказано ниже при описании так называемых ординарных сетей.)

29.3.3. Упрощения интерполяционного метода. Как показывает практика, для реальных при оценке показателей надежности можно ограничиться значениями $k = 5 \div 8$. Трудоемкость расчетов составляет при этом $n^5 \div n^8$, что при $n \approx 100$ находится на пределе возможностей ЭВМ среднего класса. Это определяет необходимость дальнейших упрощений, которые ведутся в двух направлениях:

упрощение процедуры нахождения $r_{k-1|k}$;
уменьшение числа анализируемых $<k>$ -наборов. Для конкретности далее рассматривается оценка вероятности связности сети, где q_i — вероятность отказа канала связи.

Ускорение процедуры нахождения $r_{k-1|k}$, $\tilde{r}_{k-1|k}$ основано на следующих положениях.

1. Если $\Phi(<k>) = 1 - q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_k}$, то $r_{k-1|k} = \tilde{r}_{k-1|k} = 1$.

2. Если сеть $G(<k>)$ есть мультиграф, т. е. некоторая пара объектов соединяется m параллельными каналами, вероятность отказа каждого из которых есть $q_1, q_2, \dots, q_m$, то эти каналы можно заменить одним с вероятностью отказа $q = q_1 q_2 \dots q_m$. Таким образом, сеть $G(<k>)$ сводится к сети $G^*(<k-m+1>)$ с меньшим числом $(k-m+1)$ стохастических элементов. Для этой сети необходимо вычислить $\Phi^*(<k-m+1>)$ и $r_{k-m|k-m+1}^*$.

3. Пусть параметры отказа элементов сети $G(<k>)$ произвольны и равны $q_1, \dots, q_k$. Рассмотрим изотропную сеть $G(<k>)$ с такой же структурой, но с одинаковыми вероятностями отказа элементов $q = q_1 = q_2 = \dots = q_k$. Пусть αq^k — член k -го порядка малости в разложении характеристики $\Phi(<k>)$ сети $G(<k>)$ в ряд по параметру q . Тогда при вычислении аддитивной оценки $R_k(<n>)$ характеристики $\Phi(<n>)$ слагаемое

$$\Phi(<k>) - r_{k-1|k} = \alpha q_1 q_2 \dots q_k. \quad (29.13)$$

Возможность рассмотрения изотропной сети $\tilde{G}(<k>)$ существенно упрощает процедуру нахождения аддитивной оценки и при малых k позволяет осуществить табличное задание $r_{k-1|k}$, что резко ускоряет вычисления.

4. Если $\Phi(<k>)$ — вероятность связности сети $G(<k>)$, то α в формуле (29.13) есть разность между числом связных подсетей с четным и нечетным числом каналов связи.

Пример 29.2. Пусть сеть $G(<k>)$ состоит из трех объектов, объединенных в кольцо, т. е. может быть изображена в виде треугольника. При оценке вероятности связности очевидно, что любая из трех возможных подсетей с одним каналом несвязна, так как имеется изолированный объект. Любая из трех возможных

подсетей с двумя каналами связана. Существование всего одна сеть (исходная) с тремя каналами, и эта сеть связана. Следовательно, $\alpha = -0 + 3 - 1 = 2$ и $\Phi(<3>) - r_{2|3} = 2q_1q_2q_3$.

Принципиальным для сокращения числа просматриваемых $<k>$ -наборов при вычислении оценки является положение о разложимых $<k>$ -наборах. Будем называть $<k>$ -набор аддитивно (мультипликативно) разложимым, если существуют такие два непересекающихся поднабора $<m_1|k>$ и $<m_2|k>$, что при любых значениях q_i в сети $G(<k>)$ $\Phi(<k>) \equiv \Phi(<m_1|k>) + \Phi(<m_2|k>)$ (для мультипликативной оценки $\Phi(<k>) \equiv \Phi(<m_1|k>) \cdot \Phi(<m_2|k>)$).

На практике разложимость $<k>$ -набора чаще всего означает, что показатель $\Phi(<k>)$ сети $G(<k>)$ зависит менее чем от k показателей надежности элементов (тривиальный набор). Почти всегда это соответствует стягиванию канала связи, вероятность отказа которого (пусть q_j) в данном $<k>$ -наборе не равна нулю, каналами, вероятности отказа которых в рассматриваемом $<k>$ -наборе равны нулю. Так как $\Phi(<k>)$ не зависит от q_j , то можно образовать поднабор из одного $q_j \neq 0$ и легко установить соответствие определению разложимости. Всяма часто разложимость соответствует возможности представления сети $G(<k>)$ в виде объединения двух подсетей, имеющих только один общий объект.

Важность понятия разложимого $<k>$ -набора определяется возможностью не рассматривать его при вычислении оценки. Справедливо утверждение: «Если $<k>$ -набор разложимый, то для него тождественно выполняется

$$\Phi(<k>) \equiv r_{h-1|k} \equiv \tilde{r}_{h-1|k} \gg.$$

Таким образом, при нахождении оценки по формулам (29.8), (29.9) соответствующие слагаемые (сомножители) будут равны нулю (единице).

Пример 29.3. Оценивается вероятность связности последовательной сети, образованной n безотказными объектами 1, 2, ..., n , последовательно соединенными каналами связи [1, 2], [2, 3], ..., [n-1, n], вероятность отказа которых соответственно $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$.

Решение. Любой $<k>$ -набор при $k > 1$ будет мультипликативно разложимым. Действительно, пусть $<k> = (0, \dots, q_{i_1}, \dots, 0, \dots, q_{i_k}, \dots)$. Тогда

$$\Phi(<k>) = (1 - q_{i_1})(1 - q_{i_2}) \dots (1 - q_{i_k}).$$

Рассмотрим поднабор $<1|k> = (0, \dots, 0, q_{i_1}, 0, \dots, 0)$ и поднабор $<k-1|k> = (0, \dots, 0, q_{i_2}, \dots, 0, \dots, q_{i_k}, \dots, 0)$. Очевидно, что для любых q_i

$$\Phi(<k>) = (1 - q_{i_1})(1 - q_{i_2}) \dots (1 - q_{i_k}) \equiv \Phi(<1|k>) \Phi(<k-1|k>).$$

Используя соотношения (29.9), (29.10), получаем, учитывая разложимость $<k>$ -наборов при $k > 1$:

$$R_0(<n>) = 1, R_1(<n>) = \prod_{i=1}^n (1 - q_i);$$

$$R_2(<n>) = R_1(<n>), \dots, R_n(<n>) = \Phi(<n>) = \prod_{i=1}^n (1 - q_i) = R_1(<n>).$$

Пример 29.4. Оценивается среднее число нормально функционирующих объектов в однополюсной радиальной сети с n лучами (рис. 29.11). Объекты абсолютно безотказны, p_i — вероятность работоспособного состояния канала [1, i].

Решение. При $k > 1$ все $<k>$ -наборы — аддитивно разложимые. Действительно, пусть $<k> = (0, \dots, p_{i_1}, \dots, 0, \dots, p_{i_k})$. Взяв поднаборы $<1|k> = (0, \dots, 0, p_{i_1}, 0, \dots, 0)$, $<k-1|k> = (0, \dots, 0, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}, \dots, 0)$, получим

$$\Phi(<1|k>) = p_{i_1}; \Phi(<k-1|k>) = p_{i_2} + \dots + p_{i_k};$$

$$\Phi(<k>) = p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k} \equiv \Phi(<1|k>) + \Phi(<k-1|k>).$$

Из формул (29.8), (29.10), (29.11) найдем, учитывая разложимость $\langle k \rangle$ -наборов при $k > 1$:

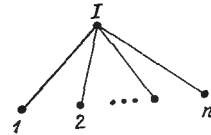
$$R_0(\langle n \rangle) = \Phi(0, \dots, 0) = 0; \quad \Phi(\langle 1 \rangle) = p_i, \quad r_{0|1} = \Phi(\langle 0 \rangle) = 0;$$

$$R_1(\langle n \rangle) = \sum_{i=1}^n (\Phi(\langle 1 \rangle) - r_{0|1}) = \sum_{i=1}^n p_i;$$

$$R_2(\langle n \rangle) = R_1(\langle n \rangle); \quad R_n(\langle n \rangle) = \Phi(\langle n \rangle) = R_1(\langle n \rangle) = \sum_{i=1}^n p_i.$$

Обратим внимание, что в данном случае в качестве показателей $\langle k \rangle$ -набора выбирались вероятности работоспособного состояния элементов, а не отказа, как ранее.

Рис. 29.11. Радиальная сеть с n лучами



Пример 29.5. Оценивается вероятность связности $\Phi(\langle n \rangle)$ замкнутой однополюсной изотропной сети n -го ранга с радиально-кольцевой структурой. Объекты сети безотказны, вероятность отказа любого канала $q_i = q$.

Решение. Так как структура сети рекуррентна, то можно записать

$$\begin{aligned} \Phi(\langle n \rangle) &= (1 - q^3 - q^4 + q^5 + 2q^6)^n + O(nq^7) = \\ &= 1 - nq^3 - nq^4 + nq^5 + 2nq^6 + \frac{n(n-1)}{2} q^6 + O(nq^7). \end{aligned} \quad (29.14)$$

В табл. 29.1 представлены результаты расчета оценок k -го порядка при $k \leq 6$. В столбце $G(\langle k \rangle)$ изображается только часть исходной сети, содержащая стохастические элементы. Безотказные каналы выделены, причем для простоты изображения стянуты в одну вершину почти все вершины, соединенные каналами, вероятности отказа которых в рассматриваемом $\langle k \rangle$ -наборе равны нулю.

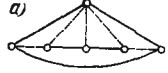
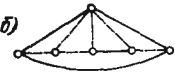
В столбце $h(k)$ приведено количество одинаковых (в силу рекуррентности и изотропности сети) нетривиальных $\langle k \rangle$ -сетей. При $k = 5$ (вариант б) сеть $G(\langle k \rangle)$ преобразуется в трехугольную с параметрами отказа каналов $q_1 = q^2$, $q_2 = q^2$, $q_3 = q$; при $k = 6$ (вариант б) $q_1 = q^2$, $q_2 = q^3$, $q_3 = q$. Тривиальные $\langle k \rangle$ -наборы в таблице не представлены. Например, при $k = 1, 2$ все наборы тривиальные, при $k > 2$ — почти все. При $k = 6$ [вариант (е)] $\langle 6 \rangle$ -набор — мультипликативно разложимый и $\hat{r}_{6|6} = \Phi(\langle 6 \rangle)$.

В столбце $\Phi(\langle k \rangle) - r_{k-1|k}$ даны соответствующие слагаемые для вычисления аддитивной оценки, в столбце $\hat{r}_{k-1|k}$ — сомножители для вычисления мультипликативной оценки. В столбцах R_k и $\hat{R}_k$ приведены аддитивная и мультипликативная оценки.

Из общего числа $\sum_1^6 C_n^i$ различных $\langle k \rangle$ -наборов в силу свойства разложимости достаточно рассмотреть всего $n(n-3)/2 + 7n$ $\langle k \rangle$ -наборов для вычисления аддитивной оценки, и еще меньше — всего $7n$ $\langle k \rangle$ -наборов — для вычисления мультипликативной оценки. Эффективность использования свойства разложимости весьма ощутима. Сравнение оценок в табл. 29.1 с результатом (29.14), полученным по точным формулам, показывает, что точность оценок порядка nq^7 .

29.3.4. Оценка показателей надежности сетей с ординарной структурой. Из предыдущего следует, что разложимые (точнее, тривиальные) $\langle k \rangle$ -наборы составляют, как правило, подавляющее большинство всех различных $\langle k \rangle$ -на-

Вычисление оценок k -го порядка для вероятности связности однополюсной радиально-кольцевой сети

k	$G(\langle k \rangle)$	$h(k)$	$\Phi(\langle k \rangle)$	$\Phi(\langle k \rangle) - r_{k-1} k$	$\hat{r}_{k-1} k$	R_k	$\hat{R}_k$
0, 1, 2			1			1	1
3		n	$1 - q^3$	$-q^3$	1	$1 - nq^3$	$(1 - q^3)^n$
4		n	$1 - q^4$	$-q^4$	1	$1 - nq^3 - nq^4$	$(1 - q^3)^n (1 - q^4)^n$
5	а) 	n	$1 - q^5$	$-q^5$	1	$1 - nq^3 - nq^4 + nq^5$	$(1 - 2q^3 - q^4 + 2q^5)^n \frac{(1 - q^5)^n}{(1 - q^3)^n}$
	б) 	n	$1 - 2q^3 - q^4 + 2q^5$	$+2q^5$	$(1 - q^3)^2 \times (1 - q^4)$		
6	а) 	n	$1 - q^6$	$-q^6$	1	$1 - nq^3 - nq^4 + nq^5 + 2nq^6 - nq^6 + \frac{n(n-3)}{2} q^6$	$R_5 \frac{(1 - q^6)^n}{(1 - q^3)^{2n}} \times \frac{(1 - q^3 - q^4 - q^5 + 2q^6)^n}{(1 - q^4)^{2n} (1 - q^5)^{2n}} \simeq (1 - q^3 - q^4 + q^5 + 2q^6)^n$
	б) 	$2n$	$1 - q^3 - q^4 - q^5 + 2q^6$	$+2q^6$	$(1 - q^3) (1 - q^4) (1 - q^5)$		
	в) 	$\frac{n(n-3)}{2}$	$(1 - q^3)^2$	$+q^6$	$(1 - q^3)^2$		

ров при небольших $k \simeq 5 \div 10$. Однако разложение устанавливается лишь после построения сети $G(\langle k \rangle)$ и вычисления $\Phi(\langle k \rangle)$ и $r_{k-1|k}$. Естественной является задача предварительного отсеивания всех или почти всех разложимых $\langle k \rangle$ -наборов, что позволило бы резко сократить трудоемкость оценки. Оказывается, что решение такой задачи возможно для весьма широкого класса сетей, называемых в дальнейшем ординарными.

Понятие ординарности излагается применительно к нахождению оценки вероятности связности заданного подмножества объектов сети. По-прежнему предполагается безотказность объектов. (Учет ненадежности объектов ведет лишь к принципиальным изменениям, но загромождает изложение: например, вместо реберных разрезов графа необходимо рассматривать дополнительно вершинные и вершинно-реберные разрезы и т. п.)

Будем называть минимальным $\langle k \rangle$ -разрезом множество из k каналов связи, удаление которых нарушает связность сети, причем любое подмножество этого множества таким свойством не обладает. Таким образом, при удалении каналов минимального $\langle k \rangle$ -разреза сеть распадается на две подсети с разным в общем случае числом объектов в каждой. Назовем сеть ординарной и имеющей глубину k , если для всех $m \leq k$ при удалении каналов любого минимального m -разреза в меньшей из подсетей, на которые распадается исходная сеть, число объектов не превышает m .

Условие ординарности означает отсутствие «узких мест» в структуре сети, что эквивалентно в определенном смысле локальной однородности сети. Установление ординарности сети требует порядка n^k вычислительных операций, что при $n \gg 1$ и $k \approx 5 \div 10$ накладывает очень жесткие условия на возможность реализации метода на ЭВМ. Однако для большинства сетей ординарность легко и достаточно достоверно устанавливается экспертным путем на основе визуального анализа изображения структуры. Ниже при описании алгоритма предполагается, что факт ординарности структуры сети установлен заранее. Таким образом, эффективное использование метода предполагает на первоначальном этапе участие разработчика сети.

Алгоритм расчета поясняется на примере нахождения мультипликативной оценки вероятности связности всех объектов сети. Предполагается, что объекты безотказны, в противном случае найденный показатель умножается на произведение вероятностей исправного состояния объектов. Основой алгоритма является свойство, что любой неразложимый $\langle k \rangle$ -набор может быть представлен в виде объединения минимальных $\langle m \rangle$ -разрезов: $m \leq k$. Поэтому можно вначале выделить $\langle m \rangle$ -разрезы и на основе их объединения построить $\langle k \rangle$ -набор. Но в силу определения любой $\langle m \rangle$ -разрез вырезает «маленькую» подсеть. Последняя может быть образована только близко расположенными объектами. Таким образом, формировать $\langle k \rangle$ -наборы можно, вначале вырезая «маленькие» подсети, а затем комбинируя параметры каналов связи этих подсетей.

Следовательно, при малых k в ординарной сети неразложимые $\langle k \rangle$ -наборы образуются только близко расположенными элементами. Понятие расстояния между элементами сети вводится на содержательном уровне, хотя его можно характеризовать, например числом линий связи, входящих в состав минимального пути между соответствующими объектами.

На каждом этапе рассматриваются подмножества близко расположенных объектов, каждому из которых ставится в соответствие множество неразложимых $\langle k \rangle$ -наборов, образованных показателями надежности примыкающих к этим объектам каналов связи. На начальных этапах близость объектов определяется отношением смежности — два объекта смежные, если они соединяются каналом связи. При возрастании порядка выделяемых $\langle k \rangle$ -наборов возможны следующие типы подмножеств объектов: отдельный объект, пара смежных объектов, три попарно-смежных объекта, три объекта, из которых один смежен двумя остальными.

Дальнейшее развитие приводит к необходимости рассматривать подмножества из четырех, пяти и более объектов.

Пусть $n/2$ есть отношение числа каналов связи к числу объектов сети, для сетей с ячеистой структурой (типа решетки) n лежит в пределах 3—6. Тогда можно показать, что при числе объектов в подмножестве, равном трем, порядок анализируемых $\langle k \rangle$ -наборов достигает значения $3n - 2$, т. е. лежит в пределах 6—15. Этого вполне достаточно почти для всех практических задач.

Будем говорить, что если в качестве ненулевых в $\langle k \rangle$ -набор входят только параметры $q_{i_1}, q_{i_2}, \dots, q_{i_k}$ каналов, то $\langle k \rangle$ -набор образован каналами $i_1, i_2, \dots, i_k$. Для иллюстрации типа набора он изображается как «вырез» в сети, включающий каналы $\langle k \rangle$ -набора и некоторые выделенные безотказные каналы (табл. 29.2). Одновременно изображается эквивалентная $\langle k \rangle$ -сеть $G(\langle k \rangle)$, полученная из исходной использованием операций стягивания, причем множество параллельных каналов заменяется на один с соответствующей вероятностью отказа. Последовательность выделения неразложимых $\langle k \rangle$ -наборов, упорядоченная по среднему значению k , приводится ниже, причем подпункты соответствуют обозначению на табл. 29.2:

а) $\langle k \rangle$ -набор образован каналами, примыкающими к одному и тому же объекту. Эквивалентная $\langle k \rangle$ -сеть $G(\langle k \rangle)$ состоит из двух объектов, соединенных каналом. Разложимый ($\langle k \rangle$)-набор идентифицируется по наличию в $\langle k \rangle$ -сети более двух объектов. Среднее значение k равно n ;

б) $\langle k \rangle$ -набор образован каналами, примыкающими к двум смежным объектам, причем соединяющий эти объекты канал — безотказный, $\langle k \rangle$ -сеть состоит из двух объектов, соединенных каналом. Разложимый $\langle k \rangle$ -набор идентифицируется, как в п. а). Среднее значение равно $k = 2n - 2$;

в) $\langle k \rangle$ -набор образован каналами, примыкающими к двум смежным объектам, причем соединяющий эти объекты канал входит в исследуемый $\langle k \rangle$ -набор; $\langle k \rangle$ -сеть состоит из треугольников с общим основанием. Разложимый $\langle k \rangle$ -набор идентифицируется по наличию висячего объекта. Среднее значение k равно $2n - 1$;

г) $\langle k \rangle$ -набор образован каналами, примыкающими к трем попарно-смежным объектам. Каналы, соединяющие эти объекты, образуют треугольник и являются безотказными. Неразложимый $\langle k \rangle$ -набор такой же, как в п. а), аналогично идентифицируется разложимый $\langle k \rangle$ -набор. Среднее значение $k = 3n - 6$;

д) $\langle k \rangle$ -набор образуется так же, как в п. г), но один из каналов, образующих треугольник, входит в набор, т. е. может отказать. Так как отказывающийся канал стягивается за счет безотказного, то все возможные $\langle k \rangle$ -сети — разложимые и поэтому при расчетах не рассматриваются;

е) $\langle k \rangle$ -набор образуется так же, как в п. г), но два канала, образующие треугольник, могут отказывать (таким образом, возможны три различных $\langle k \rangle$ -набора). Неразложимые $\langle k \rangle$ -наборы аналогичны рассмотренным в п. в). Разложимый $\langle k \rangle$ -набор идентифицируется по наличию висячего объекта. Среднее значение $k = 3n - 4$;

ж) $\langle k \rangle$ -набор образуется так же, как в п. г), но все три канала, образующие треугольник (далее базовый треугольник), могут отказывать. $\langle k \rangle$ -сеть образована треугольниками, имеющими один общий канал с базовым. Неразложимый $\langle k \rangle$ -набор идентифицируется по наличию висячего объекта. Образованные таким образом $\langle k \rangle$ -наборы могут совпадать с полученными в п. в) и не должны учитываться. Это происходит только, когда к одному из объектов базового треугольника примыкает ровно два канала. Тогда совпадающий $\langle k \rangle$ -набор образован каналами, примыкающими к оставшимся объектам базового треугольника. Среднее значение $k = 3n - 3$;

з) в сети выделяются тройки объектов (базовые объекты), такие, что один, и только один, объект смежен двум остальным; $\langle k \rangle$ -набор образуется каналами, инцидентными базовым объектам, причем каналы, соединяющие базовые объекты,

безотказны и в $\langle k \rangle$ -набор не входят. Неразложимые и разложимые $\langle k \rangle$ -наборы образуются аналогично п. а). Среднее значение равно $k = 3\kappa - 3$;

и) $\langle k \rangle$ -набор образуется аналогично п. з), причем в набор входит один из каналов, соединяющих базовые объекты, следовательно, другой — безотказен и возможны два различных $\langle k \rangle$ -набора. Неразложимые и разложимые $\langle k \rangle$ -наборы аналогичны рассмотренным в п. с). Среднее значение $k = 3\kappa - 3$;

Таблица 29.2

последовательность неразложимых k -наборов

Тип	Исходный $\langle k \rangle$ -набор	Эквивалентно-разложимый $\langle k \rangle$ -набор	Эквивалентно-неразложимый $\langle k \rangle$ -набор	Средняя мощность $\langle k \rangle$ -набора
а				κ
б				$2\kappa - 2$
в				$2\kappa - 1$
г				$3\kappa - 6$
д		—	—	—
е				$3\kappa - 4$
ж				$3\kappa - 3$
з				$3\kappa - 4$

Тип	Исходный $\langle k \rangle$ -набор	Эквивалентно-разложимый $\langle k \rangle$ -набор	Эквивалентно-неразложимый $\langle k \rangle$ -набор	Средняя мощность $\langle k \rangle$ -набора
u				$3k-3$
k				$3k-2$

к) $\langle k \rangle$ -набор образуется аналогично п. з), причем в $\langle k \rangle$ -набор входят оба канала, соединяющих базовые объекты. Разложимый $\langle k \rangle$ -набор идентифицируется либо по наличию висячего объекта, либо базовый объект является точкой сочленения. $\langle k \rangle$ -сеть либо представляется в виде моста, либо является более сложной комбинацией треугольников, представленной в табл. 29.2. Среднее значение $k = 3k - 2$.

Таблица 29.3

Оценка вероятности связности ординарной сети

Пункт алгоритма	$\langle k \rangle$ -сеть, $G(\langle k \rangle)$	k	Количество $\langle k \rangle$ -наборов	Пункт алгоритма	$\langle k \rangle$ -сеть, $G(\langle k \rangle)$	k	Количество $\langle k \rangle$ -наборов
a		12	I Исходная сеть	d		7	24
		4				8	16
b		6	12	$жс$		9	8
$в$		7	12	$з$		8	12
$г$		6	8	$и$		9	26
				$к$		10	12

Необходимо одновременно отметить, что в предложенном алгоритме значительно сокращается (практически исключается) операция идентификации получаемой $\langle k \rangle$ -сети. На каждом шаге число возможных конфигураций не превышает k , а на практике почти всегда встречается не более двух конфигураций: на этапах а), б), в), г), д) — одна, на остальных этапах — почти всегда треугольная или мостиковая. Это позволяет характеристики типовых $\langle k \rangle$ -сетей $\Phi(\langle k \rangle)$, $r_{k-1|k}$ хранить в буквенном виде в памяти ЭВМ, что резко ускоряет процесс вычисления.

Пример 29.6. Для иллюстрации основных положений разработанного алгоритма оценивается вероятность связности сети, представленной в табл. 29.3. Вероятности отказа каналов одинаковы. Основные этапы решения приведены в табл. 29.3. Из симметричности сети вытекает изоморфизм $\langle k \rangle$ -сетей, получаемых на каждом шаге алгоритма. Поэтому в табл. 29.3 приводятся только изображения получаемых после проведения операций стягивания $\langle k \rangle$ -сетей, причем мультиканалы сохранены. Индексация строк таблицы соответствует шагам алгоритма. Шаг е), приводящий только к разложимым $\langle k \rangle$ -наборам, дается для наглядности. Выражения для $\Phi(\langle k \rangle)$ и $r_{k-1|k}$ не приводятся в силу громоздкости для этапов ж) и к). Общее число различных типов неразложимых $\langle k \rangle$ -наборов равно 9. Эффективность метода резко возрастает при увеличении числа элементов сети, когда ее размер существенно превосходит размер анализируемых $\langle k \rangle$ -наборов.

Глава 30

СИСТЕМЫ ИЗ ЭЛЕМЕНТОВ С МНОГИМИ СОСТОЯНИЯМИ

30.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

На практике встречаются системы, элементы которых имеют несколько различных уровней качества функционирования. Качество функционирования систем, состоящих из таких элементов, также может иметь несколько уровней. Уровень качества функционирования системы однозначно определяется совокупностью уровней качества функционирования элементов системы. Предполагается, что система имеет монотонную структуру в том смысле, что улучшение качества функционирования какого-либо из элементов системы при прочих равных условиях не может привести к ухудшению качества функционирования системы в целом.

Для таких систем предлагается метод представления состояния системы через состояния ее элементов.

30.2. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Пусть система состоит из n элементов. Состояние v -го элемента обозначим x_v :

$$x_v \in \{0, 1, \dots, k_v\}, v = 1, 2, \dots, n. \quad (30.1)$$

Состояние $x_v = 0$ является состоянием отказа. Пусть нумерация состояний осуществлена так, что большему значению x_v соответствует более высокое качество функционирования v -го элемента. Функционирование системы, которое определяется вектором состояния элементов

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (30.2)$$

характеризуется дискретной переменной S , которая принимает значения 0, 1, ..., k , т. е.

$$S = S(x) \in \{0, 1, \dots, k\}. \quad (30.3)$$

Иными словами, каждому уровню функционирования ставится в соответствие целое число. Предполагается, что функция $S(x)$ удовлетворяет условию монотонности

$$S(x') \geq S(x''), \quad x' > x'', \quad (30.4)$$

причем неравенство векторов означает, что выполняется условие $x'_v \geq x''_v$ для всех $v = 1, \dots, n$ и хотя бы для одной компоненты имеет место строгое неравенство. В предельных случаях одновременного полного отказа или одновременного наивысшего качества функционирования всех элементов и сама система должна функционировать соответственно на самом низком или на самом высоком уровне, т. е.:

$$S(0, 0, \dots, 0) = 0; \quad (30.5)$$

$$S(k_1, k_2, \dots, k_n) = k. \quad (30.6)$$

Соотношения (30.1)–(30.6) характеризуют искомую модель. Однако может оказаться, что существуют резервные элементы или дополнительные уровни функционирования у некоторых элементов, т. е. функция $S(x)$ не зависит от состояния этих элементов. Чтобы исключить подобные случаи из рассмотрения, добавляются требования:

$$S(0_v, x) \neq S(k_v, x);$$

$$S(k_v - 1, x) \neq S(k_v, x) \text{ для каждого } k_v \in \{1, \dots, k_v\}.$$

При этом использовано сокращение

$$(k_v, x) = (x_1, \dots, x_{v-1}, k_v, x_{v+1}, \dots, x_n).$$

Основными вычислительными операциями над дискретными переменными $x_1, \dots, x_n$ являются конъюнкция, дизъюнкция и отрицание. Пусть x и y — две многозначные переменные. Тогда:

$$\text{конъюнкция } x \wedge y = \min(x, y);$$

$$\text{дизъюнкция } x \vee y = \max(x, y);$$

$$\text{отрицание } \bar{x} = k - x.$$

Для многозначных логических переменных справедливы правила де Моргана:

$$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}; \quad \overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}.$$

Далее, полезно ввести индикаторные функции

$$I_{[B]} = \begin{cases} 1, & \text{если условие } [B] \text{ выполняется,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В частности, справедливо следующее равенство:

$$I_{[x \geq k]} I_{[x \geq \lambda]} = I_{[x \geq \max(k, \lambda)]}. \quad (30.7)$$

Операции дизъюнкции и конъюнкции над векторами осуществляются по компонентам:

$$\max(x', x'') = (\max(x'_1, x''_1), \dots, \max(x'_n, x''_n)),$$

$$\min(x', x'') = (\min(x'_1, x''_1), \dots, \min(x'_n, x''_n)).$$

30.3. ВИДЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МОНОТОННЫХ СИСТЕМ

Вопрос об определении функции $S(x)$ принципиально можно решить перечислением всех векторов состояния x и оценкой для них соответствующих значений уровня функционирования системы. Для рассматриваемой системы имеется $z = \prod_{v=1}^n (k_v + 1)$ различных состояний, каждому из которых соответствует одно из чисел $\{0, 1, \dots, k\}$, которые характеризуют собой значения функции $S(x)$.

Не учитывая свойство монотонности (30.4), можно образовать $(k + 1)^z$ различных функций $S(x)$. Действительно, после n -кратного применения формулы разложения по аргументам

$$S(x) = \sum_{x_v=0}^{k_v} S(x_v, x) I_{[x_v=x_v]}$$

приходим к следующей общей форме представления:

$$S(x) = \sum_{x_1=0}^{k_1} \dots \sum_{x_n=0}^{k_n} S(x_1, \dots, x_n) \prod_{v=1}^n I_{[x_v=x_v]}.$$

Другими общими формами представления являются дизъюнктивная нормальная форма

$$S(x) = \bigvee_{x_1=0}^{k_1} \dots \bigvee_{x_n=0}^{k_n} \left\{ S(x_1, \dots, x_n) \wedge \left[\bigwedge_{v=1}^n (k I_{[x_v=x_v]}) \right] \right\}$$

и конъюнктивная нормальная форма

$$S(x) = \bigwedge_{x_1=0}^{k_1} \dots \bigwedge_{x_n=0}^{k_n} \left\{ S(x_1, \dots, x_n) \vee \left[\bigvee_{v=1}^n (\overline{k I_{[x_v=x_v]}}) \right] \right\}.$$

Число функций $S(x)$ для систем с монотонной структурой значительно меньше $(k + 1)^z$. Непосредственно из неравенства (30.4) следуют такие свойства монотонных систем:

$$S(\max(x, y)) \geq \max(S(x), S(y)); \quad (30.8)$$

$$S(\min(x, y)) \leq \min(S(x), S(y)). \quad (30.9)$$

Неравенство (30.9) отражает хорошо известный факт: резервирование отдельных элементов является более эффективной мерой, чем резервирование всей системы. Этот результат справедлив и для систем с элементами, имеющими более двух состояний.

На основании (30.8) и (30.9), зная значения функции $S(x)$ для сравнительно небольшого числа характерных состояний x , достаточно полно и однозначно определить функцию $S(x)$ на всей области определения. Действительно, заданием так называемых минимальных реализаций, соответствующих системным уровням $1, 2, \dots, k$, или заданием максимальных реализаций, соответствующих системным уровням $0, 1, \dots, k - 1$, функция $S(x)$ может быть полностью задана. Понятием минимальной (максимальной) реализации обобщается понятие минимального пути (минимального сечения).

30.4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ $S(x)$ НА ОСНОВЕ МИНИМАЛЬНЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЙ

1. Реализация $x_\omega = (x_{\omega 1}, \dots, x_{\omega n})$ вектора состояний x называется минимальной реализацией данного уровня $x \in \{1, 2, \dots, k\}$, если выполняются условия $S(x_\omega) = x$ и $S(x) < x$ для всех $x < x_\omega$. (Строгое неравенство для векторов означает, что для всех компонент справедливо нестрогое неравенство и, кроме того, по крайней мере для одной из компонент выполняется строгое неравенство.) Обозначим $G_\alpha(x)$ множество всех минимальных реализаций данного уровня x , а $W(x)$ — количество элементов этого множества. Введем последовательные структуры, соответствующие минимальным реализациям $x_\omega \in G_\alpha(x)$, т. е.

$$A_{x, \omega}(x) = \min_{1 \leq v \leq n} I_{[x_v \geq x_{\omega v}]}.$$

Подмножество векторов состояния, соответствующих системному уровню $\kappa' \geq \kappa$, можно описать следующим образом:

$$I_{[S(x) \geq \kappa']} = \max_{\kappa' \leq \kappa \leq k} \max_{1 \leq \omega \leq W(\kappa)} A_{\kappa, \omega}(x).$$

Отсюда непосредственно получаются общие формы представления функций монотонных систем:

$$S(x) = \max_{1 \leq \kappa \leq k} (\kappa I_{[S(x) \geq \kappa]}) = \max_{1 \leq \kappa \leq k} [\kappa (\max_{1 \leq \omega \leq W(\kappa)} A_{\kappa, \omega}(x))].$$

Последнее выражение можно преобразовать к виду

$$S(x) = k \max_{1 \leq \omega \leq W(k)} A_{k, \omega}(x) + \\ + [1 - \max_{1 \leq \omega \leq W(k)} A_{k\omega}(x)] \max_{1 \leq \kappa \leq k-1} [\kappa (\max_{1 \leq \omega \leq W(\kappa)} A_{\kappa, \omega}(x))].$$

Многократное применение этого преобразования дает

$$S(x) = k \max_{1 \leq \omega \leq W(k)} A_{k, \omega}(x) + \\ + \sum_{\kappa=1}^{k-1} \kappa (\max_{1 \leq \omega \leq W(\kappa)} A_{\kappa, \omega}(x)) \prod_{\lambda=\kappa+1}^k [1 - \max_{1 \leq \omega \leq W(\lambda)} A_{\lambda, \omega}(x)].$$

Используя представление для булевых переменных

$$\min_i I_{[B_i]} = \prod_i I_{[B_i]}; \quad (30.10)$$

$$\max_i I_{[B_i]} = 1 - \prod_i (1 - I_{[B_i]}) \quad (30.11)$$

и формулу (30.7), можно привести эти формы представления функции $S(x)$ к следующему виду:

$$I_{[S(x) \geq \kappa']} = \max_{\kappa' \leq \kappa \leq k} \max_{1 \leq \omega \leq W(\kappa)} \min_{1 \leq v \leq n} I_{[x_v \geq x_{\omega v}]} = \\ = \max_{\kappa' \leq \kappa \leq k} \max_{1 \leq \omega \leq W(\kappa)} \prod_{v=1}^n I_{[x_v \geq x_{\omega v}]} = \\ = \max_{\kappa' \leq \kappa \leq k} \left[1 - \prod_{\omega=1}^{W(\kappa)} \left(1 - \prod_{v=1}^n I_{[x_v \geq x_{\omega v}]} \right) \right] = \\ = 1 - \prod_{\kappa=\kappa'}^k \left\{ 1 - \left[1 - \prod_{\omega=1}^{W(\kappa)} \left(1 - \prod_{v=1}^n I_{[x_v \geq x_{\omega v}]} \right) \right] \right\} = \\ = \dots = \sum_j b_j \prod_{v=1}^n I_{[x_v \geq \lambda_{vj}]}.$$

Коэффициенты b_j являются целыми числами и $\lambda_{vj} \in \{0, 1, \dots, k_v\}$. Количество слагаемых заранее не известно и зависит от рассматриваемой конкретной системы.

Таким же образом можно получить представление

$$S(x) = \sum_j a_j \prod_{v=1}^n I_{[x_v \geq x_{vj}]} \quad (30.12)$$

2. Реализация $x_\sigma = (x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_n})$ вектора состояния x называется максимальной реализацией данного уровня $\kappa \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, если выполняются условия

$$S(x_\sigma) = \kappa \text{ и } S(x) > \kappa \text{ для всех } x > x_\sigma.$$

Обозначим $G_\beta(\kappa)$ множество всех максимальных реализаций данного уровня κ , а $S(\kappa)$ — количество элементов этого множества. Каждой минимальной реализации $x_\sigma \in G_\beta(\kappa)$ соответствует параллельная структура

$$B_{\kappa, \sigma}(x) = \max_{1 \leq v \leq n} I_{[x_v > x_{\sigma v}]}.$$

Подмножество векторов состояния, соответствующих системному уровню, не меньшему κ' , можно описать следующим образом:

$$I_{[S(x) > \kappa']} = \min_{0 \leq \kappa \leq \kappa' - 1} \min_{1 \leq \sigma \leq S(\kappa)} B_{\kappa, \sigma}(x). \quad (30.13)$$

Из (30.13) можно вывести общие формы представления монотонных функций $S(x)$:

$$S(x) = \max_{0 \leq \kappa \leq k-1} (\kappa + 1) I_{[S(x) > \kappa]} = \max_{0 \leq \kappa \leq k-1} [(\kappa + 1) (\min_{1 \leq \sigma \leq S(\kappa)} B_{\kappa, \sigma}(x))], \quad (30.14)$$

или

$$S(x) = \max_{1 \leq \kappa \leq k} [\kappa (\min_{1 \leq \sigma \leq S(\kappa-1)} B_{\kappa-1, \sigma}(x))] \quad (30.15)$$

и

$$S(x) = k \min_{1 \leq \sigma \leq S(k-1)} B_{k-1, \sigma}(x) + \sum_{\kappa=1}^{k-1} \kappa (\min_{1 \leq \sigma \leq S(\kappa-1)} B_{\kappa-1, \sigma}(x)) \prod_{\lambda=\kappa}^{k-1} [1 - \min_{1 \leq \sigma \leq S(\lambda)} B_{\lambda, \sigma}(x)]. \quad (30.16)$$

С помощью формул (30.7), (30.10) и (30.11) можно перевести (30.14)—(30.16) в представление (30.12).

Глава 31

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

31.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Существует класс технических устройств и систем с аддитивным показателем эффективности, формируемых из очень большого числа однотипных элементов (сотен, тысяч и более единиц). При этом количество резервных элементов, составляя единицы процентов от их общей массы, в абсолютном исчислении также велико. В этих условиях применение стандартных методов расчета надежности существенно затрудняется. Параметр $\rho = \lambda \mu^{-1}$ для таких систем уже не является малым, и сходимость решений, представляемых обычно в виде ряда, ухудшается.

Эффективным является метод построения непрерывных распределений, соответствующих (при определенных условиях эквивалентности) реальным дискретным распределениям вероятностей состояний системы. В этом случае дискретный параметр-индекс состояний переходит в непрерывный, а система исходных уравнений (например, процесса «гибели и размножения») «свертывается» в одно диф-

ференциальное уравнение в частных производных. Непрерывный аналог рассматриваемого дискретного процесса является диффузионным процессом, описываемым прямым (обратным) уравнением Колмогорова.

31.2. «СХЕМА ГИБЕЛИ И РАЗМНОЖЕНИЯ». КОЭФФИЦИЕНТ ГОТОВНОСТИ

Система «прямых» уравнений процесса «гибели и размножения» для коэффициента готовности имеет вид

$$\begin{aligned} p'_k(t) &= \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) - (\lambda_k + \mu_k) p_k(t) + \mu_{k+1} p_{k+1}(t), \\ k &= 0, 1, \dots, n, \lambda_{-1} = \mu_0 = \lambda_n = \mu_{n+1} = 0, \end{aligned} \quad (31.1)$$

где $p_k(t)$ — вероятность нахождения системы в момент времени t в состоянии E_k (k — число отказавших элементов); λ_k — интенсивность перехода системы из состояния k в состояние E_{k+1} ; μ_k — интенсивность перехода системы из состояния k в состояние E_{k-1} ; n — число элементов системы.

Приближенным непрерывным аналогом системы уравнений (31.1) является прямое уравнение Колмогорова вида

$$\frac{\partial}{\partial t} p(y, t) = \frac{\partial}{\partial y} \{a(y) p(y, t)\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{b(y) p(y, t)\}, \quad (31.2)$$

$$a(y) = -n^{-1} [\mu(y) - \lambda(y)], \quad b(y) = [\sqrt{2n}]^{-2} [\mu(y) + \lambda(y)],$$

$$y = kn^{-1}, \quad p_k(t) = p(y, t), \quad \mu_k = \mu(y), \quad \lambda_k = \lambda(y).$$

(Здесь опущен параметр x начального состояния процесса при $t = 0$, т. е. $p(y, t) = p(x, y, t)$.)

Коэффициент $a(y)$ в теории диффузии называется коэффициентом сноса и характеризует перемещение процесса в среднем за единицу времени. Величина $b(y)$ определяет дисперсию этого перемещения. Физически y есть доля отказавших элементов к моменту времени t .

Используя выражение для коэффициента готовности

$$K(y_1, t) = \int_0^{y_1} p(y, t) dy,$$

приходим к уравнению для определения $K(y_1, t)$

$$\frac{\partial}{\partial t} K(y_1, t) = -a(y_1) \frac{\partial}{\partial y_1} K(y_1, t) + \frac{\partial}{\partial y_1} \left\{ b(y_1) \frac{\partial}{\partial y_1} K(y_1, t) \right\} \quad (31.3)$$

с граничными условиями:

$$K(0, t) = 0, \quad K(y_2, t) = 1.$$

Отметим, что y_1 в выражении для $K(y_1, t)$ есть точка отказа системы, т. е. минимальная доля неисправных элементов, при которой система считается исправной; y_2 — максимально допустимая доля отказавших элементов, при достижении которой система отключается.

В практически важном стационарном случае уравнение (31.3) принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} K(y_1) + \gamma(y_1) \frac{\partial}{\partial y_1} K(y_1) = 0, \quad \gamma(y_1) = -\frac{a(y_1)}{b(y_1)} + \frac{b'(y_1)}{b(y_1)}. \quad (31.4)$$

Решение уравнения (31.4) при данных граничных условиях есть

$$K(y_1) = \frac{\int_0^{y_1} \exp \left[-\int_0^y \gamma(x) dx \right] dy}{\int_0^{y_2} \exp \left[-\int_0^y \gamma(x) dx \right] dy}. \quad (31.5)$$

Значения $K(a_1, a_2)$

a_2	a_1									
	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,005	0,911	0,925	0,936	0,943	0,950	0,955	0,978	0,986	0,9900	0,9924
0,006	—	0,912	0,924	0,933	0,940	0,946	0,974	0,983	0,988	0,9908
0,007	—	—	0,912	0,923	0,931	0,938	0,969	0,980	0,986	0,989
0,008	—	—	0,901	0,913	0,922	0,930	0,965	0,978	0,984	0,988
0,009	—	—	—	0,903	0,913	0,921	0,961	0,975	0,982	0,986
0,01	—	—	—	—	0,904	0,914	0,957	0,972	0,980	0,985
0,02	—	—	—	—	—	—	0,918	0,946	0,961	0,970
0,03	—	—	—	—	—	—	—	0,922	0,943	0,956
0,04	—	—	—	—	—	—	—	—	0,926	0,943
0,05	—	—	—	—	—	—	—	—	0,910	0,930
0,06	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,918
0,07	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,906
0,08	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0,09	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0,1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Продолжение табл. 31.1

a_2	a_1									
	0,6	0,7	0,8	0,9	1	2	3	4	5	6
0,005	0,9240	0,9251	0,9259	0,9266	0,9271	0,9322	0,9374	0,9407	0,9466	0,9488
0,006	0,9228	0,9241	0,9251	0,9259	0,9265	0,9306	0,9369	0,9389	0,9459	0,9485
0,007	0,9216	0,9232	0,9243	0,9252	0,9260	0,9289	0,9363	0,9387	0,9452	0,9483
0,008	0,9200	0,9222	0,9235	0,9246	0,9254	0,9287	0,9358	0,9385	0,9446	0,9480
0,009	0,989	0,9212	0,9227	0,9239	0,9248	0,9286	0,9353	0,9383	0,9439	0,9478
0,01	0,988	0,9202	0,9219	0,9232	0,9242	0,9284	0,9348	0,9381	0,9432	0,9475
0,02	0,976	0,981	0,984	0,987	0,989	0,9269	0,9289	0,9363	0,9387	0,9451
0,03	0,965	0,972	0,976	0,980	0,983	0,9254	0,9284	0,9345	0,9380	0,9427
0,04	0,954	0,963	0,969	0,974	0,978	0,9239	0,9279	0,9327	0,9373	0,9403
0,05	0,944	0,954	0,962	0,968	0,972	0,9224	0,9274	0,9309	0,9367	0,9388
0,06	0,934	0,942	0,955	0,962	0,967	0,9210	0,9270	0,9289	0,9361	0,9386
0,07	0,924	0,937	0,948	0,956	0,962	0,9289	0,9265	0,9287	0,9354	0,9383
0,08	0,914	0,930	0,941	0,950	0,957	0,9288	0,9260	0,9286	0,9348	0,9381
0,09	0,905	0,922	0,934	0,944	0,952	0,9287	0,9255	0,9284	0,9342	0,9379
0,1	—	0,914	0,928	0,939	0,948	0,9285	0,9250	0,9282	0,9335	0,9376
0,2	—	—	—	—	0,905	0,9272	0,9206	0,9266	0,9288	0,9355
0,3	—	—	—	—	—	0,9261	0,9287	0,9252	0,9282	0,9336
0,4	—	—	—	—	—	0,9251	0,9283	0,9239	0,9278	0,9318
0,5	—	—	—	—	—	0,9242	0,9280	0,9228	0,9273	0,9302

Продолжение табл. 31.1

a_2	a_1								
	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0,005	0,9 ⁵ 54	0,9 ⁵ 83	0,9 ⁶ 4	0,9 ⁶ 8	0,9 ⁷	1	1	1	1
0,006	0,9 ⁵ 45	0,9 ⁵ 80	0,9 ⁶ 3	0,9 ⁶ 7	0,9 ⁷	1	1	1	1
0,007	0,9 ⁵ 36	0,9 ⁵ 77	0,9 ⁶ 1	0,9 ⁶ 7	0,9 ⁷	1	1	1	1
0,008	0,9 ⁵ 27	0,9 ⁵ 73	0,9 ⁶ 0	0,9 ⁶ 6	0,9 ⁷	1	1	1	1
0,009	0,9 ⁵ 18	0,9 ⁵ 70	0,9 ⁵ 89	0,9 ⁶ 6	0,9 ⁷	1	1	1	1
0,01	0,9 ⁵ 09	0,9 ⁵ 67	0,9 ⁵ 88	0,9 ⁶ 5	0,9 ⁷	0,9 ⁷	1	1	1
0,02	0,9 ⁴ 82	0,9 ⁵ 34	0,9 ⁵ 76	0,9 ⁶ 1	0,9 ⁶ 7	0,9 ⁷	1	1	1
0,03	0,9 ⁴ 73	0,9 ⁵ 01	0,9 ⁵ 64	0,9 ⁵ 87	0,9 ⁶ 5	0,9 ⁶ 8	0,9 ⁷	1	1
0,04	0,9 ⁴ 64	0,9 ⁴ 87	0,9 ⁵ 52	0,9 ⁵ 82	0,9 ⁶ 3	0,9 ⁶ 8	0,9 ⁷	1	1

a_2	a_1								
	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0,05	0,9456	0,9484	0,9540	0,9578	0,962	0,967	0,97	1	1
0,06	0,9447	0,9481	0,9528	0,9574	0,960	0,966	0,97	1	1
0,07	0,9438	0,9477	0,9517	0,9569	0,9589	0,966	0,968	0,97	1
0,08	0,9430	0,9474	0,9505	0,9565	0,9587	0,965	0,968	0,97	1
0,09	0,9421	0,9471	0,9489	0,9561	0,9586	0,965	0,968	0,97	1
0,1	0,9413	0,9468	0,9488	0,9557	0,9584	0,964	0,968	0,97	1
0,2	0,9383	0,9439	0,9478	0,9518	0,9570	0,9589	0,966	0,97	0,97
0,3	0,9376	0,9413	0,9468	0,9488	0,9557	0,9584	0,964	0,968	0,97
0,4	0,9370	0,9389	0,9460	0,9485	0,9545	0,9580	0,963	0,967	0,97
0,5	0,9364	0,9387	0,9451	0,9482	0,9534	0,9576	0,961	0,967	0,97

Окончание табл. 31.1

a_2	a_1										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
0,6	0,934	0,977	0,9216	0,9269	0,9289	0,9359	0,9385	0,9444	0,9479	0,9572	0,97
0,7	0,927	0,974	0,9207	0,9266	0,9287	0,9354	0,9383	0,9438	0,9477	0,9569	0,968
0,8	0,921	0,972	0,9200	0,9263	0,9286	0,9350	0,9382	0,9432	0,9475	0,9566	0,968
0,9	0,915	0,970	0,989	0,9260	0,9285	0,9346	0,9380	0,9427	0,9473	0,9564	0,968
1	0,910	0,968	0,988	0,9257	0,9284	0,9342	0,9379	0,9422	0,9471	0,9561	0,968
2	—	0,957	0,984	0,9242	0,9278	0,9321	0,9371	0,9389	0,9460	0,9547	0,967
5	—	0,951	0,982	0,9233	0,9275	0,9309	0,9367	0,9388	0,9455	0,9539	0,967
10	—	0,950	0,982	0,9233	0,9275	0,9308	0,9366	0,9388	0,9455	0,9539	0,967

В общем случае уровень отключения y_2 меняется от $y_1 + n^{-1}$ (отсутствие отказов элементов после отказа системы) до $1 + n^{-1}$, где y_2 увеличен на n^{-1} по отношению к действительному¹.

Для инженерных оценок $K(y_1)$ можно пользоваться приближенной формулой

$$K(y_1) \approx \frac{1 - \exp \left[- \int_0^{y_1} \gamma(y) dy \right]}{1 - \exp \left[- \int_0^{y_2} \gamma(y) dy \right]}, \quad (31.6)$$

совпадающей с (31.5) при $\gamma(y) = \text{const}$ и дающей нижнюю оценку для (31.5) в общем случае ($\rho < 1$).

Числовые значения $K(y_1)$ представлены в табл. 31.1, входами которой являются функции:

$$a_1 = \int_0^{y_1} \gamma(y) dy; \quad a_2 = \int_{y_1}^{y_2} \gamma(y) dy. \quad (31.7)$$

Конкретный вид функций a_1 и a_2 в (31.7) приведен в табл. 31.2.

Пример 31.1. Антенная фазированная решетка состоит из 10^3 элементарных излучателей. Ненагруженный резерв составляет 5%. Интенсивность отказов одного излучателя равна $1/10^3 \text{ ч}^{-1}$. Восстановление полностью ограниченное с интенсивностью $\mu = 1 \text{ ч}^{-1}$. Включение резервных элементов осуществляется по мере выхода из строя основных элементов. При отказе 7% элементов система отключается. Определить стационарный коэффициент готовности системы.

¹ В дискретном процессе общее число вероятностей состояний $p_0, p_1, \dots, p_n$ равно $n+1$. Таким же должно быть и число интервалов длительностью n^{-1} в непрерывном процессе. Отношение $(n+1)/n$ и определяет верхнюю границу изменения y до $1+n^{-1}$.

Формулы для a_1, a_2

Тип модели	$\lambda(y), \mu(y)$	a_1	a_2
1. Полностью ограниченное восстановление; ненагруженный резерв	$\lambda = \text{const}, \mu = \text{const},$ $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$	$2ny_1 \frac{1-\rho}{1+\rho}$	$2n(y_2 - y_1) \frac{1-\rho}{1+\rho}$
2. Полностью ограниченное восстановление; нагруженный резерв	$\lambda = \lambda_0 n(1-y), \mu = \text{const},$ $\rho = \frac{\lambda_0 n}{\mu}$	$\left(\frac{4n}{\rho} - 1\right) \left/ \ln \left(1 - \frac{\rho y}{1+\rho}\right) \right/ - 2ny_1$	$\left(\frac{4n}{\rho} - 1\right) \ln \left/ \left(\frac{1 - \frac{\rho y_2}{1+\rho}}{1 - \frac{\rho y_1}{1+\rho}} \right) \right/ - 2n(y_2 - y_1)$
3. Неограниченное восстановление; ненагруженный резерв	$\lambda = \text{const}, \mu = \mu_0 ny,$ $\rho = \frac{\lambda_0 n}{\mu_0}$	$2ny_1 - (4\rho - 1) \ln \left(1 + \frac{ny_1}{\rho}\right)$	$2n(y_2 - y_1) - (4\rho - 1) \times$ $\times \ln \frac{1 + \frac{ny_2}{\rho}}{1 + \frac{ny_1}{\rho}}$
4. Неограниченное восстановление; нагруженный резерв	$\lambda = \lambda_0 n(1-y), \mu = \mu_0 ny,$ $\rho = \frac{\lambda_0 n}{\mu_0}$	$2n(1 + \rho n^{-1}) (1 - \rho n^{-1})^{-1} \times$ $\times y_1 - [4\rho (1 - \rho n^{-1})^{-2} - 1] \times$ $\times \ln [1 + \rho^{-1} (n - \rho) y_1]$	$2n(y_2 - y_1) (1 + \rho n^{-1}) (1 - \rho n^{-1})^{-1} - [4\rho (1 -$ $- \rho n^{-1})^{-2} - 1] \ln \{ [1 + \rho^{-1} (n - \rho) y_2] \times$ $\times [1 + \rho^{-1} (n - \rho) y_1]^{-1} \}$

Примечание. λ_0, μ_0 — интенсивности отказов и восстановлений одного элемента системы.

Решение. Модель приближенно относится к случаю с $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$ (случай 1 в табл. 31.2). По табл. 31.2 определим параметры ρ_1 , a_1 и a_2 :

$$\rho_1 = 950 \cdot 10^{-3} = 0,95; \quad y_1 = 0,051; \quad y_2 = 0,07;$$

$$a_1 = 2 \cdot 10^3 \cdot \frac{1-0,95}{1+0,95} \cdot 0,051 \approx 2,56;$$

$$a_2 = 2 \cdot 10^3 \cdot \frac{1-0,95}{1+0,95} \cdot (0,07 - 0,051) \approx 1,02.$$

С помощью табл. 31.1 по известным a_1 и a_2 ($a_1 \approx 2,5$; $a_2 = 1$) находим $K = 0,939$ (интерполяция по a_1).

Если система отключается при наступлении ее отказа, то имеем:

$$y_2 = 0,052; \quad y_2 = y_1 = 0,001;$$

$$a_1 = 2,56; \quad a_2 \approx 2 \cdot 10^3 \cdot \frac{1-0,950}{1+0,950} \cdot 0,001 \approx 0,05.$$

По табл. 31.1 находим $K \approx 0,995$.

31.3. МОМЕНТЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Для определения начальных моментов распределения наработки до отказа необходимо рассмотреть обратные уравнения процесса «гибели и размножения». Непрерывным аналогом для данной системы уравнений является обратное уравнение Колмогорова

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, y, t) = a(x) \frac{\partial}{\partial x} p(x, y, t) + b(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, y, t), \quad (31.8)$$

$$a(x) = -[\mu(x) - \lambda(x)] n^{-1}, \quad b(x) = [\mu(x) + \lambda(x)] [V\sqrt{2n}]^{-2},$$

где $p(x, y, t)$ — вероятность нахождения процесса в точке $y \leq y_1$ в момент времени t при начальном положении x при $t = 0$. Таким образом, в обратном уравнении (31.8) координата начального положения x — переменная, y — фиксированная величина. При $y = y_1$ $p(x, y_1, t) = f(x, t)$ — плотность распределения наработки до отказа системы с начальным положением x .

Граничные и начальные условия для $f(x, t)$ имеют вид:

$$f(x, 0) = 0; \quad f(y_1, t) = 0, \quad x < y_1;$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \big|_{x=0} = 0.$$

Пусть $m_s(x) = \int_0^\infty t^s f(x, t) dt$ — начальный момент s -го порядка для наработки до отказа системы. Применив к (31.8) преобразование Меллина

$$M\{f(t)\} = \int_0^\infty t^{s-1} f(t) dt = f^*(s) = m_{s-1},$$

получим для целых $s = 1, 2, \dots$

$$b(x) \frac{d^2}{dx^2} m_s(x) + a(x) \frac{d}{dx} m_s(x) = -s m_{s-1}(x),$$

$$m_s(y_1) = 0, \quad \frac{d}{dx} m_s(x) \big|_{x=0} = 0. \quad (31.9)$$

В данном случае обратный переход к оригиналу не нужен, так как имеет физический смысл само преобразование Меллина функции $f(x, t)$.

Решение для $m_s(x)$ в рекуррентной форме есть

$$m_s(x) = \int_x^{y_1} \exp \left[\int_0^y \beta(x) dx \right] \left\{ \int_0^y s b(x)^{-1} m_{s-1}(x) \exp \left[- \int_0^x \beta(z) dz \right] dx \right\} dy, \quad (31.10)$$

$$\beta(x) = -a(x) b(x)^{-1}.$$

Для моментов $\bar{m}_s(x)$ времени восстановления имеем

$$\bar{m}_s(x) = \int_{y_1 - n^{-1}}^x \exp \left[\int_0^y \beta(x) dx \right] \left\{ \int_y^{y_2} s b(x)^{-1} m_{s-1}(x) \exp \left[- \int_0^x \beta(z) dz \right] dx \right\} dy, \quad (31.11)$$

$$0 < y_1 \leq x < y_2 < 1.$$

В частности, при $s = 1$ и $x = y_1 - n^{-1}$ из (31.10) получаем формулу для наработки на отказ:

$$T_0 \approx n^{-1} \exp \left[\int_0^{y_1} \beta(x) dx \right] \int_0^{y_1} b(x)^{-1} \exp \left[- \int_0^x \beta(z) dz \right] dx.$$

Аналогично из (31.11) при $s = 1$ и $x = y_1$ находим выражение для среднего времени восстановления:

$$\tau \approx n^{-1} \exp \left[\int_0^{y_1} \beta(x) dx \right] \int_{y_1}^{y_2} b(x)^{-1} \exp \left[- \int_0^x \beta(z) dz \right] dx.$$

При $\lambda = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$ имеем:

$$T_0 = \frac{\exp[\beta y_1] - 1}{\mu - \lambda}; \quad \tau = \frac{1 - \exp[-\beta(y_2 - y_1)]}{\mu - \lambda}.$$

Во избежание утомительного интегрирования в (31.10) и (31.11) в случае переменных $\mu(y)$ и $\lambda(y)$ можно пользоваться формулой

$$T_0 \approx \mu(y_1)^{-1} [1 - K(y_1|y_2 = y_1 + n^{-1})]^{-1},$$

где $K(y_1|y_2 = y_1 + n^{-1})$ — значение $K(y_1)$ при $y_2 = y_1 + n^{-1}$, для определения которого используются табл. 31.1 и 31.2.

31.4. ВЕРОЯТНОСТЬ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ

Рассмотрим обратное уравнение при постоянных значениях коэффициентов a и b

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(x, y_1, t) = a \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y_1, t) + b \frac{\partial^2}{\partial x^2} Q(x, y_1, t), \quad (31.12)$$

$$a = -n^{-1} [\mu - \lambda], \quad b = [\sqrt{2} n]^{-2} [\mu + \lambda],$$

где $Q(x, y_1, t)$ — вероятность перехода системы за время не более t в поглощающее состояние y_1 , т. е. $Q(x, y_1, t)$ — вероятность отказа системы за время t .

Применяя к (31.12) преобразование Лапласа и учитывая начальные и граничные условия

$$Q(x, y_1, 0) = 0; \quad Q(y_1, y_1, t) = 1, \quad x < y_1;$$

$$\frac{\partial}{\partial x} Q(x, y_1, t) |_{x=1} = 0,$$

приходим к решению в изображениях

$$Q^*(x, y_1, s) = s^{-1} \frac{\beta_1 \exp[\beta_2 x] - \beta_2 \exp[\beta_1 x]}{\beta_1 \exp[\beta_2 y_1] - \beta_2 \exp[\beta_1 y_1]}. \quad (31.13)$$

$$\beta_{1,2} = -\frac{a}{2b} \pm \left(\frac{a^2}{4b^2} + \frac{s}{b} \right)^{1/2}.$$

Для высоконадежных систем или систем кратковременного действия при $P(x, y_1, t) = 1 - Q(x, y_1, t)$, близких к единице, имеем (для больших s)

$$\beta_{1,2} \approx -\frac{a}{2b} \pm \left(\frac{s}{b} \right)^{1/2}.$$

Из (31.13) вытекает

$$P^*(x, y_1, s) \approx s^{-1} \left[1 - \exp\left[-\frac{a}{2b}(y_1 - x)\right] \exp\left[-\sqrt{\frac{s}{b}}(y_1 - x)\right] \right]. \quad (31.14)$$

Обратный переход к оригиналу в (31.14) дает

$$P(x, y_1, t) \approx 1 - \exp\left[-\frac{a}{2b}(y_1 - x)\right] 2 \left[1 - \Phi\left(\frac{y_1 - x}{\sqrt{2bt}}\right) \right],$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ — нормальная функция распределения.

При $x = 0$ имеем решение для $P(0, y_1, t)$ при полностью исправном начальном состоянии. При $x = y_1 - n^{-1} p(y_1 - n^{-1}, y_1, t)$ соответствует случаю неисправных резервных элементов в начальный момент времени.

31.5. НЕМАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ НАДЕЖНОСТИ

Предварительно рассмотрим модель с эрланговским временем восстановления с r фазами и параметром $\bar{\mu}$. Нарботка между отказами распределена экспоненциально с параметром $\lambda(y)$. Введением промежуточных состояний, соответствующих моментам окончания фаз восстановления, система сводится к марковской модели.

Обозначив $\mu = \bar{\mu}r^{-1}$, приходим к уравнениям Колмогорова с коэффициентами:

$$\begin{aligned} a(y) &= -n^{-1} [\mu - \lambda(y)]; \\ b(y) &= (\sqrt{2n})^{-2} [\mu r^{-1} + \lambda(y)]. \end{aligned} \quad (31.15)$$

Формулы (31.15) при $r = 1$ совпадают с результатами, полученными для чисто марковских моделей, а при $r = \infty$ дают предельный вариант с постоянным временем восстановления:

$$a(y) = -n^{-1} [\mu - \lambda(y)]; \quad b(y) = (\sqrt{2n})^{-2} \lambda(y). \quad (31.16)$$

Для оценок можно использовать табл. 31.1.

Для перехода к моделям с произвольным распределением времени восстановления воспользуемся известным результатом, что непрерывная положительная случайная величина с плотностью $p(x)$ представима гиперэрланговским распределением вида

$$p(x) = \sum_{i=1}^n p_i \exp[-\mu_i x] \frac{\mu_i (\mu_i x)^{r_i-1}}{(r_i-1)!}. \quad (31.17)$$

Выражения для функций γ , a и b

Тип закона распределения	γ	a	b
1. Экспоненциальное распределение наработки между отказами и восстановлениями	$2n \left(\frac{\mu - \lambda}{\mu + \lambda} \right)$	$-n^{-1} (\mu - \lambda)$	$(\sqrt{2}n)^{-2} (\mu + \lambda)$
2. Экспоненциальное распределение наработки между отказами; постоянное время восстановления	$2n \left(\frac{\mu - \lambda}{\lambda} \right)$	$-n^{-1} (\mu - \lambda)$	$(\sqrt{2}n)^{-2} \lambda$
3. Постоянная наработка между отказами; экспоненциальное время восстановления	$2n \left(\frac{\mu - \lambda}{\mu} \right)$	$-n^{-1} (\mu - \lambda)$	$(\sqrt{2}n)^{-2} \mu$
4. Эрланговские распределения наработки между отказами и времени восстановления с числом фаз r_1 и r_2 соответственно	$2n \left(\frac{\mu - \lambda}{\mu r_2^{-1} + \lambda r_1^{-1}} \right)$	$-n^{-1} (\mu - \lambda)$	$(\sqrt{2}n)^{-2} (\mu r_2^{-1} + \lambda r_1^{-1})$
5. Произвольные плотности распределений наработки между отказами и временем восстановления:	$2n \frac{\sum_i \bar{p}_i^{(2)} \mu_i r_i^{(2)-1} - \sum_i \bar{p}_i^{(1)} \lambda_i r_i^{(1)-1}}{\sum_i \bar{p}_i^{(2)} \mu_i r_i^{(2)-2} + \sum_i \bar{p}_i^{(1)} \lambda_i r_i^{(1)-2}}$	$-n^{-1} \left(\sum_i \bar{p}_i^{(2)} \mu_i r_i^{(2)-1} - \sum_i \bar{p}_i^{(1)} \lambda_i r_i^{(1)-1} \right)$	$(\sqrt{2}n)^{-2} \left(\sum_i \bar{p}_i^{(2)} \mu_i r_i^{(2)-2} + \sum_i \bar{p}_i^{(1)} \lambda_i r_i^{(1)-2} \right)$
$p_1(t) = \sum_i p_i^{(1)} \varphi(\lambda_i r_i^{(1)}, t);$			
$p_2(t) = \sum_i p_i^{(2)} \varphi(\mu_i r_i^{(2)}, t)$			

Решение (31.15), полученное для случая чисто эрланговского распределения, можно обобщить и на случай смеси эрланговских распределений (31.17). Окончательные выражения для $a(y)$ и $b(y)$ имеют вид:

$$a(y) = -n^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \bar{p}_i \mu_i r_i^{-1} + \lambda(y) \right]; \quad (31.18)$$

$$b(y) = [V 2 n]^{-2} \left[\sum_{i=1}^n \bar{p}_i \mu_i r_i^{-2} + \lambda(y) \right],$$

где $\bar{p}_i = \frac{p_i r_i \mu_i^{-1}}{\sum_{k=1}^n p_k r_k \mu_k^{-1}}$ — вероятность того, что в произвольный момент времени

имеет место реализация случайной величины с гамма-плотностью $\varphi(r_i, \mu, t)$.

Аналогичное обобщение имеет место и на случай произвольного распределения наработки между отказами. Примеры выражений для функций a , b и γ для различных законов распределения даны в табл. 31.3 при постоянных значениях λ и μ .

Формулы же для $K(y_1)$, T_0 , τ и $P(x, y, t)$ имеют в этом случае стандартный вид:

$$K(y_1) = \frac{1 - \exp[-\gamma y_1]}{1 - \exp[\gamma y_2]}; \quad T_0 = \frac{\exp[\beta y_1] - 1}{\mu - \lambda};$$

$$\tau = \frac{1 - \exp[\beta(y_2 - y_1)]}{\mu - \lambda};$$

$$P(x, y, t) = 1 - \exp\left[\frac{a}{2b}(y_1 - x)\right] 2 \left[1 - \Phi\left(\frac{y_1 - x}{\sqrt{2bt}}\right)\right], \quad \beta = \gamma = \frac{a}{b}. \quad (31.19)$$

В заключение приведем важное с инженерной точки зрения приближение. В случае переменных $\lambda(y)$ и $\mu(y)$ можно пользоваться моделью со средними постоянными обозначениями λ_{cp} и μ_{cp} , определяемыми следующим образом: находится среднее значение

$$\gamma_{cp} = y_1^{-1} \int_0^{y_1} \gamma(y) dy;$$

определяется значение y_{cp} из равенства

$$\gamma(y_{cp}) = \gamma_{cp};$$

значения λ и μ в точке y_{cp} принимаются за искомые λ_{cp} и μ_{cp} .

ПРИМЕРЫ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ НАДЕЖНОСТИ

Глава 32

НАДЕЖНОСТЬ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

32.1. ОСОБЕННОСТИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Надежность электроэнергетических систем (ЭЭС) уменьшается вследствие: отклонений фактических условий функционирования ЭЭС от расчетных (в результате превышения фактического электропотребления над расчетным или задержки ввода оборудования); отказов элементов системы; снижения ресурсообеспеченности электростанций (нарушений топливоснабжения тепловых электростанций или снижения водообеспеченности гидравлических электростанций); ошибок эксплуатационного персонала.

Действие факторов, снижающих надежность ЭЭС, компенсируется за счет: выбора структуры ЭЭС (конфигурации электрической сети, структуры генерирующих мощностей, структуры системы управления и т. д.); повышения надежности и улучшения технических показателей оборудования; резервирования во всех звеньях системы (производства, преобразования, передачи и распределения электрической энергии, управления), включая обеспечение запасов энергоресурсов; выбора средств автоматического управления системой; улучшения организации эксплуатации ЭЭС, включая совершенствование системы планово-предупредительных ремонтов и повышение качества работы эксплуатационного персонала.

При выборе управляющих воздействий для реализации указанных путей повышения надежности приходится учитывать следующие особенности ЭЭС:

тесные связи с другими отраслями народного хозяйства, прежде всего с системами газо-, нефте- и углеснабжения, обеспечивающими топливоснабжение тепловых электростанций (ТЭС), а также с отраслями, обеспечивающими производство оборудования для ЭЭС (энергомашиностроением, электротехнической промышленностью, приборостроением и т. д.);

значительное территориальное распределение и большое число элементов, формирующих систему;

отчетливо выраженную территориально-временную иерархию построения ЭЭС и управления их режимами;

существенные сезонная и суточная неравномерности режимов электропотребления, приводящие к необходимости планирования неравномерного графика производства электроэнергии и величины резервных мощностей с учетом неравномерного распределения объемов плановых ремонтов оборудования в течение года;

жесткие требования к качеству электроэнергии;

неполноту или недостаточную достоверность информации о параметрах и режимах системы.

Возможности и способы учета некоторых из рассматриваемых особенностей ЭЭС будут рассмотрены далее в примерах.

Общая задача обеспечения надежности ЭЭС состоит в максимизации значений показателей надежности в течение рассматриваемого периода времени за счет располагаемых средств обеспечения надежности. Если рассматривать лишь условия эксплуатации ЭЭС, то в качестве средств повышения надежности можно исполь-

зывать только резервирование, оптимальную настройку средств автоматического управления системой и улучшение организации эксплуатации.

Далее приводятся примеры, в которых определяются показатели надежности электроснабжения потребителей и решения задач распределения резервов мощности в ЭЭС. Определение показателей надежности рассматривается потому, что любая задача синтеза надежности (оптимального резервирования, оптимальной настройки каких-либо средств автоматического управления системой и т. д.) включает в себя в той или иной форме задачу анализа.

32.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

32.2.1. Предварительные замечания. В общем случае расчетную схему ЭЭС при определении показателей надежности электроснабжения потребителей можно представить в виде узлов генерации (электростанций), узлов потребления (нагрузок) и связей между ними ограниченной пропускной способности (электропередач); узлы генерации и потребления могут быть совмещены. Такие системы называют системами со слабыми связями. Только при таком представлении расчетных схем можно (при соответствующей полноте моделирования процессов) отразить и учесть в модели все перечисленные выше особенности ЭЭС, и в частности динамические свойства, из-за которых при случайных возмущениях возможны нарушения устойчивости и каскадные развития аварий.

Иногда можно предположить неограниченность пропускной способности между узлами системы при любых режимах и любых состояниях системы, определяемых случайными состояниями ее элементов. Это соответствует системе с сильными связями, или концентрированной системе. Расчетная схема концентрированной системы является одноузловой (в одном узле размещается вся мощность и вся нагрузка).

Для последующего изложения важны следующие определения мощностей узла или системы в целом:

установленная мощность W^* — сумма номинальных мощностей всех агрегатов узла (системы);
располагаемая мощность W^0 — установленная мощность, уменьшенная из-за несоответствия мощностей последовательно включенных элементов;
рабочая мощность W — располагаемая мощность, уменьшенная на значение располагаемой мощности агрегатов, находящихся в состояниях планового простоя W' и аварийного простоя W'' .

Из этих определений следует

$$W^* = W^0 - W' - W''. \quad (32.1)$$

Показатели надежности электроснабжения потребителей для концентрированных ЭЭС определяют в два этапа:

для каждого узла генерации вычисляются вероятностные характеристики, определяющие рабочую мощность в рассматриваемый период;
в соответствии с полученными данными (с учетом прогнозируемых на период θ графиков нагрузки в каждом из узлов потребления) определяются искомые показатели надежности, отражающие вероятность неполного покрытия нагрузки потребителями системы.

32.2.2. Характеристики рабочей мощности концентрированного узла генерации. Предполагается, что для рассматриваемого периода T известны: состав, мощности и вероятности отказов агрегатов, формирующих располагаемую мощность; мощности агрегатов, выводимых в этот период в плановый ремонт.

С достаточной для практики точностью можно представить схему соединения элементов в узлах генерации в виде параллельного соединения генерирующих элементов. Предположим вначале также, что в течение периода θ состав агрега-

тов, формирующих располагаемую мощность, и мощности агрегатов, выведенных в плановый ремонт, постоянны.

Из (32.1) следует, что вероятностные характеристики рабочей мощности можно найти, если получить вероятностные характеристики мощности в аварийном простое.

Для определения распределения мощности агрегатов в аварийном простое запишем производящую функцию:

$$\varphi(Z) = \prod_{1 \leq i \leq n} (p_i + \bar{q}_i Z^{W_i^0}), \quad (32.2)$$

где $\bar{q}_i$ — вероятность отказа i -го агрегата ($p_i = 1 - q_i$); W^0 — располагаемая мощность i -го агрегата ($i = 1, \dots, n$); Z — аргумент производящей функции.

После раскрытия скобок (32.2) можно переписать в виде полинома по степеням:

$$\varphi(Z) = \sum_{\delta} \prod_{1 \leq i \leq n} p_i^{(1-\delta_i)} q_i^{\delta_i} Z^{1 \leq i \leq n W_i^0 \delta_i}, \quad (32.3)$$

где $\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й агрегат находится в состоянии отказа,} \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$

$\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ — состояние системы, определяемое состояниями агрегатов. Окончательно после приведения подобных членов в (32.3) получаем

$$\varphi(Z) = \sum_{0 \leq k \leq W} P_k Z^k,$$

где k — в общем случае нецелочисленный индекс, равный мощности агрегатов, находящихся в аварийном простое; P_k — вероятность того, что мощность агрегатов в аварийном простое равна ровно k . (Эта вероятность равна сумме коэффициентов слагаемых в (32.3) при всех членах, у которых результирующая степень при Z равна k .)

Процедуру вычислений можно упростить, заменив исходную систему из n разнотипных агрегатов эквивалентной в заданном смысле системой из n однотипных агрегатов, характеризующихся одинаковыми значениями располагаемой мощности $W^{(0)}$ и вероятности отказа q . В этом случае производящая функция (32.2)

$$\varphi(Z) = (\tilde{p} + Z^{\tilde{W}^0} \tilde{q})^n$$

и вероятность P_W аварийного простоя мощности $W = mW^0$, т. е. одновременно m из n эквивалентных агрегатов, составляет

$$P_m = \frac{n!}{m! (n-m)!} \tilde{p}^{n-m} \tilde{q}^m.$$

Полученный закон распределения вероятностей значений $W'' = k$ позволяет при известных W^0 и W' в предположении их неизменности в течение периода T найти, используя (32.1), распределение вероятностей значений рабочей мощности концентрированного узла генерации.

Если период θ относительно продолжителен, то величина W^0 не остается постоянной, а изменяется за счет ввода и демонтажа оборудования. В этом случае период W' разделяется на интервалы, в пределах которых W^0 и W' можно считать неизменными, и вычисления выполняются независимо от отдельных интервалов. (Конечно, объем расчетов при этом заметно возрастает.) Для облегчения вычислений можно использовать некоторые приемы корректировки распределения r_k при изменении состава агрегатов.

Т а б л и ц а 32.1

Значения θ_i и W_i для примера 32.1

i	1	2	3
θ_i/θ	0,3	0,6	0,1
$W_i/W_{\max}$	0,73	0,92	0,96

Т а б л и ц а 32.2

Значения K_i и W_i^0 агрегатов системы
для примера 32.1

i	1	2	3	4
W_i^0	0,6	0,20	0,15	0,05
K_i	0,998	0,997	0,999	0,9

32.2.3. Характеристики концентрированной системы. Здесь основную роль играет неравномерность графика нагрузки системы. Если нагрузку в период θ можно считать постоянной и равной W_0 (например, при оценке надежности по критерию покрытия годового максимума нагрузки системы), то коэффициент готовности вычисляется в соответствии с полученным законом распределения вероятностей P_W по формуле

$$K = 1 - \sum_{v \geq W - W_T} P_v.$$

Можно определить и другие показатели надежности, например: средний дефицит мощности системы Δ_1 , средний недоотпуск электроэнергии Δ_2 , коэффициент обеспеченности электроэнергией π :

$$\Delta_1 = \sum_{v=0}^W (W - v) P_v;$$

$$\Delta_2 = \theta \Delta_1; \quad \pi = 1 - \Delta_1/W.$$

Когда нагрузку в течение времени T нельзя считать неизменной, ее можно задать, например, в виде графика продолжительности с подсчетом показателей K , Δ_1 , Δ_2 и π для каждого интервала постоянства нагрузки с последующим взвешиванием по относительной длительности этих интервалов на всем рассматриваемом периоде.

Пример 32.1. Определить вероятность дефицита мощности в течение периода θ . В периоде θ можно выделить три интервала постоянства нагрузки (значения относительной длительности этих интервалов θ_i и нагрузки потребителей на них W_i приведены в табл. 32.1).

Система включает в свой состав четыре агрегата, коэффициенты готовности и располагаемые мощности которых (в относительных единицах) приведены в табл. 32.2.

Р е ш е н и е. Производящая функция для распределения мощности агрегатов, находящихся в аварийном простое:

$$\begin{aligned} \varphi(Z) = & (0,998 + 0,002Z^{0,6}) (0,997 + 0,003Z^{0,6}) (0,999 + 0,001Z^{0,15}) (0,9 + \\ & + 0,1Z^{0,05}) = 0,894 + 0,1Z^{0,05} + 1 \cdot 10^{-3}Z^{0,15} + 3,1 \cdot 10^{-3}Z^{0,2} + 3 \times \\ & \times 10^{-4}Z^{0,25} + 3 \cdot 10^{-6}Z^{0,35} + 3 \cdot 10^{-7}Z^{0,4} + 2 \cdot 10^{-3}Z^{0,6} + 2 \cdot 10^{-4}Z^{0,65} + \\ & + 2 \cdot 10^{-6}Z^{0,75} + 6,2 \cdot 10^{-6}Z^{0,8} + 6 \cdot 10^{-7}Z^{0,85} + 6 \cdot 10^{-9}Z^{0,95}. \end{aligned}$$

Записанная в развернутом виде производящая функция позволяет легко вычислить интересующую нас характеристику. На первом интервале постоянства

нагрузки в соответствии с табл. 32.1 допускается потеря за счет аварийного простоя не более 0,27 от максимально возможной. Это означает, что следует вычислить сумму всех коэффициентов при тех Z , степень которых меньше 0,27, т. е.

$$P_1 = 0,894 + 0,1 + 1 \cdot 10^{-3} + 3,1 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} = 0,9984.$$

Для второго интервала нужно аналогично вычислить сумму коэффициентов при Z , степень которых не превышает 0,08:

$$P_2 = 0,894 + 0,1 = 0,994.$$

Наконец, для третьего интервала нужно вычислить сумму коэффициентов при Z , степень которых не превышает 0,04:

$$P_3 = 0,894.$$

Итоговое значение вероятности дефицита мощности определяется по формуле

$$P = \frac{1}{T} \sum_{l=1}^3 P_l \theta_l = 0,9984 \cdot 0,3 + 0,994 \cdot 0,6 + 0,894 \cdot 0,1 = 0,98532 \simeq 0,985.$$

32.2.4. Показатели надежности системы со слабыми связями. Рассмотрим возможность применения для данной задачи метода статистического моделирования. При решении задачи можно выделить три этапа: генерацию реализаций случайных процессов отказов — восстановлений всех элементов, представленных в расчетной схеме системы; определение последствий каждого отказа; вычисление искомых показателей надежности электроснабжения потребителей.

Расчетная схема системы включает M узлов генерации, совмещенных с узлами потребления и связи между ними. Расчетный период θ делится на такие интервалы θ_l , $l = 1, \dots, h$, что в пределах каждого из них можно полагать неизменными состав агрегатов, формирующих W^0 и W' , и нагрузки в узлах. (Здесь продолжительность интервала θ_l учитывает и неравномерность электропотребления.)

При построении отдельных реализаций случайного процесса отказов — восстановлений элементов системы на первом этапе необходимо иметь в виду следующие условия: отказ любого отдельного элемента не может иметь места в период его планового простоя, и периоды аварийных простоев элемента не должны совпадать с периодами его плановых простоев; для последовательно соединенных элементов должны учитываться вынужденные простои в исправном состоянии, связанные с аварийными простоями смежных элементов.

Примечание. При моделировании следует выделить в расчетной схеме системы коммутационно-независимых элементов или групп элементов, состояния которых могут зависеть друг от друга внутри группы, но не зависят от состояния элементов других групп. Формирование реализаций для каждой коммутационно-независимой группы элементов может осуществляться независимо.

После генерации случайных реализаций процесса функционирования ЭЭС для определения последствий каждого из реализовавшихся отказов элементов в каждом из интервалов θ_l находят значения дефицита мощности Δ_1 и недоотпуска электроэнергии Δ_2 каждого j -го узла генерации при k -й реализации, используя выбранный критерий оптимизации, например условие минимизации дефицита электроэнергии по системе в целом. (В случае различных требований к надежности электроснабжения потребителей отдельных узлов возможно формирование других критериев оптимизации, учитывающих эти требования.)

Эта задача для значений переменных, фиксированных для данной k -й реализации, решается соответствующим методом линейного программирования.

В соответствии с полученными данными на третьем этапе вычисляются искомые показатели надежности электроснабжения потребителей каждого j -го узла системы.

П р и м е ч а н и е. До сих пор предполагалось, что моделируются постепенные отказы, когда эксплуатационный персонал, реагируя на определенные внешние проявления, имеет возможность подготовить вывод элемента из работы (разгрузить агрегат, изменить режим работы системы и т. д.). В этих случаях, как правило, возможность нарушения устойчивости системы исключается. При внезапных же отказах (например, коротких замыканиях на линиях электропередачи) возможны нарушения устойчивости, а при неблагоприятных условиях — и дальнейшее (каскадное) развитие аварии.

Определение показателей надежности при учете внезапных отказов осуществляется принципиально так же, как описано выше. Но, здесь, во-первых, при подготовке статистических данных должны учитываться как прогнозируемые, так и внезапные отказы элементов (для некоторых элементов при этом существен не просто факт отказа, но и вид повреждения его вызывающий).

Следует учитывать, что между моментом внезапного отказа и началом периода восстановления может пройти некоторый промежуток времени, определяемый процессом локализации места отказа и восстановлением стационарного режима в случаях нарушения устойчивости, а тем более — при каскадном развитии аварии. Поэтому после внезапного отказа необходим расчет переходного электромеханического процесса систем с моделированием поведения систем автоматического управления с учетом возможности отказов срабатывания, а также излишнего и ложного срабатываний.

Учет внезапных отказов существенно усложняет процесс определения показателей надежности электроснабжения потребителей. Поэтому обычно используются различные упрощающие предположения, опирающиеся на конкретные условия функционирования ЭЭС.

32.3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕЗЕРВОВ МОЩНОСТИ В ЭЭС

На значение оперативного резерва мощности, обеспечивающего надежность электроснабжения потребителей, можно воздействовать только за счет оптимального планирования ремонтов генерирующего оборудования, т. е. распределением полного резерва мощности между его ремонтной и оперативной составляющими.

Задача формулируется следующим образом. При заданных во времени в период θ располагаемой мощности и суммарной нагрузке каждого узла системы, т. е. резерве узла, длительности плановых ремонтов агрегатов, ограничениях на условия проведения ремонтов и на перетоки мощности по связям, определить для каждого узла значения оперативной и ремонтной составляющих резерва и составить график плановых ремонтов исходя из обеспечения, например, максимально возможной надежности электроснабжения потребителей системы в рассматриваемый период. При решении задачи показателем надежности целесообразно выбирать коэффициент обеспеченности электроэнергией λ .

Продолжительность периода θ при годовом планировании режимов принимается равной одному году; при этом продолжительность интервалов, на которые делится период θ , целесообразно принять равной одной неделе, а в качестве интервальных значений нагрузки узлов использовать максимальные значения ее в течение недели.

Сформулированная задача решается поэтапно: на первом этапе осуществляется предварительное распределение во времени резервов мощности узлов между их оперативной и ремонтной составляющими с учетом требуемого объема плановых ремонтов в каждом из узлов, во втором этапе для каждого узла независимо составляется график плановых ремонтов генерирующих агрегатов с учетом определенных на первом этапе свободных мощностей, которые допустимо снимать для проведения ремонтов; на третьем этапе уточняется распределение резервов, выполненное на первом этапе, с учетом составленных графиков плановых ремонтов.

НАДЕЖНОСТЬ МАГИСТРАЛЬНЫХ ГАЗО- И НЕФТЕПРОВОДОВ

33.1. ЗАДАЧИ РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ

Системы трубопроводного транспорта газа и нефти составляют основу системы топливоснабжения страны. Основные потоки газа и нефти направляются по многочисленным трубопроводам, которые разделяются компрессорными или насосными станциями на отдельные линейные трубопроводные участки. Станции восполняют потери энергии потока, связанные с преодолением гидравлического сопротивления течению в трубопроводе и перепада высот на предыдущем линейном участке.

Участок многониточного трубопровода представляет собой систему параллельных трубопроводов (возможно различного диаметра), гидравлическое взаимодействие которых осуществляется через переключки. Управление кранами на переключках позволяет изменять режим течения. На станциях установлены перекачивающие агрегаты, которые можно включать в работу различными способами в зависимости от предусмотренной системы трубопроводов обвязки. На нефтепроводах используются главным образом электроприводные агрегаты, а на газопроводах — газотурбинные, топливом для которых служит транспортируемый газ. На топливные нужды газопроводов большой протяженности расходует-ся более 10% транспортируемого газа.

Параметры режима перекачки — производительность (расход), давление на входах и выходах станций и температура продукта — изменяются во времени в зависимости от состояния трубопровода и применяемых управляющих воздействий. Цели управления нельзя сформулировать однозначно. Чаще всего применяются критерии максимума производительности и минимума энергетических затрат на перекачку при заданной производительности.

Исследование надежности трубопроводов имеет целью:

обосновать при проектировании выбор технологической схемы и параметров трубопровода (диаметр, количество и расположение станций, количество и типоразмер агрегатов, производительность);

оценить возможные потери пропускной способности трубопровода при отказах оборудования;

оценить надежность (вероятность) обеспечения спроса и другие характеристики надежности газо- или нефтеснабжения;

выбрать рациональные способы резервирования для обеспечения требуемой надежности функционирования трубопровода;

определить требования к системе технического обслуживания и ремонта;

обосновать требования к надежности других объектов системы.

Основным показателем качества функционирования трубопровода является его пропускная способность, т. е. максимальное количество продукта, которое может быть передано в единицу времени при условии гарантированной подачи продукта в требуемом объеме и с нужными параметрами в начальную точку трубопровода. Снижение пропускной способности по сравнению с номинальной считается отказом объекта (частичным или полным).

Пропускная способность является характеристикой производственной мощности трубопровода при данном его состоянии, которое определяется комбинацией исправных и неисправных элементов линейных участков и станций. Состояние задает характеристики оборудования, возможные схемы коммутации и множества допустимых управлений. Пропускная способность является однозначной функцией состояния.

Изменение состояния трубопровода представляет собой случайное событие. Пропускная способность рассматривается как случайная величина φ с конечным

множеством значений $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$. Для ее описания достаточно задать вероятности H_k того, что пропускная способность φ примет значение $\varphi_k, k = 0, 1, \dots, m$.

Вероятность H_k можно условно рассматривать как долю планового периода времени, в течение которого пропускная способность трубопровода равна φ_k . Знание H_k позволяет вычислить все основные показатели надежности трубопровода, в частности его среднюю пропускную способность

$$\bar{\varphi} = \sum_{k=0}^m H_k \varphi_k.$$

Если упорядочить значения φ_k по убыванию: $\varphi_0 > \varphi_1 > \dots > \varphi_m$ (φ_0 — номинальная пропускная способность), то функция надежности трубопровода примет вид

$$R(x) = P\{\varphi \geq x\} = \begin{cases} 1, & x \leq \varphi_m, \\ \sum_{k=0}^{l-1} H_k, & \varphi_l < x \leq \varphi_{l-1}, \\ 0, & x > \varphi_0. \end{cases}$$

Величина $B = \bar{\varphi}/\varphi_0$ называется коэффициентом сохранения эффективности трубопровода.

Спрос на газ зависит от многих факторов, в том числе от погодных условий, и, следовательно, не может считаться постоянным. Пусть $E(x) = P\{\tilde{\varphi} < x\}$ — функция распределения спроса $\tilde{\varphi}$. Тогда надежность его обеспечения, т. е. вероятность события $\varphi \geq \tilde{\varphi}$, равна $-\int_0^{\varphi_0} E(x) dR(x)$.

Таким образом, задача расчета надежности трубопровода состоит в исследовании изменения его пропускной способности в зависимости от частоты и продолжительности отказов его элементов — агрегатов и трубопроводов линейных участков. Расчет состоит из трех этапов: оценка параметров надежности элементов; выбор моделей надежности и расчет распределений вероятности состояний для линейных участков и станций (звеньев трубопровода); расчет распределения вероятностей пропускной способности и показателей надежности трубопровода. Первый этап предусматривает статистическую обработку данных эксплуатации элементов и проводится с использованием стандартных процедур. Особенности технологии транспорта нефти и газа учитываются главным образом на втором и третьем этапах расчета.

33.2. МОДЕЛИ НАДЕЖНОСТИ ЗВЕНЬЕВ ТРУБОПРОВОДА

Надежность звеньев магистральных трубопроводов (линейных участков и станций) рассчитывается большей частью с помощью стандартных аналитических методов. Далее будут приведены лишь те примеры расчетов, которые отличаются какой-либо спецификой.

Для описания процессов функционирования звено разбивается на элементы. Элементами участка (рис. 33.1) являются части трубопроводной нитки между переключками. Отказами переключек можно пренебречь и не включать переключки в число элементов. Для элемента участка предусматриваются или два возможных состояния (исправное и неисправное), или три (исправное, полный отказ, частичный отказ). Нарботка между отказами имеет экспоненциальное распределение, а распределение времени восста-

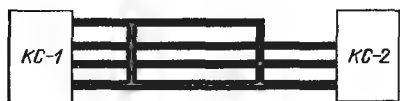


Рис. 33.1. Схема трехниточного линейного участка с лупингом и переключками

новления сглаживается распределением Эрланга.

Элементами станции (рис. 33.2) служат агрегаты и общестанционные устройства. Для агрегатов предусматривается или два состояния (исправное и неисправное), или три (исправное, восстановление, профилактика). Отказами агрегатов, находящихся в резерве, пренебрегают.

Состояние звена характеризуется состоянием всех его элементов.

Функционирование звена описывается процессом перехода из состояния в состояние. Для расчета вероятностей состояний звена используются аналитические методы или методы статистического моделирования.

При параллельно-последовательной схеме работы агрегатов на станции приходится учитывать особенности обвязки, так как фактически при любой схеме обвязки существуют такие состояния, в которых исправные агрегаты не могут быть использованы в рабочем процессе.

Рассмотрим типовую схему обвязки компрессорной станции с шестью агрегатами (рис. 33.2). В нормальном состоянии на станции работают две параллельные группы по два последовательно включенных агрегата в каждой и два агрегата находятся в резерве. Из-за отказов агрегатов станция может быть вынужденно переведена на схему работы с тремя или с двумя параллельно включенными агрегатами при одноступенчатом сжатии. Работа одного исправного агрегата на линии не допускается.

В проектном режиме в рабочем процессе участвуют агрегаты 1, 2 (первая группа) и 5, 6 (третья группа), включенные параллельно-последовательно. Агрегаты второй группы 3, 4 являются резервными. При отказе вышедший из строя агрегат первой или третьей группы может быть заменен резервным. Обвязка стан-

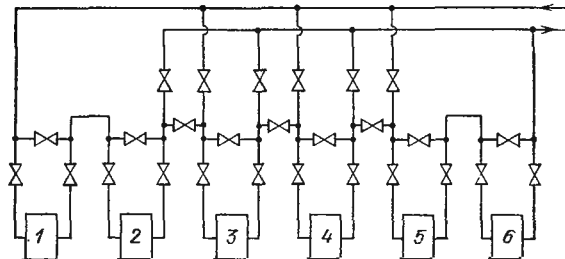


Рис. 33.2. Универсальная схема обвязки станции с шестью агрегатами

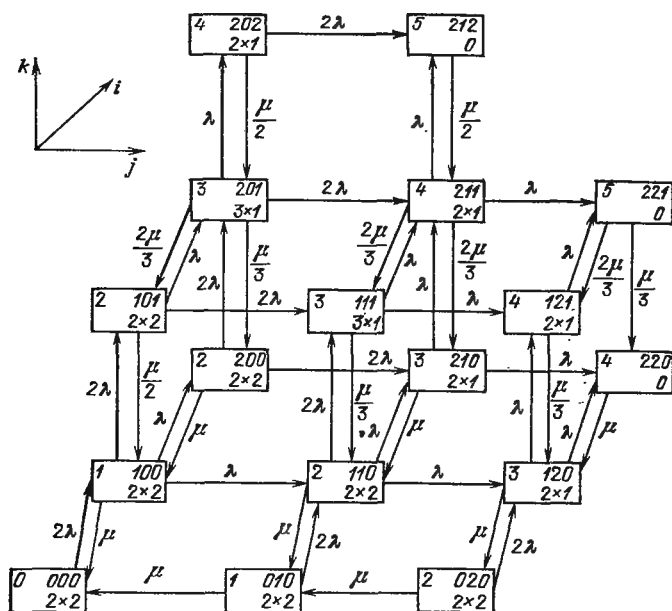


Рис. 33.3. Фрагмент диаграммы переходов для расчета станции с шестью агрегатами

ции не позволяют параллельно включать агрегаты первой или третьей группы, поэтому при отказе трех агрегатов возможны схемы 3×1 или только 2×1 , а отказ четырех агрегатов приводит или к схеме 2×1 , или к отключению станции.

Попытка учесть точно все особенности смены состояний звена потребовала бы рассмотрения графа переходов, содержащего 64 состояния. Для упрощения проведем группировку состояний и укрупненные состояния разметим с помощью трех индексов i, j, k , значения которых указывают число отказавших агрегатов в первой, второй и третьей группах соответственно. Если учесть симметрию расположения агрегатов первой и третьей групп, то получим условие $p_{ijk} = p_{kji}$, что позволяет принять во внимание только 18 неизвестных вероятностей.

При определении интенсивностей переходов от состояний с большим значением $l = i + j + k$ к меньшему (рис. 33.3) учтено, что имеется лишь одна ремонтная единица, которая направляется на восстановление первого отказавшего элемента. Для пояснения рассмотрим, как вычисляется интенсивность перехода из состояния 101 в состояние 100. Состоянию 101 соответствуют такие последовательности номеров отказавших агрегатов: 1—5, 1—6, 2—5, 2—6, 5—1, 5—2, 6—1, 6—2. В состоянии 100 можно перейти лишь за счет восстановления агрегата третьей группы, но существует лишь 4 комбинации из 8, при которых ремонтируются агрегаты третьей группы. Поскольку все указанные последовательности равновероятны, то интенсивность перехода из 101 в 100 следует положить равной $\mu/2$. Агрегаты второй группы используются в среднем реже, чем агрегаты первой и третьей групп.

33.3. РАСЧЕТ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ ТРУБОПРОВОДА

Модель надежности трубопровода имеет две части: теоретико-вероятностную и гидравлическую. Первая устанавливает связь между распределениями вероятностей состояний трубопровода и его звеньев, вторая — между состоянием трубопровода и его пропускной способностью.

Состояние трубопровода описывается случайным вектором $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ где s_i — состояние i -го звена. Случайные величины s_i имеют дискретное распределение и независимы в совокупности. Вероятность $G(s)$ состояния s трубопровода равна произведению вероятностей $G_i(s_i)$ состояний звеньев, $i = 1, \dots, n$.

Расчет $\varphi(s)$ — пропускной способности трубопровода в состоянии s — является довольно сложной оптимизационной задачей. Он требует вычисления максимальной производительности с учетом разнообразных технологических ограничений (по расходуемой мощности агрегатов, давлению в характерных точках, температуре транспортируемого продукта, скорости вращения нагнетателей и др.). Одновременно должны быть найдены управляющие воздействия на станциях, т. е. допускаемая обвязкой схема включения агрегатов, скорость вращения нагнетателей с регулируемым приводом, степень дросселирования потока на входах и выходах станций и другие параметры, связанные условиями в виде алгебраических уравнений и неравенств.

Детальный учет особенностей технологического оборудования и схемы функционирования трубопровода требует создания достаточно громоздких программ. Одна из распространенных вычислительных процедур определения пропускной способности магистрального газопровода сводится к двумерной схеме динамического программирования, в которой фазовыми координатами служат расход и давление, а шагом процесса является переход от одного звена к другому.

Дело осложняется тем, что при анализе надежности нельзя игнорировать состояния с большим числом отказов, во-первых, потому, что суммарная вероятность этих состояний достаточно велика, а во-вторых, потому, что результатом наложения отказов обычно является лишь частичное снижение пропускной способности.

Вероятностная и гидравлическая модели трубопровода должны быть соразмерены по точности, поэтому не следует слишком скрупулезно учитывать второстепенные факторы при гидравлическом расчете. К тому же многие эмпирические параметры трубопровода (например, коэффициент гидравлического сопротивления участка) задаются с достаточно большой степенью неопределенности.

Разным состояниям трубопровода могут соответствовать одинаковые значения пропускной способности. Построим модель так, чтобы свести к минимуму число расчетов гидравлического режима. При достижении максимальной производительности, по крайней мере, одно из технологических ограничений в виде неравенств выполняется жестко, т. е. превращается в равенство. Нарушение на каком-либо звене, приводящее к снижению пропускной способности, проявляется в невозможности поддерживать на прежнем уровне энергию потока. Естественно считать, что режим максимальной производительности определяется двумя ограничениями (рис. 33.4): по наименьшему давлению на входе станции $p_{\min}$ и максимальному давлению нагнетания $P_{\max}$. Обозначим P_i давление в начале участка, p_i — давление в конце участка, φ_i — расход по i -му участку, $i = 1, \dots, n$.

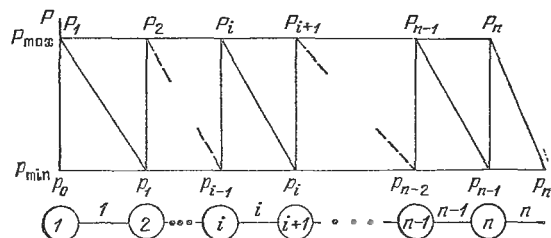


Рис. 33.4. Схема условного газопровода

Идею метода поясним на примере магистрального газопровода с одинаковыми участками и компрессорными станциями (КС). Газопровод начинается головной КС и кончается линейным участком (см. рис. 33.4). Давления на концах i -го участка связаны с расходом уравнением

$$P_i^2 - p_i^2 = A_i (s_i) \varphi_i^2, \quad (33.1)$$

где коэффициент $A_i (s_i)$ характеризует структуру и гидравлическое сопротивление участка в состоянии s_i .

Взаимосвязь параметров на входе и выходе станции зададим приближенным соотношением

$$P_i^2 \simeq a_i (s_i) p_{i-1}^2 + b_i (s_i) \widehat{\varphi}_i^2, \quad (33.2)$$

где $a_i (s_i)$, $b_i (s_i)$ — коэффициенты аппроксимации напорной характеристики КС; $\widehat{\varphi}_i$ — расход через КС с номером i .

В силу предположений

$$A_1 = \dots = A_n = A; a_1 = \dots = a_n = a; b_1 = \dots = b_n = b, \quad (33.3)$$

если газопровод находится в нормальном состоянии. Кроме того, в любом состоянии:

$$\varphi_1 = \dots = \varphi_n = \widehat{\varphi}_1 = \dots = \widehat{\varphi}_n = \varphi; \quad (33.4)$$

$$p_i \geq p_{\min}, i = 1, \dots, n-1; P_i \leq P_{\max}, i = 1, \dots, n. \quad (33.5)$$

Для определенности задачи следует считать известными P_0 и p_n .

При отказе элемента на участке i пропускная способность газопровода определяется пропускной способностью этого участка при условиях $P_i = P_{\max}$, $p_i = p_{\min}$. При отказе элемента КС с номером i пропускная способность газопровода определится пропускной способностью подсистемы, состоящей из этой КС и двух прилегающих к ней участков, при условиях $P_{i-1} = P_{\max}$, $p_i = p_{\min}$.

Соотношения (33.1)–(33.5) позволяют в явном виде найти пропускную способность, если вследствие отказа на линейном участке изменился коэффициент A или вследствие отказа на одной КС изменились коэффициенты a и b , а также

при одновременном отказе связанных элементов, например, на КС и прилагающих к ней участках. Достаточно воспользоваться соотношениями (33.1)—(33.5) только для тех звеньев, которые входят в «узкое место», а также значениями давления в граничных точках.

Если одновременно произошел отказ двух элементов, расположенных в гидравлически не связанных звеньях, причем один приводит к пропускной способности $\tilde{\varphi}_1$, а другой — к $\tilde{\varphi}_2$, то, очевидно, пропускная способность газопровода $\tilde{\varphi} = \min [\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2]$.

Для газопроводов с большим числом элементов вероятность одновременного отказа связанных элементов мала по сравнению с вероятностью одновременного отказа несвязанных элементов. Любые два участка являются гидравлически не связанными, а КС и участок гидравлически связаны, если граничат друг с другом. Соседние станции гидравлически связаны. Если КС не являются соседними, то они гидравлически не связаны. Общее число отказов двух КС равно C_n^2 , из них гидравлически связаны $n - 1$.

Отказы КС или линейного участка приводят к снижению пропускной способности до одного из возможных уровней $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$. Подсчитаем вероятности $H_1, H_2, \dots, H_m$ этих уровней, считая известными вероятности отказов элементов. Газопровод расчленяется на n одинаковых звеньев, если звеном считать КС со следующим за ней участком. Из-за отказов элементов одного звена возможно снижение пропускной способности до одного из перечисленных значений. Обозначим пропускную способность звена в безаварийном состоянии φ_0 , а вероятность такого состояния H_0 .

Разобьем все возможные состояния на группы, объединив в одну группу те из них, которые приводят к одной и той же пропускной способности. Общее число групп равно $m + 1$. Вероятность H_0 того, что газопровод имеет пропускную способность φ_0 , равна $H_0 = G_0^n$, где G_0 — вероятность того, что звено (любое) имеет пропускную способность φ_0 .

Газопровод имеет пропускную способность φ_l , если у одного или более звеньев точно такая же пропускная способность, а у всех остальных — пропускная способность φ_0 . Таким образом, $H_l = (G_0 + G_l)^n - H_0$. Аналогично записывается общая формула

$$H_l = \left(\sum_{k=0}^l G_k \right)^n - \left(\sum_{k=0}^{l-1} G_k \right)^n, \quad l = 1, \dots, m, \quad (33.6)$$

где G_k указывает вероятность того, что звено имеет пропускную способность φ_k , $k = 0, 1, \dots, m$.

Полученное распределение позволяет построить функцию надежности газопровода в виде

$$R(x) = \begin{cases} 1, & x \leq \varphi_m, \\ \left(\sum_{k=0}^l G_k \right)^n, & \varphi_{l+1} < x \leq \varphi_l, \\ 0, & x > \varphi_0. \end{cases}$$

и вычислить все показатели надежности.

Откажемся теперь от предположения об однотипности звеньев газопровода. Рассмотрим три состояния газопровода s^l, s', s'' . В состоянии s^l в звене l имеется один или несколько невосполнимых за счет резерва отказов элементов, а в остальных звеньях число отказавших элементов не превышает резерва. В состоянии s'' отказавшие сверх резерва элементы получаются объединением отказавших элементов в состояниях s^l и s' . Пусть $\varphi_l, \varphi_r, \varphi_{lr}$ — соответствующие рассматриваемым состояниям значения пропускной способности газопровода. Тогда

$$\varphi_{lr} \leq \min [\varphi_l, \varphi_r]. \quad (33.7)$$

Если в неравенстве (33.7) поставив знак равенства, т. е. считая звенья l и r гидравлически не связанными, то функция надежности газопровода $R(x) = P\{\varphi(s) \geq x\}$ может быть получена как произведение функций надежности звеньев: $R(x) = R_1(x)R_2(x) \dots R_n(x)$.

Функция надежности $R_i(x)$ вычисляется в предположении, что отказы случаются только на i -м звене. Конструктивное вычисление функций R_i не встречается трудностей, так как число состояний звена, приводящих к различным значениям пропускной способности, не очень велико.

Попробуем оценить погрешность этого метода при вычислении средней пропускной способности. Рассмотрим в качестве примера газопровод, состоящий из n звеньев по m рабочих элементов в каждом звене. Отсутствие резервных элементов не является ограничением расчета, а вводится, чтобы получить оценку, наверняка превышающую истинное значение ошибки. Общее число элементов обозначим $N = mn$, а вероятность выхода из строя одного элемента примем равной $1 - p$.

Ошибка в вычислении математического ожидания привносится теми состояниями, при которых одновременно отказывают два или более элементов, причем отказы должны иметь место на разных, но смежных звеньях. Общее число состояний с двумя отказавшими элементами равно C_N^2 , из них nC_m^2 соответствуют одновременным отказам на одном звене и $C_N^2 - nC_m^2$ — на разных звеньях. Количество состояний с отказами на смежных звеньях равно $m^2(n - 1)$, т. е. их доля от всех состояний с двумя отказавшими элементами $\mu_2 = 2(1 - 1/n)/n(1 - 1/N)$. Аналогично состояния с тремя отказами

$$\mu_3 = 6(1 - 1/n)/n(1 - 1/N)(1 - 2/N) [(1 - 3/n) + (1 - 1/m) \times (1 - 1/n)/n(1 - 1/N)].$$

Верхнюю оценку ошибки $\Delta\bar{\varphi}$ при вычислении математического ожидания пропускной способности сопоставим с относительной ошибкой $\delta = \Delta\varphi/\varphi$, связанной с переходом в (33.7) от неравенства к равенству. Имеем

$$\Delta\bar{\varphi} \leq \delta \sum_{k=2}^N \mu_k P_k,$$

где $P_k = C_N^k p^{N-k} (1 - p)^k$ — вероятность одновременного отказа k элементов.

Так как все $\mu_k \leq 1$, то $\Delta\bar{\varphi} \leq \delta (\mu_2 P_2 + \mu_3 P_3 + \sum_{k=4}^N P_k)$.

Произведем ориентировочный расчет, положив: $m = n = 10$; $p = 0,99$; $\delta = 0,05$. Получаем: $P_0 = 0,3631$; $P_1 = 0,3668$; $P_2 = 0,1834$; $P_3 = 0,061$; $\mu_2 = 0,18$; $\mu_3 = 0,39$ и, значит, $\Delta\bar{\varphi} \leq 0,0032$. Ошибка 0,3% не превышает точности гидравлического расчета и, безусловно, удовлетворяет требованиям к точности оценки показателей надежности магистральных трубопроводов.

33.4. ВРЕМЕННОЕ РЕЗЕРВИРОВАНИЕ В СИСТЕМАХ ГАЗО- И НЕФТЕСНАБЖЕНИЯ

Создание запасов является одним из средств обеспечения надежности газовой и нефтеснабжения. Продукт аккумулируется в подземных хранилищах газа (ПХГ) или в резервуарных парках (РП) на магистральных нефтепроводах. Концевые емкости способствуют уменьшению глубины дефицита и стабилизируют график подачи. Промежуточные емкости, выполняя функции стабилизации, способствуют еще и увеличению производительности магистрали. Хранилища газа используются также для сглаживания сезонной неравномерности потребления, а резервуарные парки нефтепроводов — для обеспечения более выгодных режимов перекачки нефти.

Рассмотрим задачу определения параметров концевой емкости. В осенезимний период (длительностью T) режимы функционирования системы газоснабжения особенно напряженные. Рассчитаем запас в ПХГ, необходимый для покрытия аварийных дефицитов за период T . Для этого построим функцию распределения $F(x, T)$ общего дефицита

$$F(x, T) = P\{\xi(T) < x\}.$$

Надежность снабжения характеризуется вероятностью α покрытия дефицита. Значение необходимого объема запаса V получается как α -квантиль распределения ξ : $F(V; T) = \alpha$. Сгруппируем возможные состояния трубопровода по значениям пропускной способности φ_k , $k = 0, 1, \dots, K$. Пусть ω_k — время пребывания в состоянии k за период T , тогда ξ является композицией величин ω_k :

$$\xi = \sum_{k=1}^K (\varphi_0 - \varphi_k) \omega_k,$$

где φ_0 — номинальная пропускная способность.

Отказы, при которых целесообразно использование хранилищ, являются редкими событиями. Обозначим λ параметр потока отказов. Если время восстановления — экспоненциально распределенная случайная величина с параметром μ , то функция распределения времени восстановления за период T

$$\Phi_1(x, T) = e^{-\lambda T} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\lambda T)^i}{i!} e^{-\lambda T} \frac{\gamma(i, \mu x)}{(i-1)!}, \quad (33.8)$$

где $\gamma(x_1, x_2)$ — неполная гамма-функция.

Приближая время восстановления распределением Эрланга со средним μ^{-1} и дисперсией $l^{-2}\mu^{-1}$, получаем функцию

$$\Phi_l(x, T) = e^{-\lambda T} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\lambda T)^i}{i!} e^{-\lambda T} \frac{\gamma(il, \mu l x)}{(il-1)!}, \quad (33.9)$$

из которой (33.8) получается как частный случай при $l = 1$.

Если каждый отказ приводит к полному прекращению подачи, то функция распределения ξ выражается через $\Phi_l(x, T)$:

$$F(x, T) = \Phi_l(x/\varphi_0, T). \quad (33.10)$$

В общем случае параметр потока событий, переводящих систему в состояние k , обозначим λ_k , а среднее время восстановления μ_k^{-1} . Тогда $F(x, T)$ можно приближенно вычислить по формуле (33.10), положив:

$$\lambda = \sum_{k=1}^K \lambda_k; \quad \mu^{-1} = \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_k}{\lambda} \mu_k^{-1} \frac{\varphi_0 - \varphi_k}{\varphi_0}.$$

Ряды в (33.8) и (33.9) могут быть просуммированы без особых трудностей. Расчеты показывают существенную зависимость распределения (33.9) от параметра l (рис. 33.5).

Распределение количества продукта в концевой емкости, предназначенной для регулирования аварийных дефицитов. Состояние системы «трубопровод—хранилище» в момент t можно охарактеризовать парой случайных величин (ξ, η) . Компонента ξ определяет состояние трубопровода и относится к дискретному типу с множеством возможных значений $\{1, \dots, K\}$. Компонента η определяет состояние хранилища $0 \leq \eta \leq V$ и является случайной величиной смешанного типа. В соответствии с этим процесс функционирования системы описывается двумя K -мерными векторами $P'(t)$, $P''(t)$, компоненты которых $P'_k(t)$, $P''_k(t)$ представляют собой вероятности состояний $\{k, 0\}$ и $\{k, V\}$, $k = 1, \dots, K$, и век-

тор-функцией $\{f_k(x, t)\}$, где $f_k(x, t)dx = P\{\xi(t) = k, x < \eta(t) < x + dx\}$, $k = 1, \dots, K$.

Если время пребывания в каждом состоянии k имеет экспоненциальное распределение, то процесс функционирования марковский. Система уравнений Колмогорова для стационарного случая в матричной форме принимает вид:

$$\begin{aligned} Q \frac{df}{dx} &= Mf; \quad Qf(0, \infty) = MP'(\infty); \\ -Qf(V, \infty) &= MP''(\infty), \end{aligned} \quad (33.11)$$

где Q — диагональная матрица; Q_{kk} определяет превышение поставок над спросом в состоянии k ; $M = \{m_{ij}\}$ — стохастическая матрица; m_{ij} ($i \neq j$) — интенсивность перехода из состояния i в состояние j ; $m_{ii} = 1 - \sum_{j \neq i} m_{ij}$.

Влияние промежуточных емкостей на повышение производительности трубопровода.

Рассмотрим цепочку n последовательных участков с расположенными между ними $n - 1$ резервными емкостями. Для оценки производительности системы хорошее приближение дает метод Севастьянова. В предположении об экспоненциальности всех распределений обозначим λ_k^{-1} , μ_k^{-1} среднюю наработку и среднее время восстановления k -го участка, v_k — емкость хранилища, следующего за этим участком.

Вводя $2(n - 1)$ неизвестных a_{k+1} ; b_k , $k = 1, \dots, n - 1$, получаем для них алгебраическую систему уравнений:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 1 + a_k \frac{y_k}{y_{k+1}} g\left(\frac{b_{k+1} y_{k+1}}{a_k y_k}, \theta_k\right); \\ b_k &= 1 + b_{k+1} \frac{y_{k+1}}{y_k} g\left(\frac{a_k y_k}{b_{k+1} y_{k+1}}, \theta_k\right), \end{aligned} \quad (33.12)$$

$$k = 1, \dots, n - 1,$$

где $y_k = \lambda_k / \mu_k$; $\theta_k = \mu_{k+1} v_k [1 + y_{k+1} b_{k+1} / (y_k a_k)] / [1 + b_{k+1} \lambda_{k+1} / (a_k \lambda_k)]$; функция $g(\xi, \theta)$ определяется формулой

$$g(\xi, \theta) = \begin{cases} \frac{\xi - 1}{\xi \exp\{\theta(\xi - 1)/(\xi + 1) - 1\}} - 1, & \xi \neq 1, \\ 1/(1 + \theta/2), & \xi = 1. \end{cases}$$

Система (33.12) решается методом последовательных приближений. В качестве начального приближения выбирается $a_{k+1} = b_k = 1$. В практических расчетах итерационный процесс быстро сходится. Изложенная методика позволяет решать ряд оптимизационных задач. В табл. 33.1 показано, как влияет суммар-

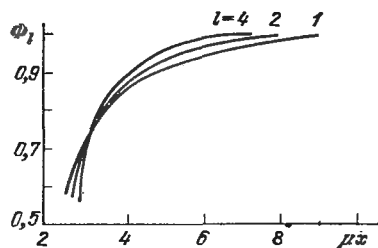


Рис. 33.5. Графики функции $\Phi_1(x, T)$ при $\lambda T = 2$; $\mu^{-1} = 120$ ч; $l = 1, 2, 4$

Таблица 33.1

Коэффициент сохранения эффективности для трубопровода длиной 1000 км

V	n			
	2	3	4	5
5	0,9656	0,9642	0,9616	0,9686
20	0,9706	0,9724	0,9724	0,9714
40	0,9729	0,9761	0,9776	0,9780
60	0,9740	0,9780	0,9800	0,9808

ная емкость V и число хранилищ $n - 1$ на производительность системы. Емкость измеряется в часах работы трубопровода при номинальном режиме. Все участки одинаковы. Емкость каждого хранилища не зависит от его положения и равна $V/(n - 1)$. Интенсивности отказов и восстановления характерны для системы нефтеснабжения.

Увеличивая суммарную емкость, можно существенно повысить производительность системы, если одновременно увеличивать количество хранилищ. Малую емкость следует сосредоточивать в середине трубопровода.

Глава 34

НАДЕЖНОСТЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

34.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Типичным примером сложной системы являются современные территориальные автоматизированные системы управления (АСУ) или сети ЭВМ, представляющие собой совокупность объектов управления — вычислительных центров (ВЦ) — различных уровней иерархии, объединяемых в единое целое сетью (системой) обмена данными — информационной сетью (ИС), через которую осуществляется целевое взаимодействие объектов управления или ВЦ друг с другом. При этом объекты управления АСУ, будучи источниками и получателями информации, являются оконечными узлами ИС. Кроме того, для обеспечения возможности использования различных путей передачи информации между заданными парами оконечных узлов, а также для увеличения коэффициента использования каналов связи в ИС обычно предусматриваются специальные элементы, называемые узлами коммутации. Важно подчеркнуть, что независимо от числа уровней иерархии, определяющих структуру управления АСУ, физическая структура построенных по такому принципу систем управления по существу определяется структурой ИС. На этом основании будем описывать физическую структуру АСУ или сетей ЭВМ с помощью математического аппарата и подходов, которые обычно используются при исследовании информационных сетей.

Модель ИС можно представить в виде взвешенного графа $G(A, B)$, где A — множество вершин графа $\{a_i\}$; B — множество ребер $\{b_{ij}\}$, соединяющих пары узлов a_i и a_j . Веса ребер и узлов в каждом конкретном случае могут характеризовать производительность, надежность, достоверность, степень задержки сообщений и т. п.

Обычно пользователя не интересуют показатели эффективности функционирования тех или иных элементов ИС в отдельности. Он заинтересован в оценке качества обслуживания сетью некоторой связанной пары узлов a_i и a_j , которое характеризуется показателем эффективности $\pi[a_i, a_j]$ на направлении обмена $[a_i, a_j]$. При этом под направлением обмена понимается направление передачи потока информации от узла a_i к узлу a_j независимо от того, по какому конкретному r -му пути $\mu_r[a_i, a_j] \in M_{ij}$ (M_{ij} — множество путей от a_i к a_j) состоится эта передача. Поскольку каждый путь $\mu_r[a_i, a_j]$ состоит из некоторой совокупности последовательно соединенных элементов сети (узлов и ребер), то задача сводится к определению соответствующих весов элементов графа $G(A, B)$, т. е. внутренних его характеристик, и вычислению на их основе внешних характеристик, интересующих пользователя, с учетом структуры сети и используемых в ней алгоритмов управления потоками информации.

Для некоторого направления обмена $[a_i, a_j]$ обобщенный показатель эффективности может быть представлен в виде

$$\pi[a_i, a_j] = \sum_r \pi_r(a_i, a_j) P_r(a_i, a_j), \quad (34.1)$$

где $\pi_r(a_i, a_j)$ — значения показателя эффективности для r -го пути; $P_r(a_i, a_j)$ — вероятность выбора r -го пути на направлении обмена $[a_i, a_j]$.

Значение показателя эффективности зависит как от алгоритма управления потоками информации в ИС (в частности, правила выбора пути передачи), так и от процессов отказов и восстановления ИС, приводящих к тому, что в каждый данный момент вместо графа $G(A, B)$ реально существует частичный подграф $G(X, Y)$, $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$. Поэтому вместо (34.1) для конкретного подграфа можно записать

$$\pi[a_i, a_j] = \sum \pi[G(X, Y)] P[G(X, Y)] U[G(X, Y)], \quad (34.2)$$

где $U[G(X, Y)]$ — функция связности подграфа $G(X, Y)$:

$$U[G(X, Y)] = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i \text{ и } a_j \text{ топологически связаны,} \\ 0, & \text{если } a_i \text{ и } a_j \text{ топологически не связаны.} \end{cases}$$

Подграф $G(X, Y)$ представляет собой одно из возможных состояний ИС, в котором исходная сеть может оказаться с вероятностью $P[G(X, Y)]$.

Учет алгоритма управления скажется при расчете $\pi[G(X, Y)]$, причем действие алгоритма будет оцениваться в конкретной ситуации, в которой в данный момент пребывает ИС. Для каждой ситуации, т. е. для каждого подграфа $G(X, Y)$, в соответствии с целевой функцией управления определяется оптимальный (относительно выбранных критериев) путь передачи сообщений $\mu_r[a_i, a_j, G(X, Y)]$ и для этого пути находится $\pi[\mu_r(a_i, a_j), G(X, Y)]$. Найденное из (34.2) значение $\pi[a_i, a_j]$ представляет собой математическое ожидание величины этого показателя эффективности для направления обмена $[a_i, a_j]$ при принятых алгоритмах управления потоками информации и соответствующих весовых коэффициентах элементов ИС.

Выражение (34.2) может использоваться для вычисления многих показателей эффективности ИС. При этом порядок расчета таков:

- 1) вырабатывается частичный подграф $G(X, Y)$ исходного графа $G(A, B)$;
- 2) находится $U[G(X, Y)]$ для заданных вершин a_i и a_j , т. е. решается задача о связности сети;
- 3) определяется r -й путь $\mu_r[a_i, a_j, G(X, Y)]$ для подграфа $G(X, Y)$ в соответствии с принятым алгоритмом управления и заданной целевой функцией;
- 4) определяется вероятность реализации подграфа $P[G(X, Y)]$;
- 5) находится $\pi[G(X, Y)]$ для r -го пути $\pi[\mu_r(a_i, a_j), G(X, Y)]$;
- 6) вычисляется одно слагаемое вида

$$\pi_h[G(X, Y)] P[G(X, Y)] U[G(X, Y)];$$

7) указанная в пп. 1—6 процедура повторяется для всех реализаций подграфов сети;

8) слагаемые, полученные в п. 6 на всех циклах расчета, суммируются.

Таким образом, данная процедура является частным случаем общего расчета эффективности.

Существует ряд способов ускоренного определения числа частичных подграфов $G(X, Y)$ и путей в них с учетом реальных вероятностей отказа элементов ИС, дающих существенный выигрыш по времени по сравнению с прямым перебором вариантов.

34.2. ОСНОВНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МИКРОСХЕМ

Показатели эффективности ИС определяются в предположении, что удовлетворяются определенные требования к качеству доставки информации. Эти требования ИС оценивают качество передачи информации как в отдельных ее элементах, так и в системе в целом. К показателям качества доставки сообщений на произвольном направлении $[a_i, a_j]$ относятся:

показатель надежности доставки π_n , определяемый вероятностью правильной передачи некоторого заданного массива информации за время, не превышающее нормы времени доставки в реальных условиях работы сети (иногда используется дополнительный показатель — показатель потерь $\pi_n = 1 - \pi_n$);

показатель достоверности π_d , определяемый вероятностью обнаружения ошибки в сообщении заданного объема, доведенного до абонента в пределах заданного времени доставки;

показатель связности $\pi_{св} [a_i, a_j]$, определяемый вероятностью существования связи между узлами a_i и a_j с учетом ограничений по времени доставки и требований к достоверности.

Показатель связности обычно применяется для нахождения $\pi_n [a_i, a_j]$ или $\pi_{св} [a_i, a_j]$. В частности, $\pi_{св} [a_i, a_j]$ приближенно можно представить в виде

$$\pi_{св} \geq 1 - \pi_{св} + \pi_{св} \pi_d \quad (34.3)$$

$$\text{или} \quad \pi_n \leq \pi_{св} - \pi_d (1 + \pi_{св}), \quad (34.4)$$

что при достаточно малых π_d по сравнению с $\pi_{св}$ (как это и имеет место обычно на практике) позволяет считать

$$\pi_n \leq \pi_{св}. \quad (34.5)$$

Таким образом, прямой расчет показателя π_n , связанный с наибольшими трудностями в силу необходимости учета большого числа различных факторов, можно заменить простыми оценками через π_d и $\pi_{св}$ и на их основе строить косвенные оценки π_n в соответствии с (34.4) или (34.5).

Показатель связности $\pi_{св}$ является одним из наиболее важных показателей ИС, определяющих эффективность выбранной структуры. Связность отражает способность ИС продолжать выполнение своих функций при выходе из строя отдельных ее элементов и частей и зависит как от структуры ИС, так и от принятых в ней алгоритмов управления потоками сообщений.

Определение связности реальной ИС представляет собой достаточно трудную задачу. Это объясняется тем, что при задании допустимых задержек τ_0 и показателей достоверности π_d связность определяется не только наличием или отсутствием связи между некоторой парой узлов a_i и a_j сети, но и необходимостью учета только тех прямых и транзитных путей, выбор которых обеспечит допустимые задержки и коэффициенты потерь достоверности.

Показатель достоверности π_d k -го пути μ_k направления обмена $[a_i, a_j]$

$$\pi_d^{(k)} [\mu_k (a_i, a_j)] = \sum_{(a_k, a_l) \in \mu_R (a_i, a_j)} \pi_d (a_k, a_l) + \sum_{a_m \in \mu_k (a_i, a_j)} \pi_d (a_m).$$

Таким образом, среди всех возможных путей между a_i и a_j выбираются только те, для которых одновременно выполняются условия по заданным нормам времени доставки и достоверности сообщений.

Указанные выше показатели эффективности можно представить в виде матриц $||\pi_n [a_i, a_j]||$, $||\pi_{св} [a_i, a_j]||$, $||\pi_{св} [a_i, a_j]||$, $||\pi_d [a_i, a_j]||$ для всех пар элементов. Записанные в таком виде показатели эффективности позволяют оценить качество передачи внешних сообщений в ИС в целом, что представляет непосредственный интерес для пользователей сети. Иногда вместо таких матриц для оценки того или иного показателя качества ИС в целом пользуются некоторыми средними оценками. Например, средний показатель потерь сообщений в ИС $\pi_n [G(A, B)]$ можно представить в виде

$$\pi_n [G(A, B)] = \sum_{i,j} \pi_n [a_i, a_j] V[a_i, a_j] / \sum_{i,j} V[a_i, a_j],$$

где $V[a_i, a_j] / \sum_{i,j} V[a_i, a_j]$ — доля объема информации по направлению $[a_i, a_j]$ по отношению ко всему объему $\sum_{i,j} V[a_i, a_j]$, циркулирующему в ИС.

В качестве интегральной характеристики ИС желательно выбрать такую обобщенную характеристику сети, которая, с одной стороны, имела бы ясный физический смысл, а с другой стороны, по возможности была бы функционально связана с наиболее важными частными показателями эффективности ИС. Таким показателем качества ИС может служить норма надежности нормальной доставки (π_n^*).

Для произвольного направления обмена информацией $[a_i, a_j]$

$$\pi_d = \pi_n E \{1 - R(\tau_0)\} + \pi_d^*,$$

где π_d — реальный показатель достоверности, определенный с учетом фактической надежности элементов ИС; $R(\tau_0)$ — стационарный коэффициент оперативной готовности; π_d^* — показатель достоверности, определенный в предположении, что входящие в путь μ_h для пары $[a_i, a_j]$ элементы ИС имеют абсолютную надежность, но действующие на них помехи и сбои имеют реальные статистические характеристики.

Отсюда

$$\pi_n^*[a_i, a_j] = \frac{\pi_d[a_i, a_j] - \pi_d^*[a_i, a_j]}{\{1 - R(\tau_0[a_i, a_j])\}},$$

где E — некоторый коэффициент пропорциональности.

34.3. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТРАКТА ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ

В общем случае тракт передачи данных (ТПД) можно рассматривать как совокупность параллельно включенных непрерывных каналов связи (НКС), организованных в линиях связи различного типа с помощью аппаратуры частотного или временного уплотнения, устройств преобразования сигналов (модемов) и устройств повышения достоверности (УПД), обеспечивающих передачу и защиту от ошибок информации на определенном прямом направлении связи, соответствующем ребру b_{ij} на графе, представляющем ИС.

Основными характеристиками тракта являются:

общая (максимальная) производительность тракта, определяемая суммой

$$\rho_T(b_{ij}) = \sum_k \rho^{(k)}(b_{ij}),$$

где $\rho^{(k)}(b_{ij})$ — производительность k -го канала передачи данных, входящих в состав тракта;

индивидуальные коэффициенты потерь достоверности информации $g^k(b_{ij})$ в каждом из входящих в тракт каналов (иногда пользуются понятием среднего коэффициента потерь достоверности информации тракта, определяемого как средневзвешенное по всем каналам);

вероятность правильной передачи в тракте массива информации некоторого заданного объема за время, не большее некоторого нормативного времени;

вероятность потери сообщения в тракте с учетом ограничения на допустимое время передачи;

показатели надежности тракта: коэффициент готовности (или коэффициент простоя), средняя наработка на отказ, среднее время восстановления, коэффициент оперативной готовности.

Характер искажений в канале связи в значительной степени определяется видом связи (кабельная, радио, космическая и т. п.). Вероятность искажений кодовой комбинации длины n

$$p_n \approx n^{1-\sigma} p,$$

где σ — показатель группирования, однозначно определяемый через параметры соответствующей математической модели канала; p — средняя вероятность ошибок в канале. Вероятность p_n входит в качестве основной составляющей в анали-

тическое выражение для вероятности правильной передачи информации и видом примененного помехоустойчивого кода. В простейшем случае однократной передачи кодовой комбинации без использования обратной связи вероятность правильного приема (передачи)

$$p_1 = 1 - p_n + g^*,$$

где g^* — вероятность необнаружения ошибки.

В более сложных случаях использования систем передачи данных с решающей обратной связью результирующая (накопленная) вероятность правильного приема после v -кратного повторения кодовой комбинации определяется выражением

$$P^*(v) = p_1^2 \left[\sum_{i=1}^v (1 - p_1^2)^{i-1} \right].$$

Для защиты от ошибок используются избыточные коды, в которых к k информационным битам добавляется $r = n - k$ проверочных. Способность кода обнаруживать все ошибки кратности до $d - 1$ включительно определяется его кодовым расстоянием d , зависящим от параметров n , k и структуры кода. Вероятность необнаруженной ошибки в этом случае можно оценить по формуле

$$g^* = 2^{-r} \left(\frac{n}{d} \right)^{1-\sigma} p.$$

Пример 34.1. Рассмотрим идеально надежный тракт, состоящий из одного кабельного канала связи с параметрами $\sigma = 0,5$ и $p = 10^{-3}$. Предположим, что для защиты от ошибок используется код с параметрами $n = 256$, $r = 16$, $d = 5$.

Найти вероятность правильного приема.

Решение. Вероятность g^* вычисляется как

$$g^* \approx 2^{-16} (256/5)^{0,5} \cdot 10^{-3} = 1,1 \cdot 10^{-7}.$$

Вероятность правильного приема кодовой комбинации

$$p_1 = 1 - \sqrt{256} \cdot 10^{-3} + 1,1 \cdot 10^{-7} \approx 0,984.$$

Вероятность правильного приема после v -кратного повторения ($v = 1, 2, 3, \dots$)

$$P^*(v) = 0,984^2 \left[\sum_{i=1}^v (1 - 0,984^2)^{i-1} \right] = 0,968 \sum_{i=1}^v 0,032^{i-1}.$$

Глава 35

НАДЕЖНОСТЬ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЙ

35.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При проектировании и строительстве сооружений на естественных основаниях степень неопределенности информации определяется в основном следующими обстоятельствами:

параметры прочности и деформируемости естественных (грунтовых и скальных) оснований определяются на отдельных образцах или на ограниченных площадках и затем распространяются на весь массив, причем степень достоверности этого переноса определяется постоянством характеристик по объему массива (его однородностью) и количеством и точностью экспериментальных определений;

геометрические параметры плоскостей ослабления (трещин) в скальном массиве (азимуты и углы падения, длина, густота и т. п.) имеют вероятностный характер;

силовые воздействия на сооружения, например сейсмические, ледовые, ветровые и другие нагрузки и перегрузки в период эксплуатации также имеют случайный характер.

При расчетах прочности (или надежности) приходится иметь дело с величинами двух типов: случайными, характеристики которых заданы в вероятностных терминах; неопределенными, для которых известен лишь диапазон возможных значений.

К первому типу относятся величины, которые могут быть измерены со значительными погрешностями или выборочно, например: прочность сооружения и основания, азимуты и углы падения трещин в скальном основании, природные нагрузки от землетрясения и от фильтрующей в основании воды, ветровые и температурные нагрузки. При отсутствии необходимого числа наблюдений или при недостаточной точности измерений эти величины могут из категории случайных переходить в категорию неопределенных, для которых можно назвать лишь диапазон значений. В этом случае можно применять обычные вероятностные расчеты.

Для величин второго типа необходимо прибегать к минимаксным критериям, т. е. рассчитывать показатели надежности для наиболее неблагоприятных случаев.

При оценках надежности строительных конструкций и их оснований, как правило, исходят из необходимости выполнения одного из критериальных условий: прочности, устойчивости или деформируемости.

Любое из проектных критериальных условий можно записать в виде

$$A > B, \quad (35.1)$$

где A и B — функции всех участвующих в описании рассматриваемого процесса или явления факторов. В общем случае A — прочность, допустимое смещение (осадки) или сумма удерживающих сил; B — действующее напряжение, фактическое смещение (осадка) или сумма действующих сдвигающих сил.

Вероятность безотказной работы объекта применительно к использованию условия (35.1)

$$R = P(A > B).$$

Если обозначить через $f_B(B)$ плотность распределения параметра B , а через $f_A(A)$ плотность распределения параметра A , то вероятность безотказной работы для всех возможных значений параметров B и A :

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} f_B(B) \left[\int_B^{\infty} f_A(A) dA \right] dB \quad (35.2)$$

или

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} f_A(A) \left[\int_{-\infty}^A f_B(B) dB \right] dA. \quad (35.3)$$

Иногда для упрощения расчетов целесообразно рассматривать не две случайные величины A и B , а их разность

$$S = B - A.$$

Тогда критериальное условие (35.1) запишется следующим образом:

$$S = B - A < 0,$$

а вероятность безотказной работы

$$R = P(S < 0) = \int_{-\infty}^0 f_S(S) dS.$$

Не существует единого подхода для определения допустимого или необходимого значения показателя надежности гидротехнических сооружений, учитывая их многоцелевое назначение, разнообразие типов и размеров и индивидуальность исполнения. Нормирование уровня надежности для гидромеханических сооружений может выполняться различными способами.

Для оценки надежности сложных гидросооружений в инженерной практике широко используется метод моделирования, при котором изготавливаются структурные модели сооружения и основания, воспроизводящие основные их особенности (структуру, прочность, деформативность, характер разрушения и т. п.), которые в процессе испытания доводятся до разрушения.

Большое внимание в настоящее время уделяется статистическому анализу аварий и повреждений, произошедших на построенных сооружениях. Недостаточность срока наблюдений и несопоставимость проектных решений этих сооружений, предназначенных для работы в различных условиях, не позволяет выполнить строгий анализ, однако ориентировочные цифры свидетельствуют о том, что вероятность повреждения или разрушения плотин за год колеблется в интервале $2 \cdot 10^{-2} - 2 \cdot 10^{-3}$.

Наиболее перспективным является использование для нормирования уровня надежности метода условной оптимизации, когда проектируется сооружение, имеющее максимально возможную надежность при условии, что технические параметры не выходят за допустимые пределы, а суммарные затраты на строительство не превышают заранее заданных:

$$R = \max \{P | V_i \in v_i, i = 1, \dots, n; C \leq C_0\}.$$

35.3. РАСЧЕТЫ НАДЕЖНОСТИ

Наиболее общим является случай, когда оба параметра критериальной зависимости (35.1) A и B представляют собою функции нескольких случайных величин:

$$A = f(x_1, x_2, \dots, x_n); B = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

которыми являются параметры прочности на сжатие или на сдвиг, модули деформации и коэффициенты поперечного расширения, параметры трещиноватости скального основания, физические характеристики материала сооружения и основания, действующие силы, параметры фильтрационного потока и т. п.

Как правило, для определения числовых значений величин A и B используется метод линеаризации, при котором членами выше первого порядка пренебрегают, т. е. заменяют с некоторой погрешностью нелинейные функции A и B линейными в окрестности некоторой точки $(x_1, \dots, x_n)$.

Как показывают расчеты, в большинстве случаев (при не очень грубом определении исходной информации) использование метода линеаризации при вычислении числовых значений функций A и B вносит погрешности, не превышающие нескольких процентов.

Линеаризация функций A и B облегчает вычисление их дисперсий, необходимых для оценки надежности.

Расчетные зависимости для определения вероятностей R при различных законах распределения функций A и B приведены в табл. 35.1, а для определения $P = (1 - R)$ — в табл. 35.2.

Однако получение аналитических выражений для определения функций, входящих в (35.2) и (35.3), связано с определенными трудностями и осуществлено лишь для ограниченного числа схем расчета.

Пример 35.1. Рассмотрим устойчивость бетонной гравитационной плотины на скальном основании при наличии пологопадающей трещины (рис. 35.1). Пло-

Вероятность безотказной работы при различных законах распределения напряжения (сдвигающих сил) и прочности (удерживающих сил)

Закон распределения		$R=P(A > B)$
A	B	
Нормальный	Нормальный	$R = \Phi \left(\frac{\mu_A - \mu_B}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}} \right)$
Логарифмически-нормальный	Логарифмически-нормальный	$R = \Phi \left(\frac{\mu_A - \mu_B}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}} \right), \text{ где } \sigma_x^2 = \ln \{1 + [\sigma(x)]^2 / \bar{x}^2\}; \mu_x = \ln \bar{x} - \sigma_x^2 / 2$
Нормальный	Вейбулла — Гнеденко	$R = \Phi \left(\frac{A_0 - \mu_B}{\sigma_B} \right) + \frac{\theta}{\sigma_A \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp \left[-y^\beta - \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{\sigma_B} y + \frac{A_0 - \mu_B}{\sigma_B} \right)^2 \right] dy$
Вейбулла — Гнеденко	Вейбулла — Гнеденко	$R = \int_0^\infty e^{-y} \exp \left\{ - \left[\frac{\theta_A}{\theta_B} y^{\frac{1}{\beta_A}} + \left(\frac{A_0 - B_0}{\theta_B} \right) \right]^{\beta_B} \right\} dy$
Нормальный	Экспоненциальный	$R = \Phi \left(-\frac{\mu_B}{\sigma_B} \right) + \exp \left[-\frac{1}{2} (2\mu_B \lambda_A - \lambda_A^2 \sigma_B^2) \right] \times \left[1 - \Phi \left(-\frac{\mu_B - \lambda_A^2 \sigma_B^2}{\sigma_B} \right) \right]$
Экспоненциальный	Нормальный	$R = 1 - \Phi \left(-\frac{\mu_A}{\sigma_A} \right) - \exp \left[-\frac{1}{2} (2\mu_A \lambda_B - \lambda_B^2 \sigma_A^2) \right] \times \left[1 - \Phi \left(-\frac{\mu_A - \lambda_B \sigma_A^2}{\sigma_A} \right) \right]$
Экспоненциальный	Экспоненциальный	$R = \lambda_B / (\lambda_A + \lambda_B) = \bar{A} / (\bar{A} + \bar{B})$

Вероятность безотказной работы при нормальном распределении напряжения и прочности, распределенной по закону Вейбулла — Гнеденко

$$C = \theta/\sigma_B; A = A_0 - \mu_B/\sigma_B$$

A	$\beta=1$				2				3			
	C=10	20	30	40	10	20	30	40	10	20	30	40
0,8	0,0115	0,0059	0,0039	0,0030	0,0011	0,0003	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
0,6	0,0160	0,0082	0,0055	0,0042	0,0017	0,0004	0,0002	0,0001	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
0,4	0,0218	0,0122	0,0075	0,0057	0,0025	0,0007	0,0003	0,0002	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000
0,2	0,0290	0,0149	0,0100	0,0076	0,0035	0,0009	0,0004	0,0002	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000
0,0	0,0375	0,0193	0,0130	0,0098	0,0049	0,0012	0,0006	0,0003	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000
-0,2	0,0475	0,0245	0,0165	0,0125	0,0067	0,0017	0,0008	0,0004	0,0011	0,0001	0,0000	0,0000
-0,4	0,0588	0,0304	0,0205	0,0155	0,0089	0,0023	0,0010	0,0006	0,0016	0,0002	0,0001	0,0000
-0,6	0,0713	0,0370	0,0250	0,0189	0,0116	0,0030	0,0013	0,0007	0,0022	0,0003	0,0001	0,0000
0,8	0,0849	0,0442	0,0298	0,0225	0,0149	0,0038	0,0017	0,0010	0,0030	0,0004	0,0001	0,0000
-1,0	0,0994	0,0518	0,0351	0,0265	0,0188	0,0048	0,0021	0,0012	0,0041	0,0005	0,0002	0,0001
-1,4	0,1301	0,0683	0,0463	0,0350	0,0284	0,0073	0,0032	0,0018	0,0069	0,0009	0,0003	0,0001
-1,8	0,1620	0,0858	0,0582	0,0441	0,0407	0,0105	0,0047	0,0026	0,0111	0,0014	0,0004	0,0002
-2,2	0,1940	0,1033	0,0704	0,0533	0,0557	0,0144	0,0065	0,0036	0,0169	0,0022	0,0006	0,0003
-2,6	0,2252	0,1209	0,0826	0,0627	0,0733	0,0191	0,0086	0,0048	0,0247	0,0032	0,0009	0,0004
-3,0	0,2555	0,1382	0,0947	0,0720	0,0935	0,0246	0,0110	0,0062	0,0349	0,0045	0,0013	0,0006
-3,4	0,2847	0,1553	0,1067	0,0812	0,1159	0,0308	0,0138	0,0078	0,0475	0,0062	0,0018	0,0008
-3,8	0,3127	0,1720	0,1185	0,0903	0,1406	0,0377	0,0170	0,0096	0,0630	0,0082	0,0024	0,0010
-4,2	0,3397	0,1884	0,1302	0,0994	0,1671	0,0453	0,0205	0,0116	0,0815	0,0108	0,0032	0,0014
-4,6	0,3656	0,2045	0,1417	0,1084	0,1954	0,0535	0,0243	0,0137	0,1031	0,0138	0,0041	0,0017
-5,0	0,3904	0,2202	0,1530	0,1172	0,2251	0,0626	0,0284	0,0161	0,1279	0,0173	0,0052	0,0022
-5,5	0,4202	0,2395	0,1670	0,1282	0,2640	0,0748	0,0341	0,0193	0,1634	0,0225	0,0067	0,0029
-6,0	0,4484	0,2583	0,1808	0,1390	0,3043	0,0879	0,0402	0,0228	0,2037	0,0287	0,0086	0,0036
-6,5	0,4753	0,2766	0,1944	0,1497	0,3457	0,1020	0,0468	0,0266	0,2485	0,0360	0,0108	0,0046
-7,0	0,5009	0,2944	0,2077	0,1603	0,3876	0,1170	0,0539	0,0307	0,2973	0,0443	0,0134	0,0057
-8,0	0,5484	0,3288	0,2336	0,1810	0,4713	0,1493	0,0695	0,0398	0,4039	0,0645	0,0196	0,0083
-9,0	0,5914	0,3616	0,2588	0,2012	0,5525	0,1845	0,0869	0,0499	0,5165	0,0897	0,0276	0,0117
-10,0	0,6303	0,3927	0,2831	0,2210	0,6285	0,2222	0,1059	0,0611	0,6269	0,1202	0,0374	0,0160

тина высотой $H = 105$ м подвержена действию сил собственного веса $G = 87,5$ МН/м, гидростатического давления воды водохранилища $Q = 50$ МН/м и взвешивающих сил фильтрационного потока $W = 17,5$ МН/м. В основании плотины имеется пологая трещина с углом падения $\alpha = 18^\circ$ ($\sigma_\alpha = 4,4^\circ = 0,077$ рад) и с параметрами прочности на сдвиг: $f = 0,51$ ($\sigma_f = 0,07$) и $C = 0,05$ МПа ($\sigma_c = 0,03$ МПа).

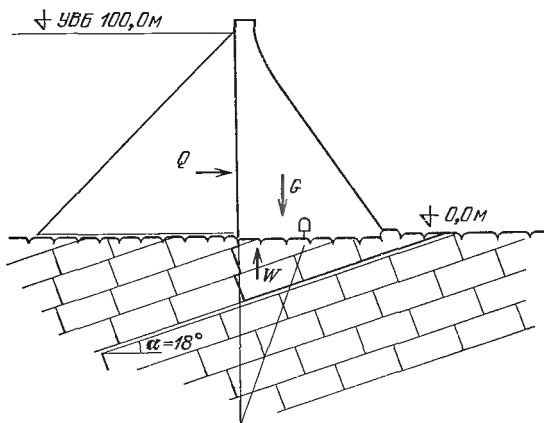


Рис. 35.1. Расчетная схема бетонной гравитационной плотины на слоистом скальном основании

Необходимо оценить надежность плотины против смещения ее в нижний бьеф по трещине в основании.

Решение. Сумма удерживающих сил

$$A = l (G - W) \cos \alpha + Q \sin \alpha + CL.$$

Сумма сдвигающих сил

$$B = Q \cos \alpha - (G - W) \sin \alpha.$$

Если предположить, что случайными величинами являются геометрические и прочностные параметры трещины (α , f и C), то дисперсии функций A и B :

$$D[A] = l^2 [Q \cos \alpha - (G - W) \sin \alpha]^2 D_\alpha + [Q \sin \alpha + (G - W) \cos \alpha]^2 D_f + L^2 D_C + 2L [Q \sin \alpha + (G - W) \cos \alpha] R_{fC};$$

$$D[B] = [Q \sin \alpha + (G - W) \cos \alpha]^2 D_\alpha;$$

$$R[AB] = -f [Q \cos \alpha - (G - W) \sin \alpha] [Q \sin \alpha + (G - W) \cos \alpha] D_\alpha.$$

Все случайные величины можно предположить распределенными по нормальному закону:

$$\mu_A = MA = 47,08 \text{ МН/м}; D[A] = 30,828 \text{ (МН/м)}^2;$$

$$\mu_B = MB = 25,92 \text{ МН/м}; D[B] = 40,3637 \text{ (МН/м)}^2;$$

$$R[AB] = -6,5054 \text{ (МН/м)}^2.$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$k = \mu_A / \mu_B = 1,82.$$

Надежность плотины от сдвига по трещине можно определить по формуле

$$R = \Phi \left(\frac{\mu_A - \mu_B}{\sqrt{D[A] + D[B]}} \right) = \Phi \left(\frac{21,16}{8,04} \right) = \Phi(2,63)$$

Пользуясь таблицей П2.3 значений функции нормированного нормального распределения, получаем

$$R = \Phi(2,63) = 0,997.$$

Пример 35.2. Определить максимально допустимое среднее квадратическое отклонение прочности $\sigma(A)$ при среднем ее значении $\bar{A} = 20$ МПа, при котором вероятность безотказной работы будет не ниже 0,999. Выполненные в примере 35.1 расчеты напряженного состояния плотины показывают, что максимальное напряжение сжатия имеет место на низовой грани плотины и составляет $B = 12$ МПа при среднем квадратическом отклонении $\sigma(B) = 1,5$ МПа, причем распределение напряжений подчиняется логарифмически-нормальному закону.

Прочность бетона плотины также имеет логарифмически-нормальный закон распределения.

Пользуясь зависимостями из табл. 35.1, запишем:

$$\sigma_B^2 = \ln \{1 + [\sigma(B)]^2 / \bar{B}^2\} = \ln 1,0156 = 0,0155;$$

$$\mu_B = \ln \bar{B} - \sigma_B^2 / 2 = 2,4771;$$

$$\mu_A = \ln \bar{A} - \sigma_A^2 / 2 = 2,9957 - \sigma_A^2 / 2;$$

$$R = \Phi \left(\frac{\mu_A - \mu_B}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}} \right) = 0,999.$$

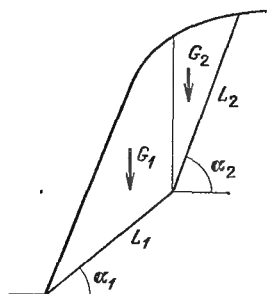


Рис. 35.2. Расчетная схема скального массива, подсеченного пологопадающей (α_1) и крутопадающей (α_2) трещинами

Отсюда, пользуясь табл. 3.2, находим

$$(\mu_A - \mu_B) / \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} = 3,09,$$

и, следовательно,

$$2,9957 - \sigma_A^2 / 2 - 2,4771 = 3,09 \sqrt{\sigma_A^2 + 0,0155}.$$

Решая это квадратное уравнение, получаем $\sigma_A^2 = 0,012$, что, в свою очередь равно:

$$\sigma_A^2 = 0,012 = \ln \{1 + [\sigma(A)]^2 / \bar{A}^2\} = \ln \{1 + [\sigma(A)]^2 / 20^2\},$$

$$\sigma_A = 20 \sqrt{e^{0,012} - 1} = 2,2 \text{ МПа}.$$

Пример 35.3. Определить вероятность безотказной работы сооружения, если напряжения в скальном уступе распределены по нормальному закону с параметрами $\mu_B = 4,55$ МПа и $\sigma_B = 0,18$ МПа. Прочность скального уступа, на который опирается сооружение, имеет плотность распределения Вейбулла—Гнеденко

$$p_A(A) = 0,617 (A - 4,2) \exp [-0,309 (A - 4,2)^2],$$

т. е. параметры его $A_0 = 4,2$ МПа, $\theta = 1,8$ МПа, $\beta = 2$.

Решение. Вычислив параметры

$$C = \theta / \sigma_B = 10; A = (A_0 - \mu_B) / \sigma_B = -1,94,$$

по табл. 35.2 определяем (интерполируя)

$$R = 1 - P = 1 - 0,046 = 0,954.$$

Пример 35.4. Проанализировать устойчивость скального массива, показанного на рис. 35.2, используя метод дефицита удерживающих сил.

Решение. Рассматривая массив на крутопадающей трещине (вес массива G_2 и угол падения трещины α_2) и беря разность действующих на него сдвигающих и удерживающих сил, определяем дефицит удерживающих его сил:

$$S_2 = G_2 (\sin \alpha_2 - f_2 \cos \alpha_2) - C_2 L_2,$$

где f_2 и C_2 — параметры прочности на сдвиг по крутопадающей трещине;

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_B = & \left(\frac{\partial B}{\partial f_2}\right)^2 \tilde{\sigma}_{f_2}^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial C_2}\right)^2 \tilde{\sigma}_{C_2}^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha_1}\right)^2 \tilde{\sigma}_{\alpha_1}^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha_2}\right)^2 \tilde{\sigma}_{\alpha_2}^2 + 2 \left(\frac{\partial B}{\partial f_2}\right) \left(\frac{\partial B}{\partial C_2}\right) \tilde{R}_{f_2 C_2}; \\ \tilde{R}[AB] = & \left(\frac{\partial A}{\partial f_2}\right) \left(\frac{\partial B}{\partial f_2}\right) \tilde{\sigma}_{f_2}^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial C_2}\right) \left(\frac{\partial B}{\partial C_2}\right) \tilde{\sigma}_{C_2}^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha_1}\right) \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha_1}\right) \tilde{\sigma}_{\alpha_1}^2 + \\ & + \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha_2}\right) \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha_2}\right) \tilde{\sigma}_{\alpha_2}^2 + \left[\left(\frac{\partial A}{\partial f_2}\right) \left(\frac{\partial B}{\partial C_2}\right) + \left(\frac{\partial A}{\partial C_2}\right) \left(\frac{\partial B}{\partial f_2}\right)\right] \tilde{R}_{f_2 C_2}.\end{aligned}\quad (35.4)$$

В этих зависимостях:

$$\tilde{\theta} = \tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1; \quad \tilde{S}_2 = G_2 (\sin \tilde{\alpha}_2 - \tilde{f}_2 \cos \tilde{\alpha}_2) - L_2 \tilde{C}_2.$$

Предполагая, что сила S_2 ориентирована по направлению падения крутопадающей плоскости трещины, записываем интегральные значения удерживающих и сдвигающих сил, приходящихся на пологопадающую трещину (вес массива G_1 и угол падения трещины α_1):

$$A = f_1 (G_1 \cos \alpha_1 + S_2 \sin \theta) + C_1 L_1;$$

$$B = G_1 \sin \alpha_1 + S_2 \cos \theta,$$

где $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$; f_1 и C — параметры прочности на сдвиг по пологопадающей трещине.

Математические ожидания и дисперсии функций A и B :

$$\tilde{\mu}_A = \tilde{f}_1 (G_1 \cos \tilde{\alpha}_1 + \tilde{S}_2 \sin \tilde{\theta}) + L_1 \tilde{C}_1;$$

$$\tilde{\mu}_B = G_1 \sin \tilde{\alpha}_1 + \tilde{S}_2 \cos \tilde{\theta};$$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_A^2 = & \left(\frac{\partial A}{\partial f_1}\right)^2 \tilde{\sigma}_{f_1}^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial f_2}\right)^2 \tilde{\sigma}_{f_2}^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial C_1}\right)^2 \tilde{\sigma}_{C_1}^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial C_2}\right)^2 \tilde{\sigma}_{C_2}^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha_1}\right)^2 \tilde{\sigma}_{\alpha_1}^2 + \\ & + \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha_2}\right)^2 \tilde{\sigma}_{\alpha_2}^2 + 2 \left[\left(\frac{\partial A}{\partial f_1}\right) \left(\frac{\partial A}{\partial C_1}\right) R_{f_1 C_1} + \left(\frac{\partial A}{\partial f_2}\right) \left(\frac{\partial A}{\partial C_2}\right) R_{f_2 C_2}\right];\end{aligned}$$

$$\frac{\partial A}{\partial f_1} = G_1 \cos \tilde{\alpha} + \tilde{S}_2 \sin \tilde{\theta}; \quad \frac{\partial A}{\partial f_2} = L_1;$$

$$\frac{\partial A}{\partial C_1} = -\tilde{f}_1 L_2 \sin \tilde{\theta}; \quad \frac{\partial A}{\partial \alpha_1} = -\tilde{f}_1 (G_1 \sin \tilde{\alpha}_1 + \tilde{S}_2 \cos \tilde{\theta});$$

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha_2} = \tilde{f}_1 [\tilde{S}_2 \cos \tilde{\theta} + G_2 \sin \tilde{\theta} (\cos \tilde{\alpha}_2 + \tilde{f}_2 \sin \tilde{\alpha}_2)];$$

$$\frac{\partial B}{\partial f} = -G_2 \cos \tilde{\alpha}_2 \cos \tilde{\theta};$$

$$\frac{\partial B}{\partial C_2} = -L_2 \cos \tilde{\theta};$$

$$\frac{\partial B}{\partial \alpha_1} = G_1 \cos \tilde{\alpha}_1 + \tilde{S}_2 \sin \tilde{\theta};$$

$$\frac{\partial B}{\partial \alpha_2} = G_2 [\cos (\tilde{\theta} + \tilde{\alpha}_2) + \tilde{f}_2 \sin (\tilde{\theta} + \tilde{\alpha}_2)] + L_2 \tilde{C}_2 \sin \theta.$$

(35.5)

П р и м е ч а н и е. Выражения для производных функций A и B по углам падения трещин α_1 и α_2 в формулах (35.4) и (35.5) получены при условии, что величины L_1 , G_1 , L_2 и G_2 при изменении углов падения остаются постоянными. При необходимости получения более точных значений P следует вычислять производные $\partial L_1 / \partial \alpha_1$, $\partial L_1 / \partial L_2$, $\partial G_1 / \partial \alpha_1$, ..., которые могут быть получены аналитически или графически.

Пусть численные значения весов отсеков скального массива и длин трещин: $G_1 = 68,55$ МН; $L_1 = 70$ м; $G_2 = 24,84$ МН; $L_2 = 80$ м.

Предположим вначале, что углы падения поверхностей скольжения α_1 и α_2 можно считать точно установленными и равными: $\alpha_1 = 38^\circ$ и $\alpha_2 = 70^\circ$. Прочность на сдвиг по обоим плоскостям трещин характеризуется параметрами: для пологопадающей трещины $\tilde{f}_1 = 0,88$,

$\tilde{\sigma}_{f_1} = 0,068$; $\tilde{C}_1 = 0,0892$ МПа; $\tilde{\sigma}_{C_1} = 0,0284$ МПа; $\tilde{R}_{f_1 C_1} = 0,0018$ МПа; для крутопадающей трещины $\tilde{f}_2 = 0,51$; $\tilde{\sigma}_{f_2} = 0,033$; $\tilde{C}_2 = 0,0965$ МПа; $\tilde{\sigma}_{C_2} = 0,0291$ МПа; $\tilde{R}_{f_2 C_2} = -0,008$ МПа.

Числовые характеристики функций A и B (при $\sigma_{\alpha_1} = \sigma_{\alpha_2} = 0$) равны: $\tilde{\mu}_A = 59,05$ МН; $\tilde{\sigma}_A = 2,5124$ МН; $\tilde{\mu}_B = 51,8$ МН; $\tilde{\sigma}_B = 1,7835$ МН; $R[AB] = 1,7289$ (МН)².

Отсюда:

$$\tilde{\mu}_S = \tilde{\mu}_B - \mu_A = -7,24 \text{ МН};$$

$$\tilde{\sigma}_S^2 = \tilde{\sigma}_A^2 + \tilde{\sigma}_B^2 - 2\tilde{R}[AB] = 6,0354 \text{ (МН)}^2;$$

$$\tilde{R}(A > B) = \Phi(-\tilde{\mu}_S/\tilde{\sigma}_S) = \Phi(2,95) = 0,9984.$$

Если предположить, что мы располагаем достаточно большим количеством исходных данных по прочности на сдвиг, то полученная величина R с большой степенью приближения характеризует фактическую вероятность обрушения откоса. В противном случае следует определить доверительные интервалы для R .

Как видим, надежность откоса достаточно высока (очень низка вероятность обрушения).

Рассмотрим теперь углы падения плоскостей трещин как случайные величины с параметрами: $\tilde{\alpha}_1 = 39^\circ$; $\tilde{\sigma}_{\alpha_1} = 4,21^\circ = 0,073$ рад, $\tilde{\alpha}_2 = 70^\circ$; $\tilde{\sigma}_{\alpha_2} = 4,98^\circ = 0,087$ рад.

Тогда: $\tilde{\mu}_A = 59,05$ МН; $\tilde{\sigma}_A = 4,4668$ МН; $\tilde{\mu}_B = 51,81$ МН; $\tilde{\sigma}_B = 4,8566$ МН; $\tilde{R}[AB] = -11,5221$ (МН)².

Как видим, изменились оценки для дисперсий и корреляционного момента, в то время как математические ожидания функций A и B остались прежними.

В результате этого получаем:

$$\tilde{\mu}_S = -7,24 \text{ МН}; \tilde{\sigma}_S = 8,1599 \text{ МН}; R(A > B) = \Phi(0,887) = 0,8125.$$

Таким образом, несмотря на постоянство математических ожиданий всех входящих в рассмотрение параметров, вероятность обрушения откоса существенно возросла (показатель надежности меньше 0,95), что требует выполнения укрепительных мероприятий, причем для стабилизации откоса с надежностью $R = 0,95$ необходимо компенсировать дефицит его устойчивости.

Используя зависимости табл. 35.1, запишем

$$S_P = \mu_S + \Psi(P) \sigma_S,$$

где $\Psi(P)$ — функция, обратная функции Гаусса — Лапласа.

Для показателя надежности $P = 0,95$

$$S_{0,95} = \mu_S + 1,64\sigma_S,$$

$$S_{0,95} = -7,24 + 1,64 \cdot 8,16 = 6,14 \text{ МН} > 0.$$

Глава 36

ВИБРАЦИОННЫЕ НАГРУЗКИ НА РАДИОЭЛЕКТРОННУЮ АППАРАТУРУ

36.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Анализ физических причин и механизмов отказов является предпосылкой создания высоконадежного оборудования для динамических объектов. Для радиоэлектронной аппаратуры (РЭА), подверженной вибрациям, характерны следующие причины отказов:

накопление повреждений в элементах конструкций электрорадиоэлементов (ЭРЭ);

превышение воздействующей нагрузки несущей способности элемента;

высокий уровень виброшумов, вызывающий сбои;

флуктуация электрических параметров системы, вызванная механическими колебаниями;

изменения под действием механической нагрузки фазовой картины электронной системы (включая явление бифуркации); параметрические явления, в частности параметрический резонанс; перебросы электронных (или электромеханических) систем из одного положения равновесия в другое под действием вибраций.

Решение задачи анализа виброненадежности состоит из следующих этапов: определение внутренних деформаций ЭРЭ исходя из известного вибрационного воздействия на аппаратуру;

введение в уравнение функционирования РЭА параметров, отражающих наличие механической нагрузки;

определение вероятностных характеристик надежности (критерий отказа — достижение деформациями ЭРЭ уровней, недопустимых относительно прочности или стабильного функционирования электронного тракта).

Для краткости изложения введем наиболее употребительные обозначения:

D — цилиндрическая жесткость пластины;

E — модуль Юнга;

h — толщина стержня (пластины, слоя);

J — момент инерции сечения стержня;

$J_n(x)$ — функция Бесселя n -го порядка;

K — параметр жесткости крепления;

k — волновое число;

l — длина пластины (стержня, ленты, детали);

m — масса тела;

P — сила натяжения упругого тела (стержня, струны, ленты);

R — радиус кругового тела;

$R_u(t_1, t_2)$ — функция корреляции $u(t)$;

s — площадь сечения детали;

$S(\omega)$ — спектр;

t — временная координата;

u — смещение детали из равновесного состояния (для систем с сосредоточенными параметрами $u = u(t)$, для систем с распределенными $u = u(x, t)$ и т. д.);

w — смещение частиц упругого тела (для стержня $w = w(x, t)$, для пластины $w = w(x, y, t)$ и т. д.);

W — потенциальная энергия упругих деформаций;

x, y, z — пространственные координаты;

α — коэффициент потерь;

α_n и α_{nm} — корни функции Бесселя $J_0(\alpha_n) = 0$, $J_n(\alpha_{nm}) = 0$;

λ — интенсивность отказов;

ν — коэффициент Пуассона;

ρ — плотность;

ω — круговая частота колебаний;

$\omega_0, \omega_n, \omega_{nm}$ — собственные частоты.

Анализ механических деформаций элементов РЭА дает возможность разрабатывать мероприятия по повышению надежности на этапе разработки путем создания конструкции, у которой собственные частоты лежат вне области локализации энергии внешних воздействий.

Пример 36.1. Определить оптимальный вариант закрепления шасси (рис. 36.1) для действующего спектра частот $S_\psi(\omega)$, локализованного в заданной полосе (ω_1, ω_2) ($S_\psi = 0$ при ω , лежащей вне интервала).

Решение. Уравнение гармонических колебаний шасси

$$\frac{d^4 u}{dx^4} - k^4 u = 0,$$

где $k = \sqrt[4]{\rho h \omega^2 / D}$.

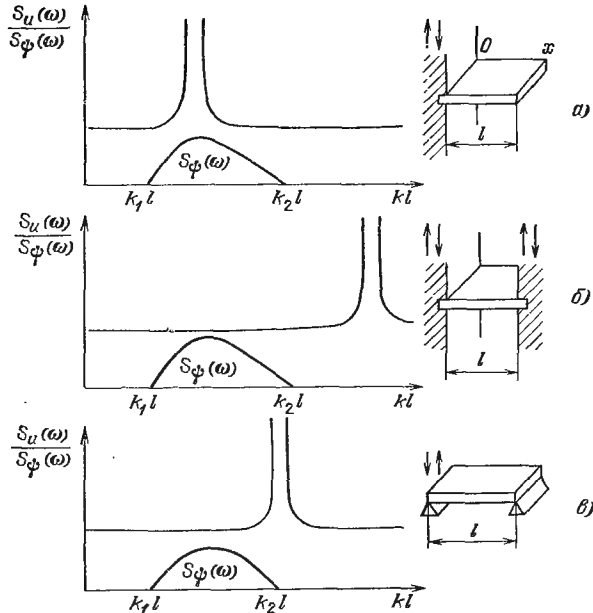


Рис. 36.1. Способы закрепления пластины

Граничные условия для варианта консольного закрепления пластины (см. рис. 36.1, а):

$$u(l) = S_{\psi}^{1/2}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x=l;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad \text{при } x=l;$$

для варианта с защемлением краев (см. рис. 36.1, б):

$$u(0) = S_{\psi}^{1/2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x=0;$$

$$u(l) = S_{\psi}^{1/2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x=l;$$

для подпертой пластины (см. рис. 36.1, в):

$$u(0) = S_{\psi}^{1/2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x=0;$$

$$u(l) = S_{\psi}^{1/2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x=l.$$

Спектральная плотность интенсивности вибраций шасси S_u соответственно для первого, второго и третьего типов граничных условий будет выражаться через спектральную плотность интенсивности вибраций S_{ψ} опор (внешнее воздействие):

$$S_u(x, \omega) = \frac{[(\operatorname{ch} kl + \cos kl)(\operatorname{ch} kx + \cos kx) - (\operatorname{sh} kl - \sin kl)(\operatorname{sh} kx + \sin kx)]^2}{4(1 + \operatorname{ch} kl \cos kl)^2} S_{\psi};$$

$$S_u(x, \omega) = \frac{\left[\operatorname{sh} \frac{kl}{2} \cos k \left(x - \frac{l}{2} \right) + \sin \frac{kl}{2} \operatorname{ch} k \left(x - \frac{l}{2} \right) \right]^2}{\left(\operatorname{ch} \frac{kl}{2} \sin \frac{kl}{2} + \operatorname{sh} \frac{kl}{2} \cos \frac{kl}{2} \right)^2} S_{\psi};$$

$$S_u(x, \omega) = \frac{\left[\operatorname{ch} \frac{kl}{2} \cos k \left(x - \frac{l}{2} \right) + \cos \frac{kl}{2} \operatorname{ch} k \left(x - \frac{l}{2} \right) \right]^2}{\left(2 \operatorname{ch} \frac{kl}{2} \cos \frac{kl}{2} \right)^2} S_\psi.$$

Рассмотрим спектральную плотность интенсивности вибраций в точке, наиболее удаленной от узлов крепления шасси (от края). Эту величину получают, умножая спектр воздействия S_ψ на передаточную функцию, зависящую от способа крепления. Как видно из представленных графиков (см. рис. 36.1, а), лучшим вариантом является наиболее жесткое закрепление — защемление (см. рис. 36.1, б).

Таким образом, механические параметры конструкции (собственные частоты, декременты затухания, пределы прочности и т. д.) оказываются непосредственно связанными с параметрами виброндежности, поскольку определяют интенсивность деформаций ЭРЭ. Столь же существенно влияние этих параметров и на электрический тракт аппаратуры. Например, невозмущенное поле плоского конденсатора $\varphi_1(z) = (U_2 - U_1)z/H$, где $U_2 - U_1$ — разность потенциалов обкладок; z — координата, отсчитываемая по нормали к обкладкам, приобретает из-за механических деформаций электродов поправку

$$\varphi_1(z, x) = \frac{U_1 - U_2}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \left[\frac{\omega_{1n}(t) \operatorname{sh} \frac{n\pi}{l} (H - z) + \omega_{2n}(t) \operatorname{sh} \frac{n\pi z}{H}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi H}{l}} \right],$$

где $\omega_{1n}(t)$ и $\omega_{2n}(t)$ пространственные фурье-компоненты для смещения электродов при $z = 0$ и при $z = H$ соответственно.

Для определения интенсивности деформаций ЭРЭ необходимо составить уравнение движения. Существует широкий класс элементов, которые подчиняются формально одинаковым уравнениям, поэтому целесообразно рассмотреть наиболее типичные из них. В каждом уравнении движения правая часть отражает вибрационный режим воздействия. Этот режим следует рассматривать в неразрывной связи с уравнением движения.

36.2. ЛИНЕЙНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Многие ЭРЭ современной РЭА отличаются весьма малыми размерами. Поэтому практически при любом виде вибрационного воздействия колебательные системы, образованные этими «точечными» элементами, имеют только одну четко выраженную резонансную частоту. Механические колебания таких идеализированных систем, называемых линейными осцилляторами, подчиняются уравнению

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \alpha \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = - \frac{d^2 v}{dt^2}, \quad (36.1)$$

где $\frac{d^2 v}{dt^2}$ — ускорение основы (шасси), на которой закреплен этот ЭРЭ. На рис. 36.2 представлены примеры ЭРЭ и их динамических моделей, относящихся к линейным осцилляторам.

36.2.1. Вибрационный режим. Общее решение уравнения (36.1) можно записать в виде

$$u = e^{-\frac{\alpha t}{2}} (A \sin \omega t + B \cos \omega t) - \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{2}(\tau - t)} \frac{\sin \omega(t - \tau)}{\omega} \ddot{v}(\tau) d\tau,$$

где A и B — постоянные интегрирования; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2/4}$ — частота свободных затухающих колебаний; $\ddot{v} = \frac{d^2 v}{dt^2}$. Выбор конкретного вида процесса обусловлен прежде всего реальными нагрузками.

36.2.2. Гармонические вибрации. Если радиодеталь подвержена гармоническим воздействиям вида $v = A \sin \Omega t$, то с течением времени деформации линейного осциллятора будут также гармоническими:

$$u = \frac{V\Omega^2 \sin(\Omega t + \varphi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\alpha\Omega)^2}}.$$

Амплитуда вынужденных колебаний $V\Omega^2/\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\alpha\Omega)^2}$, как известно, отражает резонансные свойства объекта. Этот режим реализуется при испытаниях оборудования на специальных вибростендах.

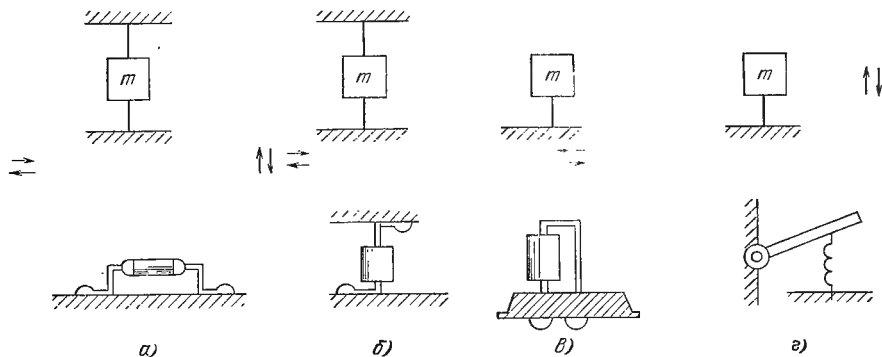


Рис. 36.2 Электрорадиоэлементы и соответствующие им механические модели (линейные осцилляторы):

а, б, в — типовые элементы; г — механическая система замыкателя реле

36.2.3. Случайный колебательный режим. Для характеристики случайных вибраций часто используется дисперсия

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{\omega^2} \int_0^t \int_0^t e^{\frac{\alpha}{2}(\tau_1 + \tau_2 - 2t)} \sin \omega(t - \tau_1) \sin \omega(t - \tau_2) R_r(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Важным частным случаем воздействия является стационарный процесс, когда $R_r(\tau_1, \tau_2) = R_r(\tau_1 - \tau_2)$. Для дельта-коррелированного стационарного процесса $R_r = Q\delta(\tau_1 - \tau_2)$ σ_u^2 можно найти в явном виде:

$$\sigma_u^2 = \frac{Q}{4\omega^2 + \alpha^2} \left[\frac{2}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) - e^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha}{\omega^2} \sin^2 \omega t + \frac{\sin 2\omega t}{\omega} \right) \right].$$

Физически этот случай реализуется, если спектральная плотность интенсивности воздействия постоянна в той области частот, в которой справедливо уравнение движения системы.

36.2.4. Марковский процесс. Теорию марковских процессов можно применить для анализа линейных колебаний, если функция корреляции является дельта-функцией (пара $u, \dot{u} = \frac{du}{dt}$ образует марковский процесс). Весьма важная характеристика случайного процесса $p(u, \dot{u}, t)$ — плотность распределения случайных величин u и $\dot{u}$ — выражается через начальное распределение $p_0(u_0, \dot{u}_0)$

в момент $t = 0$ и переходную плотность вероятности $p(u, \dot{u}, t, u_0, \dot{u}_0, 0)$ интегралом Смолюховского

$$p(u, \dot{u}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int p_0(x, y) p(u, \dot{u}, t, x, y, 0) dx dy.$$

При этом начальное распределение считается заданным, а переходная функция находится из кинетического уравнения, которое для линейной колебательной модели имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\alpha x + \omega_0^2 y) p - \frac{\partial}{\partial y} x p + \frac{Q}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2},$$

где $x = \frac{du}{dt} - \frac{du_0}{dt}$; $y = u - u_0$; $p(x, y, t)$

для краткости обозначено через p . Решение этого уравнения можно выразить через нормальную функцию

$$p(x, y, t) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} - \frac{2rxy}{\sigma_x\sigma_y}\right)\right\},$$

где r — коэффициент корреляции; σ_y^2 , σ_x^2 — дисперсии координат y и x соответственно:

$$\begin{aligned}\sigma_y^2 &= \frac{Q}{4\omega^2 + \alpha^2} \left[\frac{2}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) - \frac{e^{-\alpha t}}{\omega^2} (\alpha \sin^2 \omega t + \omega \sin 2\omega t) \right]; \\ \sigma_x^2 &= \frac{Q}{4\omega^2 + \alpha^2} \left[\frac{2\omega}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) + \frac{\alpha e^{-\alpha t}}{2\omega} (\alpha \sin 2\omega t + 2\omega \cos 2\omega t) - \right. \\ &\quad \left. - e^{-\alpha t} (\alpha \cos^2 \omega t - \omega \sin 2\omega t) \right] + \frac{\alpha^2 \sigma_y^2}{4}; \\ r\sigma_x\sigma_y &= \left(\frac{Q}{4\omega^2 + \alpha^2} \right) \left[1 - \frac{e^{-\alpha t}}{2\omega} (\alpha \sin 2\omega t + 2\omega \cos 2\omega t) \right] - \frac{\alpha}{2} \sigma_y^2.\end{aligned}$$

36.2.5. Стационарный процесс. Пусть воздействующие вибрации являются стационарными и параметр $\alpha \neq 0$; тогда с течением времени деформации также будут стационарными. Подставляя преобразования Фурье

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} dc_u(\omega); \quad \ddot{v}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} dc_v(\omega) \quad (36.2)$$

в (36.1), находим связь между спектрами:

$$\frac{dc_u}{d\omega} = \frac{\frac{dc_v}{d\omega}}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\alpha\omega}. \quad (36.3)$$

Поскольку наряду с преобразованиями (36.2) существуют комплексно-сопряженные для спектров c_u^x и c_v^x , то:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+i\omega t} dc_u^x(\omega); \quad \ddot{v}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+i\omega t} dc_v^x(\omega)$$

и, следовательно,

$$\frac{dc_u^x}{d\omega} = \frac{\frac{dc_v^x}{d\omega}}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\alpha\omega}.$$

Из (36.2) и (36.3) получаем

$$M\{u(t_1)u(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_1 t_1 - i\omega_2 t_2} M\{dc_u(\omega_2)dc_u^x(\omega_1)\}. \quad (36.4)$$

Для стационарного процесса правая часть (36.4) зависит только от разности $t_1 - t_2$. Следовательно,

$$M\{dc_u(\omega_2)dc_u^x(\omega_1)\} = S_u(\omega_1)\delta(\omega_1 - \omega_2)d\omega_1 d\omega_2;$$

$$R_u(t_1 - t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega(t_1 - t_2)} S_v(\omega) d\omega}{|\omega^2 - \omega_0^2 - i\alpha\omega|^2}.$$

Отсюда следует, что спектральная плотность интенсивности вибраций объекта связана со спектральной плотностью интенсивности воздействующих вибраций соотношением

$$S_u(\omega) = \frac{S_v(\omega)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\alpha\omega)^2},$$

$$\text{а } \sigma_u^2 = R_u(0); \quad \sigma_u^2 = |\ddot{R}(0)|.$$

36.3. МЕХАНИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

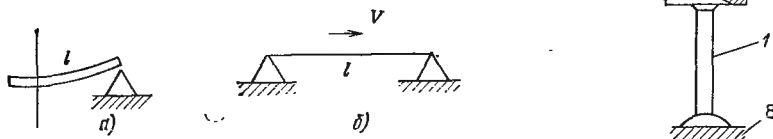
36.3.1. Динамический изгиб. Часто для описания механических процессов ЭРЭ применяются уравнения динамического изгиба

$$\rho s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\rho s \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (36.5)$$

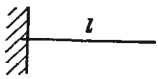
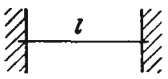
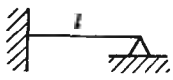
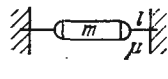
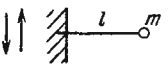
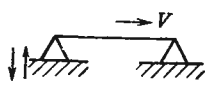
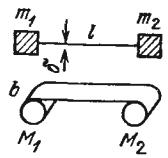
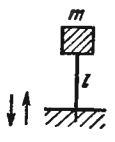
где $\ddot{v}(t)$ — ускорение основания (шасси), на котором закреплен ЭРЭ. Ясно, что для ЭРЭ с консольной конструкцией крепления следует положить $P = 0$. Существует два способа идеального закрепления края стержня: защемление краев (в этом случае на краю полагаем: $w = 0; \frac{\partial w}{\partial x} = 0$) и свободное опирание (в этом случае граничные условия имеют вид: $w = 0; \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$). Примеры ЭРЭ, надежность которых определяется на основании уравнения (36.5), представлены на рис. 36.3 и 36.4 и в табл. 36.1.

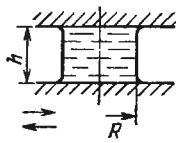
Рис. 36.4. Конструкция кремниевого диода малой мощности и способ его крепления к шасси: 1, 2 — выводы; 3 — защитная металлическая трубка; 4 — стеклянный изолятор; 5 — корпус; 6 — кремниевая пластина; 7 — кристаллодержатель; 8 — шасси

Рис. 36.3. Механические модели элементов системы с распределенными параметрами: а) стержень, работающий на изгиб (замыкатель реле); б) струна (носитель информации на магнитной ленте)



Собственные частоты элементов РЭА

Элементы РЭА	Механическая модель	Собственная частота
Электроды приборов, контакторы		Консоль: $kl = 1,875$ $\omega = k^2 \sqrt{EJ/\rho s}$
Электроды, провода		Зашемленный стержень $kl = 4,730$ $\omega = k^2 \sqrt{EJ/\rho s}$
Контактроны		Опертая консоль: $kl = 3,9266$ $\omega = k^2 \sqrt{EJ/\rho s}$
ЭРЭ		Осциллятор $\omega = \sqrt{\frac{24EJ}{(m + 0,74\mu) l^3}}$, μ — масса стойки
Микросхемы, ЭРЭ с числом выводов n		Осциллятор $\omega = \sqrt{\frac{12EJn}{l^3 (m + 0,371\mu n)}}$
ЭРЭ, детали фотоэлементов		Консоль с массой m $\omega = \sqrt{\frac{12EJ}{(m + 0,236\mu) l^3}}$
Носитель информации на магнитной ленте		Струна: $C^2 = T/\rho s$, T — натяжение, ρ — плотность $\omega = \frac{\pi}{lC} (C^2 - V^2)$, V — скорость протяжки
Лентопротяжной механизм с двумя инерциальными элементами		Двухмассовый осциллятор: $m_1 = M_1/2$; $m_2 = M_2/2$ $\omega = \sqrt{\frac{\delta bE (m_1 + m_2)}{l m_1 m_2}}$
ЭРЭ, электроды, датчики		Продольно колеблющаяся консоль $\omega = \sqrt{Es/ml}$, s — сечение стойки

Элементы РЭА	Механическая модель	Собственная частота
Жидкий элемент контактронов	 Жидкий цилиндр: $c^2 = \alpha / \rho R$, $\nu = \eta / \rho$, α — коэффициент поверхностного напряжения, η — вязкость	$\omega = \frac{\pi}{l} \sqrt{c^2 - \left(\frac{\pi \nu}{2h}\right)^2}$

Из уравнения (36.3) можно получить уравнение идеальной струны, которое часто используется в качестве механической модели носителя информации на магнитной ленте.

При внезапном движении объекта с ускорением a такой элемент будет испытывать деформацию

$$w = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4l^2 \alpha \rho s (1 - \cos \omega_{2k-1} t)}{\pi^3 (2k-1)^3 \left[\frac{EJ \pi^2}{l^2} (2k-1)^2 + P \right]} \sin \frac{(2k-1) \pi x}{l},$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{l^2} \left(\frac{EJ}{l^2} \frac{n^2 \pi^2}{\rho s} + \frac{P}{\rho s} \right)}.$$

Ясно, что эти колебания вызывают ряд нежелательных явлений, каждое из которых можно определить на основании данного решения. Применительно к электродам полупроводниковых приборов это уравнение позволяет определить перерезывающую силу на конце стержня, т. е. $Q = EJ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$. При значительных нагрузках, когда $Q > Q_{кр} \sim P$, полупроводниковый прибор прекращает функционирование. Анализ конструкции электродов (см. рис. 36.4) показывает, что значительное увеличение силы не увеличивает вибронадежность прибора, так как приводит к уменьшению его жесткости ($P < 0$).



Рис. 36.5. Механическая модель блока радиоаппаратуры в виде пластины с осцилляторами

36.3.2. Аппаратурные блоки (отсеки оборудования). Рассмотрим систему, состоящую из пластины $a \times b$, по поверхности которой распределены осцилляторы (рис. 36.5). Движение такой системы подчиняется уравнениям:

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} + K \right) \times$$

$$\times (w - w_1) = - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad (36.6)$$

$$\rho_1 h_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} + K \right) (w_1 - w) = - \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (36.7)$$

где $w = w(x, y, t)$ — смещение пластины из положения равновесия; $w_1 = w_1(x, y, t)$ — поле смещения распределенных масс осцилляторов; $u(t)$ — смещение изделия, на котором закреплен блок; $\alpha \frac{\partial}{\partial t} + K$ — комплексная жест-

кость крепления осцилляторов, отнесенная к единице поверхности. Система (36.6) применима только в том случае, если размеры каждого осциллятора малы по сравнению с длиной изгибной волны. Простое решение (36.6), (36.7) существует только для равномерного распределения деталей по поверхности шасси, края которого оперты. При гармоническом возбуждении $u = Ve^{-i\omega t}$ это решение имеет вид:

$$\omega = V \sum_{n, m=1}^{\infty} \frac{\rho h \omega^2 | -\rho_1 h_1 \omega^2 + 2K - 2i\alpha\omega | \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} e^{-i\omega t}}{[\rho h (\omega_{nm}^2 - \omega^2) + K - i\alpha\omega] | -\rho_1 h_1 \omega^2 + K - i\alpha\omega | - [K - i\alpha\omega]^2},$$

$$\omega_1 = V \sum_{n, m=1}^{\infty} \frac{\rho_1 h_1 \omega^2 [\rho h (\omega_{nm}^2 - \omega^2) + 2K - 2i\alpha\omega] \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} e^{-i\omega t}}{[\rho h (\omega_{nm}^2 - \omega^2) + K - i\alpha\omega] | -\rho_1 h_1 \omega^2 + K - i\alpha\omega | - [K - i\alpha\omega]^2},$$

$$\omega_{nm}^2 = \frac{D}{\rho h} \left(\frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \right).$$

Эти формулы позволяют легко получить спектральные формулы для стационарных случайных процессов.

36.3.3. Жесткое крепление деталей. Если крепление ЭРЭ к шасси достаточно жесткое, то задача сводится к увеличению массы и жесткости пластины. Прибор в целом ведет себя как однородная пластина с так называемыми эффективными параметрами.

36.3.4. Жидкометаллические электроды. Простейшей расчетной моделью жидкометаллического электрода является вязкий цилиндр, совершающий поперечные капиллярные колебания. Уравнение движения электрода имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \nu \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t}.$$

Возбуждение отражено в следующих граничных и начальных условиях (см. табл. 36.1, 36.2):

$$u(0, t) = u_0(t); u(h, t) = u_0(t); u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) = 0.$$

При смещении электрода из положения равновесия, т. е. при $u = u_0$, решение записывается в виде

$$u - u_0 = - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin \frac{n\pi z}{h} \int_0^t e^{-\frac{\nu n^2 \pi^2}{2h^2}(t-\tau)} \frac{\sin \omega_n(t-\tau)}{\omega_n} \ddot{u}_0(\tau) d\tau,$$

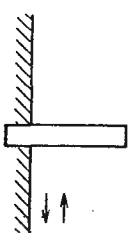
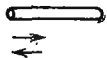
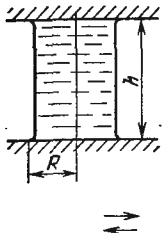
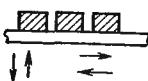
где $\gamma_n = 0$, если $n = 2m$; $\gamma_n = 4/\pi (2m - 1)$, если $n = 2m - 1$; $\omega_n^2 = (n\pi c/h)^2 - (\nu n^2 \pi^2 / 2h^2)^2$. Для установившихся гармонических колебаний при $v = V \sin \omega t$ ($u_0 = v$)

$$u - u_0 = \omega^2 V \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin \frac{n\pi z}{h} \frac{\left[\left(\frac{n^2 \pi^2 c^2}{h^2} - \omega^2 \right) \sin \omega t - \left(\nu \omega \frac{n^2 \pi^2}{h^2} \right) \cos \omega t \right]}{\left[\left(\frac{n\pi c}{h} \right)^2 - \omega^2 \right]^2 + \left(\nu \omega \frac{n^2 \pi^2}{h^2} \right)^2}.$$

Для анализа случайных колебаний решение записывается в виде

$$u - u_0 = \sum u_n(t) \sin \frac{n\pi z}{h}.$$

Коэффициенты диссипации элементов конструкций РЭА

Механическая модель	Название конструкции	Временной коэффициент затухания	Параметры диссипации (комплексный модуль Юнга)
	Изгибно-колеблющийся стержень (потери обусловлены теплопроводностью)	$\delta = \frac{\gamma h^2 \omega^2}{24a},$ a — коэффициент температуропроводности, ω — круговая частота	$E = E_0 (1 + i\eta),$ где $i\eta = \frac{\gamma h^2 \partial}{12a \partial t}$ или $i\eta = i\omega \frac{\gamma h^2}{12a},$ где $\gamma = c_p / c_V - 1,$ c_p и c_V — теплоемкости
	Продольно-колеблющийся стержень	$\delta = \frac{\lambda T_0 \rho \alpha^2 \omega^2}{18 c_p^2},$ λ — теплопроводность, ρ — плотность, c_p — теплоемкость, α — коэффициент линейного расширения, T_0 — температура	$E = E_0 (1 + i\eta),$ где $\eta = 2\delta / \omega$
	Жидкометаллический элемент	$\delta = \frac{\eta \omega^2}{2C^2 \rho},$ η — вязкость, β — коэффициент поверхностного натяжения, R — радиус, $C^2 = \beta / R\rho$	—
	Шасси	$\delta \sim \eta$	$E = E_0 (1 + i\eta),$ где $\eta = 0,02 - 0,025$
Не приводится	Сложные приборы	$\delta \sim \eta$	$E = E_0 (1 + i\eta),$ где $\eta = 0,03 - 0,05$

Для каждой обобщенной координаты $u_n(t)$ получим уравнение

$$\ddot{u}_n(t) + \nu \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2 \dot{u}_n + \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2 C^2 u_n = -\gamma_n \ddot{v}.$$

Это уравнение совершенно совпадает с уравнением (36.1), что позволяет использовать все соответствующие решения.

36.4. НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОРАДИОЭЛЕМЕНТОВ

36.4.1. Нелинейный осциллятор. Нелинейная колебательная система с одной степенью свободы (нелинейный осциллятор) описывается уравнением

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \alpha \frac{du}{dt} + f(u) = -\frac{d^2 v}{dt^2},$$

где $f(u)$ — антисимметричная функция, имеющая один корень. Рассмотрим ЭРЭ, например фотодиод, закрепленный на выводах (рис. 36.6). Энергия изогнутого стержня содержит слагаемые, обусловленные изгибом и растяжением, т. е.

$$2W = EJ \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{Es}{4l} \left[\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right]^2.$$

Для системы с одной степенью свободы следует положить $u = u(t) \sin \frac{\pi x}{2l}$ и определить нелинейную силу $f(u) = 2 \frac{\partial W}{\partial u}$.

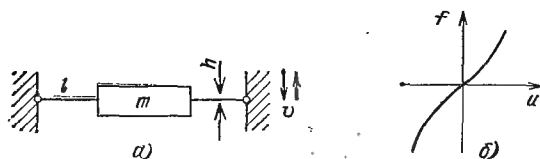


Рис. 36.6. Радиодеталь с кубической упругой характеристикой

Таким образом, при $v = V \sin \omega t$ приходим к уравнению

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \chi \frac{du}{dt} + \omega_0^2 \left(u + \frac{3u^3}{h^2} \right) = \omega^2 V \sin \omega t,$$

$$\omega_0^2 = \pi^4 EJ / 2^4 l^3 M$$

(M складывается из твердой массы и половины всей массы выводов).

Установившиеся колебания этой системы будут

$$u = u(t) = V_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

где V_0 находится из уравнения

$$\frac{9\omega_0^2}{4h^2} V_0^3 - (\omega^2 - \omega_0^2) V_0 = \omega^2 V.$$

При случайном стационарном дельта-коррелированном процессе воздействия плотность распределения перемещений такого ЭРЭ определяется законом Больцмана

$$p(u) = G \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_u^2} \left[\frac{u^2}{2} + \frac{3u^4}{4h^2} \right] \right\},$$

где G — константа нормирования; $\sigma_u^2 = Q / 2\alpha\omega_0^2$.

36.4.2. Нелинейная система с односторонним ограничением. Если монтаж ЭРЭ осуществляется так, как показано на рис. 36.7, то механической моделью является несимметричный нелинейный осциллятор с уравнением движения

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \alpha \frac{du}{dt} + \omega_0^2 \left(u - \frac{u^2}{\delta} \right) = \omega^2 V_1 \sin \omega t.$$

Решение этого уравнения $u = A_0 + A_1 \sin(\omega t - \varphi)$, где A_0 , A_1 и φ определяются из уравнений:

$$A_0 = A_1^2/2\delta;$$

$$\left[(\omega_0^2 - \omega^2) A_1 - \frac{\omega_0^2}{\delta} A_1^3 \right]^2 + (\alpha \omega A_1)^2 = \omega^2 V_1;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\alpha \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) - \left(\frac{\omega_0}{\delta} A_1 \right)^2}.$$

Случайные колебания в данном случае будут характеризоваться постоянным систематическим смещением, обусловленным ударами детали об основу.

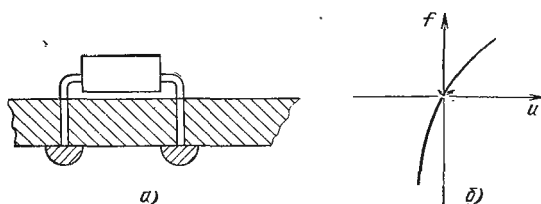


Рис. 36.7. Радиодеталь с квадратичной характеристикой, обусловленной контактной жесткостью крепления

36.4.3. Нелинейные колебания шасси блока. В качестве колебательной модели блока рассмотрим квадратную $2a \times 2a$ пластину. Энергия деформаций обусловлена изгибом и растяжением пластины:

$$\begin{aligned} W = & \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} \left\{ \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy + \\ & + \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] 2\nu + \right. \\ & + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]^2 + \\ & \left. + \frac{1-\nu}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right\} \times \\ & \times dx dy. \end{aligned}$$

При аппроксимации движения системой с двумя степенями свободы следует взять:

$$w(x, y, t) = w(t) \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2a};$$

$$u(x, y, t) = u(t) \cos \frac{\pi y}{2a} \sin \frac{\pi x}{a}; \quad v(x, y, t) = v(t) \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{2a}.$$

Вычисляя энергию, находим для распределения состояний следующую форму по закону Больцмана:

$$p = C \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\omega^2 + \frac{12a^2}{\pi^4 h^2} \left(\frac{5\pi^4}{64} \frac{\omega^4}{a^2} - \frac{17\pi^2}{6} \frac{u\omega^2}{a} + u^2 \left[\frac{35\pi^2}{4} + \frac{80}{9} \right] \right) \right] \right\},$$

где C — некоторая константа; $\sigma_u^2 = Q/2\alpha\omega_0^2$.

36.5. МЕТОДЫ РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ РАДИОЭЛЕКТРОННОЙ АППАРАТУРЫ, ПОДВЕРЖЕННОЙ ВИБРАЦИЯМ

Для расчетов показателей надежности РЭА могут быть использованы значения интенсивностей отказов ЭРЭ, полученные по результатам специальных испытаний при полигармонических режимах.

Пример 36.2. Определить вероятность безотказной работы прибора, состоящего из 100 элементов, расположенных на консольном стальном шасси (рис. 36.8, а), защемленный край которого возбуждается с частотой $f = 242$ Гц

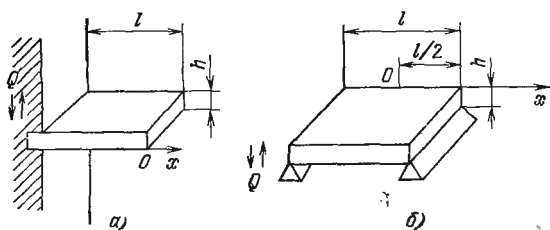


Рис. 36.8

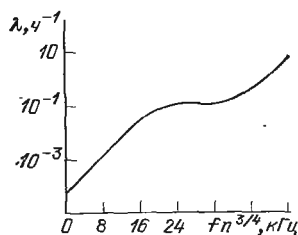


Рис. 36.9

Рис. 36.8. Способы крепления шасси прибора

Рис. 36.9. Зависимость интенсивности отказов рассматриваемого ЭРЭ от вибрации

и амплитудой $u_0 = 0,0055$ см. Длина шасси $l = 25$ см, толщина $h = 0,3$ см. Зависимость интенсивности отказов ЭРЭ от амплитуды и частоты вибраций $\lambda(u, \omega)$, приведена на рис. 36.9.

Решение. Амплитуда вибраций шасси определяется формулой

$$u(x) = u_0 \frac{(\operatorname{ch} kl + \cos kl)(\operatorname{ch} kx + \cos kx) - (\operatorname{sh} kl - \sin kl)(\operatorname{sh} kx + \sin kx)}{2(1 + \operatorname{ch} kl \cos kl)},$$

где $k = \sqrt{12\rho\omega^2(1 - \nu^2)/Eh^3}$, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность стали.

Учитывая распределение элементов по шасси прибора, находим вероятность безотказной работы по формуле

$$P(t) = \exp \left\{ -\frac{mt}{l} \int_0^l \lambda(u(x), \omega) dx \right\}. \quad (36.8)$$

Вычисляя интеграл численным методом с учетом приведенной зависимости $\lambda(u, \omega)$, определяем

$$P\{t\} = \exp \{-0,054t\}.$$

Пример 36.3. В условиях предыдущей задачи найти вероятность безотказной работы для прибора, возбуждение на который идет по краям (см. рис. 36.8, б),

Р е ш е н и е. Амплитуда вибраций прибора в данном случае

$$u(x) = \frac{\operatorname{ch} \frac{kl}{2} \cos kx + \cos \frac{kl}{2} \operatorname{ch} kx}{2 \operatorname{ch} \frac{kl}{2} \cos \frac{kl}{2}} u_0. \quad (36.9)$$

Вычисляя интеграл (36.8) с учетом (36.9), находим

$$P\{t\} = \exp\{-0,014t\}.$$

Пример 36.4. Построить математическую модель надежности для линейного осциллятора под воздействием вибрации типа «белого шума». В качестве критерия отказа примем смещение осциллятора за уровень Δ .

Р е ш е н и е. Вероятность безотказной работы осциллятора

$$P(t) = e^{-\lambda t},$$

$$\text{где } \lambda = \frac{\omega_0}{\pi} e^{-\Delta^2 \omega_0^2 \alpha / Q}.$$

Модели этого вида могут использоваться и для качественного анализа надежности ЭРЭ при их разрушении из-за случайного выброса вибронгрузки.

Пример 36.5. Виброшумы в электронном тракте аппаратуры могут вызвать сбой. Рассмотрим пассивную схему, выходной сигнал которой $y(t)$ связан с входным $x(t)$ уравнением

$$\sum_{m=1} a_m y^{(m)} = x.$$

Р е ш е н и е. Найти выражение для вероятности безотказной работы. При наложении вибраций следует взять $a_k(t) = a_k + \Delta_k(t)$. Дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами эквивалентно интегральному:

$$y(t) = y_0(t) - \sum_k \int_0^t \Delta_k(\tau) y^{(k)}(\tau) h_0(t-\tau) d\tau, \quad (36.10)$$

где $h_0(t)$ — импульсная переходная функция невозмущенной системы; $y_0(t)$ — решение невозмущенной задачи. Если уравнение (36.10) удовлетворяет условиям Коши—Липшица, то погрешность можно оценить как

$$\varepsilon = y - y_0 = \sum_{k=0}^n \int_0^t \Delta_k(\tau) y_0^{(k)}(\tau) h_0(t-\tau) d\tau.$$

Таким образом, существует линейный оператор, преобразующий входные вибрационные возмущения в ошибку на выходе схемы. Если флуктуации параметров являются случайными, то можно найти дисперсию виброшума и дисперсию скорости:

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sum_{i,k} \int_0^t \int_0^t R_{ik}(\tau_1 - \tau_2) y_0^{(i)}(\tau_1) y_0^{(k)}(\tau_2) h_0(t-\tau_1) h_0(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2;$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sum_{i,k} \int_0^t \int_0^t R_{ik}(\tau_1 - \tau_2) y_0^{(i)}(\tau_1) y_0^{(k)}(\tau_2) \dot{h}_0(t-\tau_1) \dot{h}_0(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2,$$

где $R_{ik}(\tau_1 - \tau_2)$ — функция корреляции флуктуаций Δ_i и Δ_k .

Обычно схема считается работоспособной, если $|\varepsilon| < \Delta$. Тогда, используя результаты теории выбросов, имеем

$$P(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right\},$$

где $\lambda = \frac{\sigma_e}{\pi \sigma_e} e^{-\Delta^2 / 2 \sigma_e^2}$.

Пример 36.6. В оборудовании, подверженном значительным нагрузкам, могут наблюдаться явления, когда функциональные свойства аппаратуры меняются в такой степени, что она находится практически в состоянии отказа, хотя при снятии нагрузки работоспособность ее может восстановиться. Рассмотрим генератор томсоновского типа. Найти характеристики амплитуды сигнала.

Решение. В переменных Ван-Дер-Поля уравнение генератора

$$\frac{dr}{dt} - \frac{\mu}{2} (\alpha - 1) r + \frac{\alpha \mu}{8} r^3 = 0$$

является уравнением с переменными коэффициентами, т. е. $\alpha = \alpha(t)$, $\mu = \mu(t)$.

Амплитуда сигнала в генераторе будет подчиняться следующему закону:

$$r = \frac{\exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t \mu(\tau) [\alpha(\tau) - 1] d\tau \right\}}{\left\{ C + \int_0^t \frac{\mu(\tau) \alpha(\tau)}{4} \left[\exp \int_0^\tau \mu(\tau_1) [\alpha(\tau_1) - 1] d\tau_1 \right] d\tau \right\}^{1/2}}.$$

Для периодических воздействий можно рассмотреть установившиеся колебания. Полагая $\mu = \text{const} = \mu_0$, $\alpha = \alpha_0 + \Delta \cos \Omega t$, можно найти

$$r = \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{2(\alpha_0 - 1)} J_0 \left(\frac{\mu_0 \Delta}{i \Omega} \right) e^{-\frac{\mu_0 \Delta}{\Omega} \sin \Omega t} \right\}^{-1/2}.$$

Ясно, что режим глубокой модуляции следует считать отказом.

Пример 36.7. Поперечные колебания быстро движущейся гибкой ленты подчиняются уравнению

$$\frac{p}{\rho s} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где V — скорость протяжки. Определить условия устойчивости движения ленты.

Решение. Установившиеся колебания при возмущении ленты на границах $u = u_0 e^{-i\omega t}$ при $x = 0$ и $x = l$

$$u(x, t) = u_0 \frac{\sin \frac{\omega C x}{C^2 - V^2}}{\sin \frac{\omega C l}{C^2 - V^2}} \exp \left\{ \frac{i\omega V x}{C^2 - V^2} - i\omega t \right\}.$$

Условие $|u(x, t)| < \delta$ приводит к определенным областям для параметров P , V , u_0 , где колебания ограничены и функционирование ленты является удовлетворительным.

При флуктуации в струне силы натяжения определяются законом $P = P_0 - P_1 \cos \Omega t$. Решение можно искать в виде $u = u(t) \sin(\pi x/l)$ (если $u_0 = 0$ и $V = 0$). Для колебаний струны получим уравнение Матье (рис. 36.10)

$$\frac{du}{d\tau^2} + (a - 2b \cos 2\tau) u = 0,$$

где $a = 4\pi^2 P_0 / \Omega^2 \rho s l^2$; $b = 2\pi^2 P_1 / \Omega^2 \rho s l^2$, области устойчивости которого хорошо изучены в литературе.

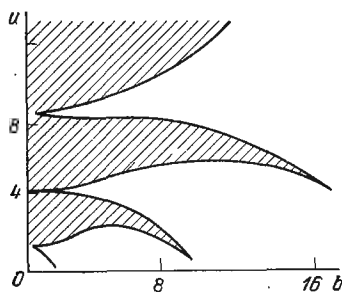


Рис. 36.10. Области устойчивости (заштрихованы) уравнения Матье

В ряде случаев, когда лента выполнена из полимерных материалов, которые вместо закона Гука подчиняются закону $\sigma = E \left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \epsilon$, для продольных колебаний можно использовать уравнение

$$\rho s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E s \left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (36.11)$$

При $u(x, t) = u(t) \sin(\pi x/l)$ (36.11) приводится к виду

$$\ddot{u} + \frac{E\pi^2}{\rho l^2} \eta \dot{u} + \omega^2 u = 0.$$

Это уравнение заменой $\dot{u} = v$ приводится к стандартному виду

$$\frac{dv}{du} = \frac{au + bv}{cu + dv}. \quad (36.12)$$

Для рассматриваемого случая следует положить: $a = -\omega^2$; $b = -\frac{E\pi^2}{\rho l^2} \eta$; $c = 0$; $d = 1$. Уравнение (36.12), связывающее u и v , можно проинтегрировать и получить фазовые кривые. Семейство фазовых кривых окружает особую точку ($u = 0, v = 0$), являющуюся равновесной. Вид интегральных кривых, классификация которых представлена в табл. 36.3, и определяет тип особой точки и ее устойчивость, т. е. устойчивость равновесного положения.

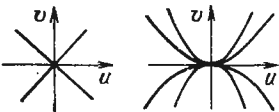
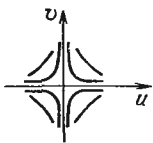
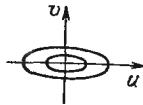
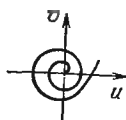
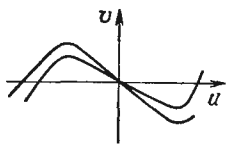
В равновесной точке с координатами x_0, y_0 , где $F(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$, справедливо представление (36.12) для любого нелинейного уравнения, приведенного к виду:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F(x, y)}{Q(x, y)}; \quad a = F'_x(x_0, y_0); \quad b = F'_y(x_0, y_0); \quad c = Q'_x(x_0, y_0); \quad d = Q'_y(x_0, y_0).$$

Лента устойчива, если параметр $\eta > 0$.

К задачам устойчивости относят и статистический анализ нелинейных систем на основе кинетических уравнений. Для систем с несколькими положениями устойчивого равновесия отказ обычно рассматривается как переброс системы через потенциальный барьер.

Типы особых точек системы

Условие классификации	Тип особой точки	Условие неустойчивости	Фазовый портрет для уравнения возле особой точки (0,0)
$(b-c)^2 + 4ad > 0$	Узел $ad - bc < 0$	$b + c > 0$	
	Седло $ad - bc > 0$	$ad - bc > 0$	
$(b-c)^2 + 4ad < 0$	Центр $b + c = 0$	Устойчива	
	Фокус $b + c \neq 0$	$b + c > 0$	
$(b-c)^2 + 4ad = 0$	Узел	$b + c > 0$	

Пусть уравнение записывается для фазовых координат x_i в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, \dots, x_n, t) + \psi_i(t).$$

Здесь ψ_i — случайные возмущения, вызванные механическим воздействием. При выполнении условия

$$M\{\psi_i\} = 0; M\{\psi_i(t_1)\psi_k(t_2)\} = C_{ik}(x_1, \dots, x_n)\delta(t_1 - t_2)$$

переходная функция марковского процесса может быть найдена из уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} F_i p + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} C_{ik} p.$$

Пример 36.8. Рассмотрим электронный прибор, электрический параметр u которого описывается уравнением

$$RC \frac{du}{dt} + u + R\varphi(u) = \varepsilon,$$

где R, C, ε — электрические параметры; $i = \varphi(u)$ — вольт-амперная характеристика прибора в цепи схемы (рис. 36.11). Прибор имеет три состояния равновесия, которые определяются из условия $\varepsilon - R\varphi(u) - u = 0$. Требуется определить показатели безотказности.

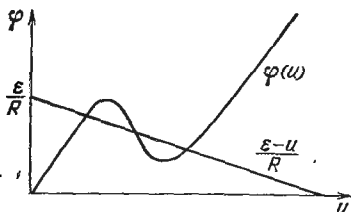


Рис. 36.11. Характеристика прибора с тремя положениями равновесия

Решение. Под воздействием вибраций состояния могут случайным образом меняться. Кинетическое уравнение для прибора

$$\frac{dp}{dt} = - \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\varepsilon - R\varphi(u) - u}{RC} \right] p + \frac{Q}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial u^2}.$$

Это уравнение можно проинтегрировать для стационарных состояний

$$p = G \exp \left\{ - \frac{(u - \varepsilon)^2}{QRC} - 2 \int_0^u \frac{\varphi(u)}{QC} du \right\},$$

где G — константа. По площади интегралов слева и справа от точки неустойчивого равновесия (среднее из трех решений) можно оценить относительную частоту пребывания системы в неработоспособном состоянии.

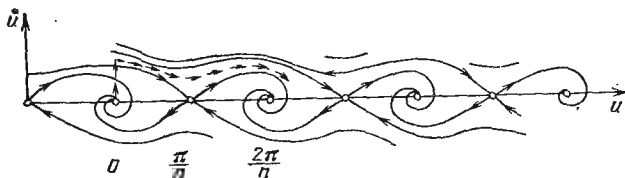


Рис. 36.12. Фазовый портрет нелинейной периодической системы с затуханием

Пример 36.9. Некоторые устройства электроники и автоматики подчиняются следующему нелинейному уравнению движения:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \alpha \frac{du}{dt} + \frac{F}{m} \sin nu = -\ddot{v},$$

где F — максимальная сила взаимодействия электродов прибора. Отказ прибора рассматривается как неуправляемый переброс через потенциальный барьер, вызванный возмущением $\ddot{v}$. Требуется определить вероятность безотказной работы.

Решение. Кратковременный импульс силы (ударное воздействие) может вызвать переброс (см. рис. 36.12) при критическом значении скорости $u_{кр}$.

$= \sqrt{4F/mn}$. Для анализа случайных колебаний применим кинетическое уравнение для переходной функции $p(x_1, x_2, t)$, где $x_1 = u$; $x_2 = \dot{u}$:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_1} x_2 p + \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \alpha x_2 + \frac{F}{m} \sin nx_1 \right\} p + \frac{Q}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}.$$

Стационарное решение этого уравнения можно записать в виде

$$p = C \exp \left\{ -\frac{\alpha x_2^2}{Q} + \frac{2\alpha F}{Qnm} (\cos nx_1 - 1) \right\}$$

и по формуле

$$\lambda = \frac{n \sqrt{\pi Q}}{4\pi^2 \sqrt{\alpha}} \frac{e^{-\frac{2\alpha F}{Qnm}}}{J_0 \left(\frac{2\alpha F}{iQnm} \right)}$$

оценить интенсивность перебросов (отказов), обусловленных вибрациями.

Раздел VIII

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

П1.1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ (ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ)

Случайные события — события, которые в результате произведенного опыта могут произойти или не произойти. (Обозначим случайное событие символом A .)

Достоверное событие — такое событие, которое непременно должно произойти. (Обозначим достоверное событие символом E .)

Невозможное событие — такое событие, которое заведомо не может произойти. (Обозначим невозможное событие символом e .)

Совместные (несовместные) события — такие события, появление одного из которых не исключает (исключает) возможности появления другого.

Зависимые (независимые) события — такие события, появление одного из которых влияет (не влияет) на появление другого события.

Противоположное, или дополнительное, событие относительно некоторого выбранного события A — событие, состоящее в не появлении этого выбранного события. (Обозначим противоположное событие $\bar{A}$.)

Полная группа событий — такая совокупность событий, что в результате опыта обязательно должно произойти хотя бы одно из событий этой совокупности.

П р и м е ч а н и е. События A и $\bar{A}$ составляют, естественно, полную группу событий.

Сумма, или объединение событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ — такое событие A , появление которого в опыте эквивалентно появлению в том же опыте хотя бы одного любого из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$. Обозначим сумму событий как

$$A = A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i,$$

где $\vee$ — знак логического сложения событий, а $\bigcup$ — знак логической суммы событий.

Если события $A_i, i = 1, \dots, n$, составляют полную группу событий, то

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = E.$$

Для логической суммы событий справедливы следующие равенства:

$$A \vee A = A; A \vee e = A; A \vee E = E.$$

Произведение, или пересечение событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ — такое событие A , появление которого в опыте эквивалентно появлению в том же опыте всех событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ одновременно. Обозначим произведение событий как

$$A = A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i,$$

где $\wedge$ — знак логического умножения событий, а $\bigcap$ — знак логического произведения событий.

Для произведения событий справедливы следующие равенства:

$$A \wedge A = A; A \wedge E = A; A \wedge e = e.$$

Если A_i и A_j несовместны, то $A_i \wedge A_j = e$.

Вероятность события — числовая характеристика степени возможности реализации случайного события в определенных условиях.

Основные свойства вероятности. Вероятности случайных событий имеют следующие основные свойства:

$$P(e) = 0; P(E) = 1;$$

$$0 = P(e) \leq P(A) \leq P(E) = 1; P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Теорема сложения вероятностей. Если $A_1, A_2, \dots, A_n$ — несовместные события и A — сумма этих событий, то вероятность события A равна сумме вероятностей события: $A_1, A_2, \dots, A_n$, т. е.

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Следствия 1. Если несовместные случайные события составляют полную группу событий, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P(E) = 1.$$

2. Для любых случайных событий A_1 и A_2 имеет место

$$P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap \bar{A}_2) = P(A_1).$$

Условная вероятность события A_1 при наступлении события A_2 — вероятность события A_1 , вычисленная в предположении, что событие A_2 наступило. Обозначим эту условную вероятность

$$P(A_1|A_2) = P(A_1 A_2) / P(A_2).$$

3. Для независимых событий A_1 и A_2

$$P(A_1|A_2) = P(A_1|\bar{A}_2) = P(A_1) \text{ и } P(A_2|A_1) = P(A_2|\bar{A}_1) = P(A_2).$$

Коэффициент регрессии события A_1 относительно события A_2 характеризует степень зависимости этих событий и определяется как

$$\rho(A_1, A_2) = P(A_1|A_2) - P(A_1|\bar{A}_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2) - P(A_1)P(A_2)}{P(A_2)P(\bar{A}_2)}.$$

Коэффициент корреляции событий A_1 и A_2 характеризует степень зависимости этих событий и определяется как

$$r(A_1, A_2) = \sqrt{\rho(A_1, A_2)\rho(A_2, A_1)} = \frac{P(A_1 \cap A_2) - P(A_1)P(A_2)}{\sqrt{P(A_1)P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_2)}}.$$

Коэффициент корреляции имеет следующие свойства:

$$r(A_1, A_2) = 0, \text{ если события независимы;}$$

$$r(A_1, A_2) = 1, \text{ если события } A_1 \text{ и } A_2 \text{ эквивалентны;}$$

$$r(A, \bar{A}) = -1;$$

$$r(\bar{A}_1 A_2) = r(A_1 \bar{A}_2) = -r(A_1 A_2);$$

$$r(A_1, A_2) = r(\bar{A}_1, \bar{A}_2).$$

Теорема умножения вероятностей. Вероятность совместного появления двух событий A_1 и A_2 в данном опыте равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие появилось, т. е.

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1|A_2)P(A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1).$$

В общем случае теорему умножения можно записать в виде

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1|A_2 \cap \dots \cap A_n)P(A_2|A_3 \cap \dots \cap A_n) \dots \\ \dots P(A_{n-1}|A_n)P(A_n).$$

Поскольку

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i\right),$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n P(A_i \vee A_j) + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n P(A_i \vee A_j \vee A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right).$$

Теорема умножения вероятностей для независимых событий. Используя следствие 3 для независимых (в совокупности) событий, теореме умножения вероятностей можно записать в виде

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i).$$

Следствия. 1. Для несовместных случайных событий A_1 и A_2

$$P(A_1 \wedge A_2) = P(e) = 0.$$

2. Независимые случайные события A_1 и A_2 всегда совместны, так как

$$P(A_1 \wedge A_2) > P(A_1) P(A_2) > 0,$$

если A_1 или A_2 не являются невозможными событиями.

Теорема сложения для совместных случайных событий. Для совместных событий A_1 и A_2 можно записать

$$P(A_1 \vee A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \wedge A_2).$$

Для n совместных случайных событий $A_1, A_2, \dots, A_n$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n P(A_i \wedge A_j) + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n P(A_i \wedge A_j \wedge A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right).$$

Для независимых (в совокупности) событий из выражения

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i\right)$$

получаем

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i)).$$

Формула полной вероятности. Если событие A_0 может осуществиться лишь при условии, что произошло какое-нибудь событие A_i из числа несовместных событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, то вероятность события $P(A_0)$ может быть вычислена по формуле

$$P(A_0) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P(A_0 | A_i).$$

Действительно,

$$P(A_0) = P\left(\bigcup_{i=1}^n (A_0 \wedge A_i)\right) = \sum_{i=1}^n P(A_0 \wedge A_i),$$

причем

$$P(A_0 \wedge A_i) = P(A_i) P(A_0 | A_i).$$

откуда и следует требуемый результат.

Формула вероятностей гипотез (формула Байеса). Несовместные события $A_1, A_2, \dots, A_n$, при которых только и может наступить событие A_0 , называют гипотезами относительно A_0 . Вероятность $P(A_i)$ осуществления гипотезы A_i , вычисленная безотносительно к событию A_0 , называется *априорной вероятностью*.

Условная вероятность гипотезы A_i , вычисленная в предположении, что событие A_0 имело место, называется *апостериорной вероятностью* и определяется по формуле

$$P(A_i | A_0) = \frac{P(A_i) P(A_0 | A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) P(A_0 | A_i)} = \frac{P(A_i) P(A_0 | A_i)}{P(A_0)}.$$

П1.3. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Случайная величина — величина, значение которой может случайным образом меняться от опыта к опыту.

Детерминированная величина — неслучайная величина.

Дискретная случайная величина — случайная величина, которая может принимать только конечное или счетное множество значений.

Непрерывная случайная величина — случайная величина, которая может принимать любые значения из замкнутого или открытого (возможно, бесконечного) интервала.

Функция (интегральная функция) распределения случайной величины ξ — вероятность события $\xi \leq x$, где x — переменная величина:

$$F(x) = P\{\xi \leq x\}.$$

Следствия. 1. Из определения функции распределения следует:

$$F(-\infty) = 0; F(+\infty) = 1; 0 \leq F(x) \leq 1.$$

2. Из определения функции распределения следует

$$P\{x_1 < \xi \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

Плотность распределения случайной величины (дифференциальная функция распределения, плотность вероятности) — предел отношения вероятности того, что случайная величина ξ при испытании примет значение, лежащее в интервале $[x, x + \Delta x]$, к величине интервала Δx , когда $\Delta x \rightarrow 0$:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} F(x) = F'(x).$$

Плотность распределения имеет следующие очевидные свойства:

$$f(x) \geq 0 \text{ для всех значений } x; \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

3. Из определения плотности распределения следует

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^x dF(x).$$

4. Из предыдущего следствия получаем

$$P(a < x \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b dF(x).$$

Условной плотностью распределения случайной величины в точке x будем называть плотность распределения, вычисленную при условии, что случайная величина больше, чем $x - \Delta x$, при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lambda(x) = f(x) / [1 - F(x)].$$

Заметим, что могут быть определены условные плотности распределения и для других условий, однако в теории надежности наиболее важна именно данная условная плотность.

П1.4. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Математическое ожидание (среднее значение) случайной величины определяется следующим образом:

для дискретных случайных величин ξ

$$M(\xi) = \sum_i x_i P\{x = x_i\};$$

для непрерывных случайных величин ξ

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x),$$

причем для неотрицательных непрерывных случайных величин ξ

$$M(\xi) = \int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx = \int_0^{\infty} P(x) dx.$$

Математическое ожидание является начальным моментом первого порядка для распределения $F(x)$. Начальный момент n -го порядка для случайной величины ξ

$$M_n(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n dF(x).$$

В тексте $M_1(\xi)$ обозначается просто $M(\xi)$.

Из определения математического ожидания следует:

1) если c — некоторая константа, то

$$M(c\xi) = cM(\xi);$$

$$2) M\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n M(\xi_i);$$

$$3) M(c + \xi) = c + M(\xi);$$

4) для произведения независимых случайных величин

$$M\left(\prod_{i=1}^n \xi_i\right) = \prod_{i=1}^n M(\xi_i).$$

Дисперсия случайной величины — характеристика разброса случайной величины ξ , определяемая по формулам

$$D(\xi) = M(\xi - M(\xi))^2 = M(\xi^2) - (M(\xi))^2.$$

Удобно записывать $D(\xi)$ в обобщенной форме:

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(\xi)]^2 dF(x).$$

Дисперсия является центральным моментом второго порядка для распределения $F(x)$.
Центральный момент n -го порядка случайной величины

$$D_n(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(\xi)]^n dF(x).$$

В тексте $D_2(\xi)$ обозначается просто $D(\xi)$.

Из определения дисперсии следует:

$$1) D(c) = 0;$$

$$2) D(cx) = c^2 D(x);$$

$$3) D(c + x) = D(x);$$

4) для суммы независимых случайных величин

$$D\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n D(x_i).$$

Начальные и центральные моменты распределения первых порядков связаны между собой следующими соотношениями:

$$D_2 = M_2 - M_1^2;$$

$$D_3 = M_3 - 3 M_2 M_1 + 2 M_1^3;$$

$$D_4 = M_4 - 4 M_3 M_1 + 6 M_2 M_1^2 - 3 M_1^4.$$

Среднее квадратическое (стандартное) отклонение — величина, определяемая по формуле

$$\sigma = \sqrt{D(\xi)}.$$

Коэффициент вариации случайной величины — величина, определяемая по формуле

$$v = \sigma/M(x).$$

Асимметрия (скошенность) распределения определяется по формуле

$$s = M_3/\sigma^3.$$

Экцесс (крутость) распределения определяется по формуле

$$E_x = M_4/\sigma^4 - 3.$$

Центрированная случайная величина ξ^0 — случайная величина, полученная из исходной ξ как

$$\xi^0 = \xi - M(\xi).$$

Нормированная случайная величина ξ^* — случайная величина, полученная из исходной ξ как

$$\xi^* = \xi/\sigma.$$

Центрирование и нормирование случайных величин обычно используется при табулировании функций распределения.

Медиана (срединное или вероятное значение) — такое значение Me непрерывной случайной величины, при котором

$$P(\xi < Me) = P(\xi > Me) = 0,5,$$

т. е. $F(Me) = 0,5$.

Для дискретных величин медиана может определяться неоднозначно.

Мода — такое значение Mo случайной величины, для которой при непрерывном распределении плотность вероятности принимает максимальные значения, т. е.

$$Mo = \arg \max f(x).$$

Если плотность $f(x)$ имеет один максимум, распределение называется унимодальным. В противном случае распределение называется полимодальным.

Квантиль уровня p — такая величина ξ_p , при которой $P(\xi \leq \xi_p) = F(\xi_p) = p$.

П1.5. СВОДКА ХАРАКТЕРИСТИК ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В табл. П1.1 приведены выражения для плотностей различных непрерывных распределений, а также основные характеристики: математическое ожидание, дисперсия и мода.

В табл. П1.2 содержатся аналогичные сведения для дискретных распределений (приведены распределения, лишь наиболее часто используемые при вероятностных расчетах или статистических оценках в задачах надежности).

П1.6. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Неравенство Чебышева. Для неотрицательной функции $w(\xi)$ случайной величины ξ и любого $k > 0$ выполняется неравенство

$$P(w(\xi) \geq k) \leq M\{w(\xi)\}/k.$$

В частности,

$$P(|\xi - M(\xi)| \geq k\sigma) \leq 1/k^2,$$

где σ — среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ ; $M(\xi)$ — ее математическое ожидание.

Теорема Бернулли. Если проводится n независимых опытов, в каждом из которых некоторое событие осуществляется с вероятностью p , то частость (относительная частота) проявления события $\bar{p}$ при $n \rightarrow \infty$ сходится по вероятности к p , т. е. при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\bar{p} - p| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Теорема Пуассона. Если проводится n независимых опытов и вероятность осуществления события в i -м опыте равна p_i , то частость появления события $\bar{p}$ при $n \rightarrow \infty$ сходится по вероятности к среднему из вероятностей p_i , т. е. при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\bar{p} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i\right| \geq \varepsilon\right\} = 0.$$

Основные непрерывные распределения

Распределение	Область значений	Плотность распределения	Математическое ожидание	Дисперсия	Мода
Равномерное	(a, b)	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	—
Нормальное (Гаусса)	$(-\infty, \infty)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	a	σ^2	a
Логарифмически-нормальное	$(0, \infty)$	$\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}}$	$a + \frac{\sigma^2}{2}$	$e^{2a+\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$	$e^a - \sigma^2$
Вейбулла—Гнеденко	$(0, \infty)$	$acx^{a-1} e^{-cx^a}$	$\frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)}{c^{1/a}}$	$\frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{a}\right)}{c^{2/a}}$	$\sqrt[a]{\frac{a-1}{ca}}$ (при $a > 1$)
Гамма-распределение	$(0, \infty)$	$\frac{\beta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\beta x}$	$\frac{a}{\beta}$	$\frac{a}{\beta^2}$	$\frac{a-1}{\beta}$ (при $a > 1$)
Экспоненциальное	$(0, \infty)$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	—
χ^2 -распределение	$(0, \infty)$	$\frac{\frac{k}{2} - 1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{\frac{k}{2}}} e^{-\frac{r}{2}}$	k	$2k$	$k-2$

Распределение	Область значений	Плотность распределения	Математическое ожидание	Дисперсия	Мода
Бета-распределение	$(0, 1)$	$x^{a-1} (1-x)^{b-1}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2 (a+b+1)}$	$\frac{a-1}{a+b-2}$
Стюдента	$(-\infty, \infty)$	$\left[2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{\pi n} \right]^{-1} \times$ $\times \left(1 + \frac{x^2}{2} \right)^{-\frac{n+1}{2}}$	0	$\frac{1}{\frac{n}{2} - 2}$	0

Таблица III.2

Основные дискретные распределения

Распределение	Возможное значение	Вероятность	Математическое ожидание	Дисперсия
Биномиальное	$0, 1, 2, \dots, n$	$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$	np	npq
Гипергеометрическое	$0, 1, \dots, \min(M, n)$	$P_m = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$	$n \frac{M}{N}$	$\frac{M(N-M) n (N-n)}{N^2 (N-1)}$
Пуассона	$0, 1, 2, \dots$	$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$	λ	λ
Геометрическое	$0, 1, 2, \dots$	$P_m = pq^{m-1}$	$1/p$	q/p^2
Отрицательное биномиальное	$r, r+1, \dots$	$P_m = C_{m-1}^{r-1} p^r q^{m-r}$	r/p	qr/p^2

Теорема Чебышева. Если в n независимых опытах получены реализации $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ случайной величины ξ , то при $n \rightarrow \infty$ среднее арифметическое сходится по вероятности к математическому ожиданию этой случайной величины, т. е. при любом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - M(\xi) \right| \geq \varepsilon \right\} = 0.$$

Обобщенная теорема Чебышева. Если $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(m)}$ — независимые случайные величины с математическими ожиданиями соответственно $M^{(1)}, M^{(2)}, \dots, M^{(m)}$ и ограниченными дисперсиями $D^{(1)}, D^{(2)}, \dots, D^{(m)}$, то при $n \rightarrow \infty$ среднее арифметическое наблюдаемых значений случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий, т. е. при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi^{(i)} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M^{(i)} \right| \geq \varepsilon \right\} = 0.$$

Теорема Маркова. Результат обобщенной теоремы Чебышева справедлив и для зависимых случайных величин, если выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} D \left(\sum_{i=1}^n \xi^{(i)} \right) = 0.$$

Центральная предельная теорема. Если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие математическое ожидание M и дисперсию σ^2 , то при $n \rightarrow \infty$ распределение нормированной случайной величины $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i$ сходится к нормальному

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ a < \frac{\xi - nM}{\sigma \sqrt{n}} < b \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-t^2/2} dt = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Теорема Лапласа. Если проводится n независимых опытов, в каждом из которых некоторое событие осуществляется с вероятностью p , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ a < \frac{v_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b \right\} = \Phi(b) - \Phi(a),$$

где v_n — число появлений интересующего события в n опытах.

П1.7. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О СЛУЧАЙНЫХ ПОТОКАХ

П1.7.1. Определения. *Потоком однородных событий* называется случайный процесс, образованный совокупностью случайных моментов $t_1, t_2, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots$ появления этих событий, где $t_{k+1} \geq t_k, k \geq 1$.

В теории надежности обычно исследуются потоки двух видов: поток моментов отказов (устройства) и моментов окончания ремонтов (отказавшего устройства).

В общем случае для задания потока необходимо задать для каждого $n \geq 1$ распределение случайного вектора $(z_1, z_2, \dots, z_n)$, где

$$z_k = t_k - t_{k-1}, \quad k \geq 1, \quad t_0 = 0.$$

Если случайные величины $z_1, z_2, \dots, z_n$ независимы в совокупности, то соответствующий поток называется *поток с ограниченным последствием*. Для задания такого потока, очевидно, достаточно задать набор функций распределения

$$F_k(t) = P\{z_k \leq t\}, \quad k \geq 1.$$

Поток с ограниченным последствием, для которого

$$F_2(t) = F_3(t) = \dots = F(t),$$

называется *рекуррентным потоком с запаздыванием*, определяемым функциями распределения $F_1(t)$ и $F(t)$.

Рекуррентный поток с запаздыванием, для которого $F_1(t)$ также равно $F(t)$, называется просто *рекуррентным потоком*. В этом случае $F(t)$ — функция распределения длины промежутка между любыми двумя последовательными моментами наступления событий.

Рекуррентный поток, для которого

$$F(t) = 1 - e^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0,$$

называется *пуассоновским потоком*, при этом α (среднее число событий, наступающих в единицу времени) есть *интенсивность* пуассоновского потока. Для пуассоновского потока вероятность $p_k(t_0, t)$, $k \geq 0$, наступления ровно k событий в промежутке $(t_0, t_0 + 1)$

$$p_k(t_0, t) = p_k(t) = \frac{(\alpha t)^k}{k!} e^{-\alpha t}$$

и не зависит от t_0 , т. е. в пуассоновском потоке время ожидания наступления нового события не зависит от того, сколько прошло времени после последнего наступления события; это свойство называется *отсутствием последействия*.

Для пуассоновского потока математическое ожидание случайного числа $\eta(t)$ событий, наступивших за время t ,

$$M\eta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k(t) = \alpha t.$$

Пуассоновский поток можно также определить тремя характеристическими свойствами, которые, являясь в известном смысле качественными, приводят к строгому определению, данному выше. Эти характеристические свойства следующие:

свойство *стационарности*, которое означает, что вероятностные характеристики потока для любого интервала времени зависят только от протяженности этого интервала, но не зависят от момента, когда он начинается;

свойство *ординарности*, которое означает, что в бесконечно малом интервале времени вероятность появления более чем одного события есть величина большего порядка малости, чем вероятность появления ровно одного события;

свойство *отсутствия последействия*, которое означает, что вероятность появления события в потоке, начиная с некоторого произвольного момента времени, не зависит от всей предшествующей реализации этого потока.

Для того чтобы поток событий был стационарным ординарным потоком с отсутствием последействия, необходимо и достаточно, чтобы он был пуассоновским.

Стационарный ординарный поток с ограниченным последствием называется *потоком Пальма*. Поток однородных событий является потоком Пальма, если это есть рекуррентный поток с запаздыванием, определяемый функциями

$$F_1(t) = \alpha \int_0^t [1 - F(u)] du \quad \text{и} \quad F(t),$$

где $\alpha^{-1} = \int_0^{\infty} [1 - F(u)] du$.

Альтернирующий процесс восстановления. Процесс функционирования любого устройства с точки зрения надежности может быть представлен в виде чередующейся последовательности интервалов нормального функционирования и интервалов простоя (ремонта) устройства $\theta_1, \xi_1, \dots, \theta_k, \xi_k, \dots$, где θ_k — случайное время работы устройства с момента окончания предыдущего ремонта до момента наступления следующего k -го отказа; ξ_k — случайное время простоя (ремонта) из-за k -го отказа.

Если все величины θ_k имеют одно и то же распределение $F(t)$, а случайные величины ξ_k имеют одно и то же распределение $G(t)$, причем все рассматриваемые случайные величины взаимно независимые, то говорят, что имеет место *альтернирующий процесс восстановления*.

П1.7.2. Просеивание (разрежение) потока. Рассмотрим рекуррентный поток событий $\{t_k\}_0^{\infty}$. Поставим в соответствие каждому моменту наступления события t_k , $k \geq 1$, случайную величину $\delta_k = \delta(t_k)$, принимающую значение 0 с вероятностью q_k и значение 1 с вероятностью p_k . Величину δ_k назовем *индикатором события* и будем считать, что реализация $\delta_k = 1$ сохраняет событие в момент t_k , а реализация $\delta_k = 0$ приводит к исключению события. Применение оператора $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots)$ к рекуррентному потоку формирует новый *просеянный*, или *разреженный*, поток событий $\{t'_k\}_0^{\infty}$, у которого события остались лишь в те моменты t'_k , которым соответствует реализация случайной величины $\delta_k = 1$.

В частности, если положить $p_k = p$ для всех $k \geq 1$ и применить последовательно процедуру разрежения к произвольному рекуррентному потоку, то результирующий поток после соответствующего нормирования, а именно после сжатия в p^{-1} раз масштаба времени, будет *асимптотически пуассоновским* (теорема Реньи).

Применение однократной процедуры разрежения к пуассоновскому потоку с параметром λ при $p_k = p$ приводит вновь к пуассоновскому же потоку с параметром $\lambda' = p\lambda$.

Если же $p_k = 1$ для всех $k = i, 2i, \dots, mi, i \geq 2$, при фиксированном i и $p_k = 0$ для остальных k , то при применении процедуры разрежения к пуассоновскому потоку получим в качестве просеянного поток Эрланга i -го порядка.

Случайный интервал между соседними событиями в разреженном потоке характеризуется математическим ожиданием

$$T'_k = T_k/p,$$

где T_k — математическое ожидание величины случайного интервала между событиями в исходном рекуррентном потоке.

П1.7.3. Суперпозиция (наложение) потоков. Рассмотрим n «источников», порождающих события. Поток, событиями которого являются события, поступившие от всех «источников», называется *суммарным потоком*, т. е. суммарный поток получается *суперпозицией (наложением)* исходных потоков событий.

Если слагаемые потоки независимы между собой и каждый представляет собой пуассоновский поток, то суммарный поток будет также пуассоновским с интенсивностью α_Σ , равной сумме интенсивностей слагаемых потоков, т. е.

$$\alpha_\Sigma = \sum_{i=1}^n \alpha_i,$$

где α_i — интенсивность i -го суммируемого пуассоновского потока; n — число суммируемых потоков.

В теории восстановления доказывалось, что суперпозиция произвольных потоков асимптотически сходится к пуассоновскому потоку при сравнительно слабых ограничениях на составляющие потоки (теорема Григелионнса). Интенсивность суммарного потока при этом

$$\alpha_\Sigma = \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i},$$

где T_i — среднее расстояние между двумя соседними событиями в i -м потоке; n — число потоков.

П1.8. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Испытание (или опыт) — осуществление на практике какого-нибудь комплекса условий.

Реализация случайного события — событие, которое осуществилось в результате проведения опыта.

Реализация случайной величины — величина, которая получена в результате проведения опыта.

Генеральная совокупность — множество, включающее все однородные объекты с исследуемыми качествами.

Случайная выборка — часть генеральной совокупности, отобранная наугад.

Репрезентативная (представительная) выборка — выборка, в которой пропорции объектов различных типов в среднем соответствуют пропорциям в генеральной совокупности.

Статистические оценки — числовые характеристики $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ эмпирического распределения, полученные в результате обработки случайной выборки объема n .

Частота (относительная частота) случайного события. Если N раз проведен опыт, в котором возможно появление некоторого события A , и при этом n_N раз это событие фактически имело место, то частота появления указанного события

$$W_N(A) = n_N/N.$$

Вероятность случайного события (статистическое определение). Можно заметить, что при увеличении числа опытов N значение $W_N(A)$ начинает все более и более устойчиво приближаться к некоторому числу $p(A)$. Вероятность случайного события может быть определена как предел $W_N(A)$ при безграничном увеличении числа опытов N :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} W_N(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} n_N/N = p(A).$$

Величина W_N сходится по вероятности к величине p , если для любого сколь угодно малого ε может быть выбрано такое N , что вероятность выполнения неравенства $|W_N - p| < \varepsilon$ будет сколь угодно близка к единице, т. е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\{|W_N - p| < \varepsilon\} = 1.$$

Вариационный ряд n реализаций случайных величин — совокупность рассматриваемых величин, расположенных в порядке возрастания (неубывания):

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n.$$

Размах эмпирического распределения (вариационного ряда) — величина

$$X = x_n - x_1.$$

Эмпирическая функция распределения для n реализаций случайных величин — функция $F_n(x)$, определяемая равенствами

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x < x_1, \\ i/n & \text{для } x_i \leq x < x_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ 1 & \text{для } x \geq x_n. \end{cases}$$

При безграничном увеличении числа опытов максимальное отклонение эмпирической функции распределения от теоретической с вероятностью единицы сходится к нулю:

$$P \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \max_x |F(x) - F_n(x)| = 0 \right\} = 1.$$

Гистограмма (для n реализаций случайных величин) — функция $f_n(x)$, определяемая равенством

$$f_n(x) = a_j / n \Delta x_j.$$

Здесь a_j — число наблюдений, удовлетворяющих неравенству

$$x^{(j)} - \Delta x_j / 2 < x \leq x^{(j)} + \Delta x_j / 2;$$

$\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ — длины интервалов группировки; $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}$ — середины интервалов группировки.

Группировка — некоторое разбиение интервала, содержащего все n наблюдаемых результатов $x_1, x_2, \dots, x_n$, на m интервалов, называемых интервалами группировки.

Точечная оценка параметра φ — оценка $\hat{\varphi}$, зависящая только от результатов испытаний ($x_1, x_2, \dots, x_n$) и известных величин, но не от неизвестного параметра.

Несмещенная оценка $\hat{\varphi}$ параметра φ — такая оценка, математическое ожидание которой совпадает с оцениваемым параметром независимо от числа наблюдений, т. е. при любом n

$$M \{ \hat{\varphi}(x_1, x_2, \dots, x_n) \} = \varphi.$$

Асимптотически несмещенная оценка — такая оценка, математическое ожидание которой совпадает с оцениваемым параметром при $n \rightarrow \infty$.

Состоятельная оценка $\hat{\varphi}$ — такая оценка, которая при неограниченном увеличении числа опытов сходится к оцениваемому параметру φ по вероятности, т. е. при любом $\varepsilon > 0$ имеет место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{ |\varphi - \hat{\varphi}_n| > \varepsilon \} = 0.$$

Эффективная оценка $\hat{\varphi}$ — такая оценка, которая характеризуется минимальным из всех возможных значений дисперсии оценки $\hat{\varphi}$ относительно параметра φ .

Достаточная оценка (статистика) — такая оценка $\hat{\varphi}$ параметра φ , которая обеспечивает независимость условного распределения вектора результатов испытаний ($x_1, x_2, \dots, x_n$) при известном значении $\hat{\varphi}$ от параметра φ . Каждая эффективная оценка является одновременно и достаточной.

Метод максимального правдоподобия. Пусть случайная величина ξ имеет плотность распределения $f(x, a)$. Функция

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; a) = \prod_{k=1}^n f(x_k, a)$$

называется *функцией правдоподобия*. Если случайная величина дискретна и принимает значения $z_1, z_2, \dots, z_n$ соответственно с вероятностями $p_1(a), p_2(a), \dots, p_n(a)$, где

$$\sum_{k=1}^n p_k(a) = 1,$$

то функции правдоподобия беретса в виде.

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; a) = \prod_{i=1}^n p_{k_i}(\alpha),$$

где индексы у вероятностей показывают, что наблюдались значения $z_{k_1}, z_{k_2}, \dots, z_{k_n}$. Метод максимума правдоподобия состоит в том, что в качестве оценок параметра α принимается то значение α , при котором функция L достигает максимума. Поскольку L и $\ln L$ достигают экстремума при одном и том же значении α , то эти критические значения α определяются из уравнения правдоподобия

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = 0.$$

Если для параметра α существует оценка $\hat{\alpha}$, то уравнение правдоподобия имеет единственное решение α .

Метод моментов — метод точечной оценки неизвестных параметров, состоящий в том, что моменты распределения, зависящие от неизвестных нам параметров, приравняются эмпирическим моментам (если оценке подлежат несколько параметров, то соответствующие уравнения записываются для нескольких моментов).

Метод квантилей — метод точечной оценки неизвестных параметров, состоящий в том, что квантиль теоретического распределения приравнивается к эмпирической квантили (если оценке подлежат несколько параметров, то соответствующие уравнения записываются для нескольких квантилей).

Доверительный интервал — интервал, накрывающий неизвестное значение оцениваемого параметра φ с вероятностью не менее заданной.

Доверительные границы (верхняя и нижняя) — крайние точки доверительного интервала.

Двусторонний доверительный интервал для параметра φ с коэффициентом доверия, не меньшим α , — случайный интервал $[\underline{\varphi}(x), \bar{\varphi}(x)]$, концы которого

$$\underline{\varphi}(x) \leq \varphi \leq \bar{\varphi}(x)$$

зависят только от исходов испытаний x и для любого $\varphi > 0$

$$P\{\underline{\varphi}(x) \leq \varphi \leq \bar{\varphi}(x)\} \geq \alpha.$$

Верхний $[-\infty, \bar{\varphi}(x)]$ и **нижний** $[\underline{\varphi}(x), +\infty]$ **односторонние интервалы** — случайные интервалы, для которых при любом $\varphi > 0$ соответственно:

$$P\{\varphi < \bar{\varphi}(x)\} \geq \alpha; \quad P\{\underline{\varphi}(x) < \varphi\} \geq \alpha.$$

Доверительный уровень (доверительная вероятность) — вероятность β выхода параметра φ за доверительные границы:

$$\beta = 1 - \alpha,$$

где α — коэффициент доверия.

Среднее арифметическое реализаций случайной величины — величина, определяемая как

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Несмещенная оценка дисперсии реализаций случайной величины — величина, которая находится по следующей формуле:

$$\hat{D} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2.$$

Вероятность ошибки первого рода — вероятность отклонить некоторое предположение, когда оно верно.

Вероятность ошибки второго рода — вероятность принять некоторое предположение, когда оно ложно.

Уровень значимости критерия ε — вероятность непринятия проверяемой гипотезы, когда она верна.

ФОРМУЛЫ. ЧИСЛОВЫЕ ТАБЛИЦЫ

П2.1. КОНСТАНТЫ

- 1) $e = 2,718$, $1/e = 0,368$;
- 2) $\pi = 3,142$, $1/\pi = 0,318$;
- 3) постоянная Эйлера

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0,577.$$

П2.2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ

- 1) формула Стирлинга

$$n! \approx (n/e)^n \sqrt{2\pi n} (1 + 1/12n);$$

$$\ln(n!) \approx (n + 1/2) \ln n - n + 0,92;$$

- 2) $C_n^m = n! / m! (n-m)!;$

- 3) $\sum_{k=0}^s C_n^k C_m^{s-k} = C_{n+m}^s;$

- 4) $\sum_{k=0}^m C_{n+k}^n = C_{n+m+1}^{n+1};$

- 5) значения $n!$ и $1/n!$.

n	$n!$	$1/n!$	n	$n!$	$1/n!$
1	1	1	7	5040	0,0 ³ 2
2	2	0,5	8	40320	0,0 ⁴ 2
3	6	0,167	9	362880	0,0 ⁵ 3
4	24	0,042	10	3628800	0,0 ⁶ 3
5	120	0,0 ² 8	11	39916800	0,0 ⁷ 3
6	720	0,0 ² 1	12	479001600	0,0 ⁸ 2

П2.3. КОНЕЧНЫЕ СУММЫ

- 1) арифметическая прогрессия

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a + kr) = \frac{n}{2} [2a + (n-1)r] = \frac{n}{2} (a + l),$$

где l — последний член;

- 2) геометрическая прогрессия

$$\sum_{k=1}^n aq^{k-1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1};$$

- 3) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2};$

- 4) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \approx 0,577 + \ln n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n(n+1)}.$

П2.4. РЯДЫ

1) ряд Тейлора (для функции одной переменной)

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots$$

или

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots;$$

$$2) (1 \pm x)^q = 1 \pm qx + \frac{q(q-1)}{2!} x^2 \pm \dots + \\ + (\pm 1)^k \frac{q(q-1)\dots(q-k+1)}{k!} x^k + \dots, \text{ где } |x| \leq 1;$$

$$3) e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!};$$

$$4) a^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^k}{k!}.$$

П2.5. ИНТЕГРАЛЫ

$$1) \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax};$$

$$2) \int x e^{ax} dx = e^{ax} \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right);$$

$$3) \int x^n e^{ax} dx = e^{ax} \left[\frac{x^n}{a} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{a^{k+1}} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \right];$$

$$4) \int_{t_1}^{t_2} e^{-ax} dx = \frac{1}{a} e^{-at_1} (1 - e^{-a(t_2-t_1)});$$

$$5) \int_{t_1}^{t_2} x e^{-ax} dx = \frac{e^{-at_1}}{a^2} [1 + at_1 - e^{-a(t_2-t_1)} (1 + at_2)];$$

$$6) \int_0^t x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} - e^{-at} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \frac{t^k}{a^{n-k+1}};$$

$$7) \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = n! a^{-(n+1)}.$$

П2.6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Преобразование Лапласа ставит в соответствие каждой функции (оригиналу) $p(t)$ действительной переменной t функцию (изображение) $a(x)$ комплексной переменной по формуле

$$a(x) = \int_0^{\infty} p(t) e^{-xt} dt, \quad t \geq 0.$$

Для изображений и их оригиналов справедливы следующие два утверждения:

$$\lim_{x \rightarrow 0} xa(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} xa(x) = p(0).$$

Приведем таблицу преобразований Лапласа основных функций, используемых при расчетах надежности (табл. П2.1).

Формулы преобразований Лапласа

Изображение	Оригинал	Изображение	Оригинал
$\alpha a_1(x) + \beta a_2(x)$	$\alpha p_1(t) + \beta p_2(t)$	$a(x-a)$	$e^{at} p(t)$
$-p(0) + \kappa a(x)$	$p'(t)$	$\frac{1}{\kappa^n}, n=1, 2, \dots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{a(x)}{\kappa} + \frac{C}{\kappa}$	$\int_0^t p(x) dx + C$	$\frac{1}{(\kappa-b)^n}, n=1, 2, \dots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{bt}$
$\frac{1}{b} a\left(\frac{x}{b}\right), b>0$	$p(bt)$	$\frac{1}{\kappa^2 + b^2}$	$\frac{1}{b} \sin bt$
$e^{-bx} a(x), b \geq 0$	$p(t-b)$	$\frac{\kappa}{\kappa^2 + b^2}$	$\cos bt$
$a_1(x) a_2(x)$	$\int_0^t p_1(x) p_2(t-x) dx$	$\frac{1}{\kappa^2 - b^2}$	$\frac{1}{b} \operatorname{sh} bt$
$a^{(k)}(x)$	$(-1)^k t^k p(t)$	$\frac{\kappa}{\kappa^2 - b^2}$	$\operatorname{ch} bt$

П2.7. СТАНДАРТНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ТАБЛИЦЫ

Т а б л и ц а П2.2

Функция e^{-x}

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1,000	0,999	0,998	0,997	0,996	0,995	0,994	0,993	0,992	0,991
0,0	1,000	0,990	0,980	0,970	0,951	0,951	0,942	0,932	0,923	0,914
0,1	0,905	0,896	0,887	0,878	0,859	0,851	0,852	0,844	0,835	0,827
0,2	0,819	0,811	0,802	0,795	0,787	0,779	0,771	0,763	0,756	0,748
0,3	0,741	0,733	0,726	0,719	0,712	0,705	0,698	0,691	0,684	0,677
0,4	0,670	0,664	0,657	0,651	0,644	0,633	0,631	0,625	0,619	0,613
0,5	0,606	0,600	0,594	0,589	0,583	0,577	0,571	0,566	0,560	0,554
0,6	0,540	0,543	0,533	0,533	0,527	0,522	0,517	0,512	0,507	0,502
0,7	0,497	0,492	0,487	0,482	0,477	0,472	0,468	0,463	0,458	0,454
0,8	0,449	0,445	0,440	0,433	0,432	0,427	0,423	0,419	0,415	0,411
0,9	0,407	0,403	0,398	0,395	0,391	0,337	0,333	0,379	0,375	0,372
1,	0,368	0,333	0,301	0,273	0,247	0,223	0,232	0,183	0,165	0,150
2,	0,135	0,122	0,111	0,100	0,091	0,032	0,074	0,067	0,061	0,055
3,	0,050	0,045	0,041	0,037	0,033	0,030	0,027	0,025	0,022	0,020
4,	0,018	0,017	0,015	0,014	0,012	0,011	0,010	0,009	0,008	0,007
5,	0,0037	0,0031	0,00355	0,00353	0,0045	0,0041	0,0037	0,0033	0,0030	0,0027
6,	0,0025	0,0022	0,0020	0,0018	0,0017	0,0015	0,0014	0,0012	0,0011	0,0010

Функция нормального распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$$

x	0,	1,	2,	3,	x	0,	1,	2,	3,
,00	0,500	0,841	0,9773	0,92865	,50	0,692	0,332	0,379	0,767
,05	520	853	798	886	,55	709	394	461	807
,10	540	864	821	0,92032	,60	726	452	534	841
,15	560	975	842	184	,65	742	505	598	860
,20	573	885	861	313	,70	758	554	653	802
,25	599	894	878	423	,75	773	599	702	912
,30	618	0,9032	893	517	,80	788	641	745	0,9277
,35	637	115	906	596	,85	802	678	781	409
,40	655	192	0,92180	663	,90	816	713	813	519
,45	674	265	286	720	,95	829	744	841	609

Примечание. 0,0^k a; 0,9^k a означают цифры 0,00 . . . 0a; 0,99 . . . 9a соответственно, например 0,9²77 = 0,9999277.

Таблица П2.4

Плотность нормального распределения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

x	0,	1,	2,	x	0,	1,	2,
,00	0,399	0,242	0,0540	,50	352	130	175
,05	398	230	488	,55	343	120	155
,10	397	218	440	,60	333	111	136
,15	395	206	396	,65	323	102	119
,20	391	194	355	,70	312	0,0941	104
,25	387	183	317	,75	301	863	0,02910
,30	381	171	283	,75	301	863	792
,35	375	160	252	,80	290	790	687
,40	368	150	224	,90	266	656	595
,45	361	140	198	,95	254	596	514

Таблица П2.5

Распределение Пуассона $p_k = \frac{a^k}{k!} e^{-a} = 0, \dots$

k	a						
	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007
0	9990	9980	9970	9960	9950	9940	9930
1	0 ³ 999	0 ² 200	0 ² 299	0 ² 398	0 ² 498	0 ² 596	0 ² 695
2	0 ⁵ 1	0 ² 200	0 ⁵ 449	0 ⁵ 797	0 ⁴ 124	0 ⁴ 179	0 ⁴ 243

k	α						
	0,008	0,009	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050
0	9920	9910	9900	9802	9704	9608	9512
1	0 ² 794	0 ² 892	0 ² 990	0196	0291	0384	0476
2	0 ⁴ 317	0 ⁴ 401	0 ⁴ 495	0 ³ 196	0 ³ 437	0 ² 769	0 ² 119
3	—	—	—	0 ⁵ 131	0 ⁵ 437	0 ⁴ 102	0 ⁴ 198

k	α						
	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,20	0,30
0	0418	9324	9231	9139	9048	8187	7408
1	0565	0653	0738	0823	0905	1637	2222
2	0 ² 170	0 ² 228	0 ² 295	0 ² 370	0 ² 452	0164	0333
4	0 ⁵ 1	0 ⁶ 93	0 ⁵ 158	0 ⁵ 250	0 ⁵ 377	0 ⁴ 546	0 ² 250
5	—	—	—	—	—	0 ⁵ 218	0 ⁴ 150

k	α						
	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	6703	6065	5488	4966	4493	4066	3679
1	2681	3033	3293	3476	3595	3659	3679
2	0536	0758	0988	1217	1438	1647	1839
3	0 ² 715	0126	0198	0284	0383	0494	0613
4	0 ³ 715	0 ² 158	0 ² 296	0 ² 497	0 ² 767	0111	0153
5	0 ⁴ 572	0 ³ 158	0 ³ 356	0 ³ 696	0 ² 123	0 ² 200	0 ³ 307
6	0 ⁵ 381	0 ⁴ 132	0 ⁴ 356	0 ⁴ 811	0 ³ 164	0 ³ 300	0 ³ 511
7	—	0 ⁵ 1	0 ⁵ 305	0 ⁵ 811	0 ⁴ 187	0 ⁴ 386	0 ⁴ 730
8	—	—	—	0 ⁵ 1	0 ⁵ 187	0 ⁵ 434	0 ⁵ 912
9	—	—	—	—	—	—	0 ⁵ 101

k	α								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1353	0498	0183	0 ² 674	0 ² 248	0 ³ 912	0 ³ 335	0 ³ 123	0 ⁴ 454
1	2707	1494	0733	0337	0149	0 ² 638	0 ² 268	0 ² 111	0 ³ 454
2	2707	2240	1465	0842	0446	0223	0107	0 ² 500	0 ² 227
3	1804	2240	1954	1404	0892	0521	0286	0150	0 ² 757
4	0902	1680	1954	1755	1339	0912	0573	0337	0189
5	0361	1008	1563	1755	1606	1277	0916	0607	0378
6	0120	0504	1042	1462	1606	1490	1221	0911	0631
7	0 ² 344	0216	0595	1044	1377	1490	1396	1171	0901
8	0 ³ 859	0 ² 810	0298	0653	1033	1304	1396	1318	1126
9	0 ³ 191	0 ² 270	0132	0363	0688	1014	1241	1318	1251

k	a								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	0 ⁴ 382	0 ³ 810	0 ² 529	0181	0413	0710	0993	1186	1251
11	0 ⁵ 694	0 ³ 221	0 ² 192	0 ² 824	0225	0452	0722	0970	1137
12	0 ⁵ 116	0 ⁴ 524	0 ³ 642	0 ² 343	0113	0263	0481	0728	0948
13	—	0 ⁴ 127	0 ³ 197	0 ² 132	0 ² 520	0142	0296	0504	0729
14	—	0 ⁵ 273	0 ⁴ 564	0 ³ 472	0 ² 223	0 ² 709	0169	0324	0521
15	—	0 ⁵ 1	0 ⁴ 150	0 ³ 157	0 ³ 891	0 ² 331	0 ² 903	0194	0347
16	—	—	0 ⁵ 376	0 ⁴ 491	0 ³ 334	0 ² 145	0 ² 451	0109	0217
17	—	—	0 ⁵ 1	0 ⁴ 144	0 ³ 118	0 ³ 596	0 ² 212	0 ² 579	0128
18	—	—	—	0 ⁵ 401	0 ⁴ 393	0 ³ 232	0 ³ 944	0 ² 289	0 ² 709
19	—	—	—	0 ⁵ 106	0 ⁴ 124	0 ⁴ 854	0 ³ 397	0 ² 137	0 ² 373
20	—	—	—	—	0 ⁵ 373	0 ⁴ 299	0 ³ 159	0 ³ 617	0 ² 187
21	—	—	—	—	0 ⁵ 106	0 ⁵ 997	0 ⁴ 606	0 ³ 264	0 ³ 889
22	—	—	—	—	—	0 ⁵ 317	0 ⁴ 220	0 ³ 108	0 ³ 404
23	—	—	—	—	—	0 ⁵ 1	0 ⁵ 766	0 ⁴ 423	0 ³ 176
24	—	—	—	—	—	—	0 ⁵ 255	0 ⁴ 159	0 ⁴ 732
25	—	—	—	—	—	—	0 ⁵ 1	0 ⁵ 571	0 ⁴ 293
26	—	—	—	—	—	—	—	0 ⁵ 198	0 ⁴ 113
27	—	—	—	—	—	—	—	0 ⁵ 1	0 ⁵ 417
28	—	—	—	—	—	—	—	—	0 ⁵ 149
29	—	—	—	—	—	—	—	—	0 ⁵ 1

Таблица П2.6

Суммарные значения распределения Пуассона $Q_s = \sum_{k=s}^{\infty} \frac{a^k}{k!} e^{-a} = 0, \dots$

d	a						
	0,001	0,001	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007
1	0 ³ 999	0 ² 200	0 ² 300	0 ² 399	0 ² 499	0 ² 598	0 ² 698
2	0 ⁵ 10	0 ⁵ 200	0 ⁵ 449	0 ⁵ 798	0 ⁴ 125	0 ⁴ 179	0 ⁴ 244

d	a						
	0,008	0,009	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050
1	0 ² 797	0 ² 896	0 ² 995	0198	0296	0392	0488
2	0 ⁴ 318	0 ⁴ 403	0 ⁴ 497	0 ³ 197	0 ³ 441	0 ³ 779	0 ² 121
3	—	—	—	0 ⁵ 131	0 ⁵ 440	0 ⁴ 104	0 ⁴ 201

d	a						
	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,20	0,30
1	0582	0676	0769	0861	0952	1813	2592
2	0 ² 173	0 ² 234	0 ² 303	0 ² 382	0 ² 468	0175	0369
3	0 ⁴ 344	0 ⁴ 542	0 ⁴ 804	0 ³ 114	0 ³ 155	0 ² 115	0 ² 360
4	0 ⁵ 1	0 ⁵ 1	0 ⁵ 160	0 ⁵ 254	0 ⁵ 385	0 ⁴ 568	0 ³ 266
5	—	—	—	—	—	0 ⁵ 226	0 ⁴ 158
6	—	—	—	—	—	—	0 ⁵ 1

[illegible]

d	u								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8647	9502	9817	9933	9975	9991	9997	9999	—
2	5940	8009	9084	9596	9826	9927	9970	9988	9995
3	3233	5768	7619	8753	9380	9704	9862	9938	9972
4	1429	3528	5665	7350	8488	9182	9576	9788	9897
5	0527	1847	3712	5595	7149	8270	9004	9450	9707
6	0166	0839	2149	3840	5543	6993	8088	8843	9329
7	0 ² 453	0335	1107	2378	3937	5503	6866	7932	8699
8	0 ² 110	0119	0511	1334	2560	4013	5470	6761	7798
9	0 ² 237	0 ² 380	0214	0681	1528	2709	4075	5443	6672
10	0 ⁴ 465	0 ² 110	0 ² 813	0318	0839	1695	2834	4126	5421

[illegible]

- Барзилович Е. Ю., Каштанов В. А. Некоторые математические вопросы теории обслуживания сложных систем. — М.: Сов. радио, 1971.
- Барзилович Е. Ю., Каштанов В. А. Организация обслуживания при ограниченной информации о надежности системы. — М.: Сов. радио, 1975.
- Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности: Пер. с англ./Под ред. Б. В. Гнеденко. — М.: Сов. радио, 1969.
- Барлоу Р., Прошан Ф. Статистическая теория надежности и испытания на безотказность: Пер. с англ. И. А. Ушакова. — М.: Наука, 1985.
- Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. — М.: Наука, 1965.
- Беляев Ю. К. Вероятностные методы выборочного контроля. — М.: Наука, 1975.
- Беляев Ю. К. Статистические методы в теории надежности. — М.: Знание, 1978.
- Беляев Ю. К. Статистические методы обработки результатов испытаний на надежность. — М.: Знание, 1982.
- Беляев Ю. К., Чепурин Е. В. Основы математической статистики/МГУ, М., 1982.
- Болотин В. В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. — М.: Стройиздат, 1971.
- Болотин В. В. Случайные колебания упругих систем. — М.: Наука, 1979.
- Болотин В. В. Статистические методы в строительной механике. — М.: Стройиздат, 1965.
- Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1965.
- Броди С. Н., Власенко О. Н., Марченко Б. Г. Расчет и планирование испытаний систем на надежность. — Киев: Наукова думка, 1970.
- Бусленко В. Н. Автоматизация имитационного моделирования сложных систем. — М.: Наука, 1977.
- Бусленко Н. П. Математическое моделирование производственных процессов на ЦВМ. — М.: Наука, 1964.
- Бусленко Н. П. Моделирование сложных систем. — М.: Наука, 1978.
- Бусленко Н. П., Калашников В. В., Коваленко И. Н. Лекции по теории сложных систем. — М.: Сов. радио, 1973.
- Вальд А. Последовательный анализ: Пер. с англ. — М.: Физматгиз, 1960.
- Вентцель Е. С. Исследование операций. — М.: Сов. радио, 1972.
- Вопросы математической теории надежности/Е. Ю. Барзилович, Ю. К. Беляев, В. А. Каштанов и др.; Под ред. Б. В. Гнеденко. — М.: Радио и связь, 1983.
- Гадасин В. А., Ушаков И. А. Надежность сложных информационно-управляющих систем. — М.: Сов. радио, 1975.
- Газиев Э. Г. Устойчивость скальных массивов и методы их закрепления. — М.: Стройиздат, 1977.
- Газиев Э. Г. Механика скальных пород в строительстве. — М.: Стройиздат, 1973.
- Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1965.
- Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. — М.: Наука, 1965.
- Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. — М.: Наука, 1966.
- Головин И. Н., Чуварыгин Б. В., Шура-Бура А. Э. Расчет и оптимизация комплектов запасных элементов радиоэлектронных систем. — М.: Радио и связь, 1984.
- Горский Л. К. Статистические алгоритмы исследования надежности. — М.: Наука, 1970.
- Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: ГИФМЛ, 1962.
- Груничев А. С., Кузнецов В. А., Шипов Е. В. Испытания радиоэлектронной аппаратуры на надежность. — М.: Сов. радио, 1969.
- Дзиркал Э. В. Выбор и оценка показателей надежности сложных изделий. — М.: Знание, 1974.
- Дзиркал Э. В. Задание и проверка требований к надежности сложных изделий. — М.: Радио и связь, 1981.
- Дзиркал Э. В. Новые методы контрольных испытаний на надежность сложных изделий. — М.: Знание, 1978.
- Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Курс статистического моделирования. — М.: Наука, 1976.
- Заренин Ю. Г., Стоянова И. И. Определительные испытания на надежность. — М.: Стандарты, 1978.
- Ивлев В. В. Диффузионные модели в теории надежности. — М.: Знание, 1983.
- Капур К., Ламберсон Л. Надежность и проектирование систем: Пер. с англ./Под ред. И. А. Ушакова. — М.: Мир, 1980.
- Карибский В. В., Пархоменко П. П., Согомонян Е. С. Техническая диагностика объектов контроля. — М.: Энергия, 1967.
- Карташов Г. Д. Методы форсированных испытаний. — М.: Знание, 1979.
- Карташов Г. Д. Основы теории форсированных испытаний. — М.: Знание, 1977.

- Карташов Г. Д. Предварительные исследования в теории форсированных испытаний. — М.: Знание, 1980.
- Карташов Г. Д. Принципы расходования ресурса и их использование для оценки надежности. — М.: Знание, 1984.
- Калашников В. В. Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций. — М.: Наука, 1978.
- Каштанов В. А. Оптимальные задачи технического обслуживания. — М.: Знание, 1981.
- Кениг Д., Штойян Д. Методы теории массового обслуживания. — М.: Радио и связь, 1981.
- Кибернетику на службу коммунизму/Под ред. А. И. Берга, Н. Г. Бруевича и Б. В. Гнеденко. — М.: Энергия, 1964, т. 2.
- Климов Г. П., Мишковой Г. К. Приоритетные системы обслуживания с ориентацией/МГУ, М., 1979.
- Климов Г. П. Стохастические системы обслуживания. — М.: Наука, 1966.
- Коваленко И. Н. Анализ редких событий при оценке эффективности и надежности систем. — М.: Сов. радио, 1980.
- Коваленко И. Н. Исследования по анализу надежности сложных систем. — Киев: Наукова думка, 1975.
- Козлов Б. А. Резервирование с восстановлением. — М.: Сов. радио, 1969.
- Козлов Б. А., Ушаков И. А. Краткий справочник по расчету надежности радиоэлектронной аппаратуры. — М.: Сов. радио, 1966.
- Козлов Б. А., Ушаков И. А. Справочник по расчету надежности аппаратуры радиоэлектроники и автоматики. — М.: Сов. радио, 1975.
- Кокс Д., Смит В. Теория восстановления: Пер. с англ./Под ред. Ю. К. Бел яева. — М.: Сов. радио, 1967.
- Кокс Д., Смит В. Теория очередей: Пер. с англ./Под ред. А. Д. Соловьева. — М.: Мир, 1966.
- Коненков Ю. К., Ушаков И. А. Вопросы надежности радиоэлектронной аппаратуры при механических нагрузках. — М.: Сов. радио, 1975.
- Королюк В. С., Турбин А. Ф. Математические основы фазового укрупнения сложных систем. — Киев: Наукова думка, 1978.
- Королюк В. С., Турбин А. Ф. Полумарковские процессы и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1976.
- Королюк В. С., Турбин А. Ф. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. — Киев: Наукова думка, 1982.
- Королюк В. С., Турбин А. Ф. Фазовое укрепление сложных систем. — Киев: Вища школа, 1978.
- Креденцер Б. П. Прогнозирование надежности систем с временной избыточностью. — Киев: Наукова думка, 1978.
- Ксенз С. П. Поиск неисправностей в радиоэлектронных системах методом функциональных проб. — М.: Сов. радио, 1965.
- Ллойд Д. К., Липов М. Надежность: Пер. с англ./Под ред. Н. П. Бусленко. — М.: Сов. радио, 1964.
- Мизин И. А., Уринсон Л. С., Храмушин Г. К. Передача информации в сетях с коммутацией сообщений. — М.: Связь, 1977.
- Мирицхулава Ц. Е. Надежность гидромелиоративных сооружений. — М.: Колос, 1974.
- О надежности сложных технических систем. — М.: Сов. радио, 1966.
- Оптимальные задачи надежности/Под ред. И. А. Ушакова. — М.: Стандарты, 1968.
- Основные вопросы теории и практики надежности. — М.: Сов. радио, 1975.
- Основы технической диагностики/ В. В. Карбиский, П. П. Пархоменко, Е. С. Согомонян и др.; Под ред. П. П. Пархоменко. — М.: Энергия, 1976.
- Павлов И. В. Вычисление наилучшей доверительной оценки надежности для систем со сложной структурой в случае безотказных испытаний. — М.: Знание, 1981.
- Павлов И. В. Доверительная оценка показателей надежности сложных систем. — М.: Знание, 1979.
- Павлов И. В. Статистические методы оценки характеристик надежности и эффективности сложных систем по результатам испытаний. — М.: Сов. радио, 1982.
- Пархоменко П. П. О технической диагностике. — М.: Знание, 1969.
- Пархоменко П. П., Согомонян Е. С. Основы технической диагностики/Под ред. П. П. Пархоменко. — М.: Энергоиздат, 1981.
- Пашковский Г. С. Задачи оптимального обнаружения и поиска отказов в РЭА/Под ред. И. А. Ушакова. — М.: Радио и связь, 1981.
- Первозванский А. А. Случайные процессы в нелинейных автоматических системах. — М.: Физматгиз, 1962.
- Перротте А. И., Карташов Г. Д., Цветаев К. Н. Основы ускоренных испытаний радиоэлементов на надежность. — М.: Сов. радио, 1968.
- Пешес Л. Я., Степанова М. Д. Основы теории ускоренных испытаний на надежность. — Минск: Наука и жизнь, 1972.
- Поляк Ю. Г. Вероятностное моделирование на ЭВМ. — М.: Сов. радио, 1971.
- Полово А. М. Основы теории надежности. — М.: Наука, 1964.

- Праху Н. Методы теории массового обслуживания и управления запасами: Пер. с англ. / Под ред. И. Н. Коваленко. — М.: Машиностроение, 1969.
- Прикладные задачи технической кибернетики/Под ред. Л. С. Гурина, И. А. Ушакова, Б. С. Флейшмана. — М.: Сов. радио, 1966.
- Приоритетные системы обслуживания/Б. В. Гнеденко, Э. А. Даниелян, Б. Н. Димитров и др./МГУ, М., 1973.
- Пугачев В. Н. Комбинированные методы определения вероятностных характеристик. — М.: Сов. радио, 1973.
- Райкин А. Л. Вероятностные модели функционирования резервированных устройств. — М.: Наука, 1971.
- Райкин А. Л., Кравцов О. С., Пенин В. С. Таблицы расчета надежности и оптимального резерва. — М.: Сов. радио, 1971.
- Райкин А. Л. Элементы теории надежности для проектирования технических систем. — М.: Сов. радио, 1967.
- Райкин А. Л. Элементы теории надежности технических систем/Под ред. И. А. Ушакова. — М.: Сов. радио, 1978.
- Райншке К. Модели надежности и чувствительности систем: Пер. с немецкого/Под ред. Б. А. Козлова. — М.: Мир, 1979.
- Решение задач надежности и эксплуатации на универсальных ЭЦВМ/Б. П. Креденцер, М. М. Ластовченко, С. А. Сенецкий, Н. А. Шишенок. — М.: Сов. радио, 1967.
- Рубальский Г. Б. Задачи управления запасом резервных изделий. — В кн.: Оптимальное резервирование и управление запасами. — М.: Знание, 1979.
- Рубальский Г. Б. Управление запасами при случайном спросе (модели с непрерывным временем)/Под ред. И. А. Ушакова. — М.: Сов. радио, 1977.
- Руденко Ю. Н., Чельцов М. Б. Надежность и резервирование в электроэнергетических системах. Методы исследования. — Новосибирск: Наука, 1974.
- Рыжиков Ю. И. Управление запасами. — М.: Наука, 1969.
- Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. — М.: Наука, 1968.
- Сильвестров Д. С. Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний. — М.: Сов. радио, 1980.
- Соловьев А. Д. Математические методы анализа восстановленных систем. — М.: Знание, 1982.
- Соловьев А. Д. Основы математической теории надежности. — М.: Знание, 1975.
- Соловьев А. Д. Эвристический вывод характеристик надежности резервных систем с быстрым восстановлением. — М.: Знание, 1968.
- Сотсков Б. С. Основы теории и расчета надежности элементов и устройств автоматики и вычислительной техники. — М.: Высшая школа, 1970.
- Справочник по вероятностным расчетам/Г. Г. Абезгауз, А. П. Тронь, Ю. Н. Копенкин и др. — М.: Воениздат, 1970.
- Справочник по теории вероятностей и математической статистике/Под ред. В. С. Корольюка. — Киев: Наукова думка, 1978.
- Статистические задачи отработки систем и таблицы для числовых расчетов показателей надежности/Под ред. Р. С. Судакова. — М.: Высшая школа, 1975.
- Ставровский Е. Р., Сухарев М. Г., Карасевич А. М. Методы расчета надежности магистральных газопроводов. — Новосибирск: Наука, 1982.
- Судаков Р. С. Избыточность и объем испытаний технических систем и их элементов. — М.: Знание, 1980.
- Сухарев М. Г., Ставровский Е. Р., Брянских В. Е. Оптимальное развитие систем газоснабжения. — М.: Недра, 1981.
- Теория надежности и массовое обслуживание/Под ред. Б. В. Гнеденко. — М.: Наука, 1969.
- Теория и практика надежности. — М.: Сов. радио, 1980.
- Тескин О. И. Многомерные задачи контроля и планирования объектов испытаний на надежность по одному контролируемому уровню. — М.: Знание, 1980.
- Тескин О. И. Оценка надежности систем на этапе эксплуатационной отработки. — М.: Знание, 1981.
- Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов. — М.: Наука, 1970.
- Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977.
- Тюрин Ю. Н. Непараметрические методы статистики. — М.: Знание, 1978.
- Ушаков И. А., Гадасин В. А. Анализ надежности структурно-сложных систем. — М.: Знание, 1978.
- Ушаков И. А. Задачи оптимального резервирования. — М.: Знание, 1979.
- Ушаков И. А. Задачи расчета надежности. — М.: Знание, 1981.
- Ушаков И. А. Инженерные методы расчета надежности. — М.: Знание, 1970.
- Ушаков И. А., Коненков Ю. К. Методы расчета надежности аппаратуры при механических нагрузках (ч. 1, 2). — М.: Знание, 1973, 1974.
- Ушаков И. А. Методы исследования эффективности функционирования технических систем (вып. 1 и 2). — М.: Знание, 1976.
- Ушаков И. А. Методы расчета эффективности систем на этапе проектирования. — М.: Знание, 1983.

- Ушаков И. А. Методы решения простейших задач оптимального резервирования при наличии ограничений. — М.: Сов. радио, 1969.
- Ушаков И. А. Оптимальные задачи надежности. — М.: Знание, 1971.
- Ушаков И. А. Построение высоконадежных систем. — М.: Знание, 1974.
- Ушаков И. А., Фишбейн Ф. И. Методы оценки надежности по результатам испытаний. — М.: Знание, 1973.
- Фишбейн Ф. И. Методы оценки надежности по результатам испытаний. — М.: Знание, 1973.
- Фишбейн Ф. И. Графические методы в планировании и обработке результатов испытаний на надежность. — М.: Знание, 1979.
- Фишбейн Ф. И. Методы планирования испытаний для контроля показателей надежности. — М.: Знание, 1976.
- Хедли Дж., Уайтин Т. Анализ систем управления запасами: Пер. с англ./Под ред. А. Л. Райкина. — М.: Наука, 1969.
- Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания. — М.: Физматгиз, 1963.
- Чепурии Е. В. Статистический анализ восстанавливаемых систем. — М.: Знание, 1983.
- Черкесов Г. Н. Надежность технических систем с временной избыточностью. — М.: Сов. радио, 1974.
- Чирков В. П. Вопросы надежности механических систем. — М.: Знание, 1981.
- Шор Я. Б., Кузьмин Ф. И. Таблица для анализа и контроля надежности. — М.: Сов. радио, 1968.
- Шор Я. Б. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности. — М.: Сов. радио, 1962.
- Шрайбер Т. Дж. Моделирование на GPSS. — М.: Машиностроение, 1980.
- Шура-Бура А. Э., Топольский М. В. Методы организации, расчета и оптимизации комплектов запасных элементов сложных технических систем. — М.: Знание, 1981.
- Ясин Э. М., Березин В. А., Ращепкин К. Е. Надежность магистральных трубопроводов. — М.: Недра, 1972.
- Ястребенецкий М. А., Соляник Б. Л. Определение надежности аппаратуры промышленной автоматики в условиях эксплуатации. — М.: Энергия, 1968.

НАДЕЖНОСТЬ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Под редакцией профессора
И. А. УШАКОВА



МОСКВА «РАДИО И СВЯЗЬ»
1985

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Обилие различных книг по проблеме надежности привело к необходимости написания справочника, в котором бы были сведены воедино практические рекомендации по априорным расчетам и экспериментальным оценкам надежности, моделированию и оптимизационным задачам.

Создание справочника, содержащего все современные результаты теории надежности, потребовало привлечения к его написанию многих специалистов, активно работающих в различных областях теории и практики надежности. Авторы справочника имеют огромный практический опыт работы в промышленности и исследовательских институтах, а также богатый опыт преподавания в учебных заведениях. Все они известны многочисленными публикациями в области надежности, большинство являются авторами монографий. Привлечение для написания одной работы такого большого числа крупных специалистов по надежности, безусловно, существенно облегчило подготовку материала на высоком профессиональном уровне. Каждый из них написал именно те разделы, в которых максимально представлен его личный вклад в теорию и практику надежности. Это позволило существенным образом расширить спектр затрагиваемых вопросов, включить многие новые результаты.

Размещение материала в справочнике подчинено логике и последовательности создания и использования технических систем: сначала приводятся методы априорных вероятностных расчетов и статистического моделирования, т. е. методы, используемые на этапе проектирования, затем рассматриваются оптимизационные задачи надежности, возникающие на последних этапах проектирования и в процессе эксплуатации, и, наконец, приводятся методы статистической обработки информации о надежности изделий, полученной в результате эксплуатации и специальных испытаний. Книгу завершают главы, содержащие более тонкие специальные математические методы, а также примеры нестандартных задач надежности, возникающие в различных технических областях.

Остановимся на содержании разделов справочника.

Раздел I. Общие сведения. В нем содержатся основные термины и понятия надежности технических систем, а также показатели надежности функционирования. В основном термины и показатели соответствуют тем, которые приняты в стандартах, однако введены и некоторые новые.

Раздел II. Методы расчета. Расчеты надежности в настоящее время стали обязательным элементом инженерного проектирования любой технической системы, любого технического изделия — от микросхемы до Единой системы связи страны, от отдельного силового агрегата до Единой энергосистемы страны. Широкое внедрение расчетов надежности в практику проектирования предполагает наличие достаточно общих и в определенном смысле унифицированных расчетных методов, которые являются общими для разработчиков и заказчиков. Действительно, без проведения количественного анализа принимаемых технических решений (в том числе и по вопросам надежности) проектирование, производство и эксплуатация

современных сложных систем становится практически невозможными. Это связано с огромными затратами материальных и людских ресурсов, а также с огромными затратами времени на реализацию разрабатываемых проектов.

Раздел III. Статистическое моделирование на ЭВМ. Статистическое (в более общем случае — имитационное) моделирование является мощным инструментом анализа сложных систем, описание которых удастся провести лишь в терминах алгоритмов функционирования и взаимодействий элементов. Однако большая размерность задач и малая вероятность возникновения интересующих нас событий (в частности, при анализе высоконадежных систем) обуславливают то, что стандартные методы моделирования могут и не привести к получению сколько-нибудь достоверных характеристик надежности за обозримое время. Приходится прибегать к различным специальным методам ускорения процесса моделирования. В справочнике изложены лишь общие методологические вопросы моделирования процессов функционирования систем (в том числе и высоконадежных).

Раздел IV. Оптимизационные задачи надежности. В задачах надежности чаще всего приходится говорить не о «лучшем» решении, а об условно оптимальном, имея в виду, что обеспечение любых требуемых технических характеристик всегда связано с определенными затратами ресурсов.

В данном разделе приведены методы решения основных оптимизационных задач проектирования и эксплуатации технических систем. Наиболее разработанными в методологическом плане и наиболее широко внедренными в практику можно считать методы оптимального резервирования, в частности методы обеспечения технических систем запасными элементами. Методы технической диагностики в настоящее время также представляют собой мощное самостоятельное направление, причем имеется много инженерных методов, использующих конкретную специфику различных технических объектов. (Здесь приводятся лишь математические модели процессов обнаружения и поиска отказов.) Методы оптимизации профилактических (регламентных) работ к настоящему времени находятся в стадии интересных математических изысканий, серьезное их внедрение затрудняется из-за отсутствия необходимых исходных данных. Приводимый в данном справочнике материал является в большей степени методологическим, а не справочным в прямом смысле этого слова.

Раздел V. Методы оценки надежности по результатам испытаний. Даже имея адекватную реальному объекту математическую модель и владея самым современным математическим аппаратом, нельзя проводить расчетные работы, если при этом отсутствуют достоверные статистические данные о надежности. Как часто расчеты надежности, проведенные с большой точностью на основании строгих математических моделей с использованием самой современной вычислительной техники, могут приводить к неверным решениям только из-за того, что исходная информация для этих расчетов не отличалась достоверностью.

При этом важно иметь не только достоверный источник первичной статистической информации по надежности и обоснованный метод классификации, но и корректные методы математической обработки. В данном разделе приводятся методы обработки определительных и контрольных испытаний, а также методы достоверной оценки показателей надежности систем по результатам испытаний отдельных ее элементов. (Последняя ситуация типична при оценке надежности таких сложных развивающихся систем, как сети ЭВМ, транспортные коммуникации, системы энергетики и связи, которые фактически никогда не находятся сколько-нибудь длительное время в неизменном составе и с неизменной структурой.)

Раздел VI. Специальные математические методы расчета. В данном разделе содержатся некоторые (в основном новые) специальные математические методы анализа надежности технических систем. Этот материал носит методологический характер, предполагаемые методы не всегда доведены до уровня инженерных методик, однако все они, как показывает практика общения редактора и многих из авторов книги с инженерами-практиками на различных лекциях, семинарах и

консультациях, весьма полезны в тех случаях, когда применение общепринятых методов анализа надежности уже является недостаточным. Кроме того, рассмотренные методы хорошо иллюстрируют возможности и тенденции развития математического аппарата современной теории надежности.

Раздел VII. Примеры прикладных задач надежности. Для анализа надежности конкретного технического объекта нужно достаточно хорошо знать сам объект. Материалы данного раздела служат иллюстрацией того, что построение математических моделей требует глубокого понимания исследуемого технического объекта, знания его особенностей и наличия вполне определенных исходных данных. В противном случае расчеты надежности могут привести лишь к дезориентации. Качество анализа надежности конкретного объекта зависит не только и не столько от умения применять богатый арсенал математических средств, сколько от искусства строить математические модели, с максимальной степенью адекватности (в соответствующем разрезе) отражающие физическую сущность реального исследуемого объекта. В разделе содержится несколько примеров приложения математических методов исследования к анализу надежности технических объектов различной физической природы и различного целевого назначения.

Основная цель данного раздела справочника — показать, как общие методы теории надежности, разрабатываемые в последние годы в основном применительно к радиоэлектронным системам, могут быть с успехом использованы и в других отраслях техники и народного хозяйства. Материал этого раздела является иллюстрацией того, что теория надежности, ее методы расчетов и экспериментальные оценки междисциплинары по своей сути. В то же время отдельные отрасли — радиоэлектроника, информатика, машиностроение, строительство, энергетика — порождают интересные конкретные ответвления теории надежности со своими специфическими особенностями, иногда со своими специальными математическими методами исследования. Именно такое взаимное обогащение и является основой успешного развития любого прикладного научного направления.

Приложения. Для расчетов и экспериментальной оценки надежности нужен определенный минимум стандартных таблиц и общематематических формул, которые приведены в приложениях (часть необходимых специальных таблиц и номограмм приведена непосредственно по тексту).

Авторский вклад распределен следующим образом: проф. Р. Барлоу (США) в соавторстве — п. 3.1.4 и гл. 25 (без § 25.1); лауреат Государственной премии СССР докт. физ.-мат. наук проф. Ю. К. Беляев — § 21.2—21.4; докт. техн. наук проф. В. А. Богатырев в соавторстве — пп. 7.5.4, 7.6.4 и гл. 34; чл.-кор. АН СССР докт. физ.-мат. наук проф. В. В. Болотин в соавторстве — гл. 26; докт. техн. наук В. А. Гадасин в соавторстве — гл. 29; докт. техн. наук Э. Г. Газиев в соавторстве — гл. 35; канд. физ.-мат. наук М. Д. Давтян в соавторстве — гл. 36; канд. техн. наук Э. В. Дзиркал — гл. 20, § 21.1, 23.8, 23.9; канд. техн. наук В. В. Иелев в соавторстве — гл. 31; докт. физ.-мат. наук проф. В. В. Калашников — гл. 11; докт. техн. наук проф. Г. Д. Карташов — гл. 24; лауреат Государственной премии СССР докт. физ.-мат. наук проф. В. А. Капитанов — гл. 17; докт. физ.-мат. наук проф. Г. П. Климов в соавторстве — гл. 10; лауреат Государственной премии СССР акад. АН УССР докт. техн. и докт. физ.-мат. наук проф. И. Н. Коваленко в соавторстве — гл. 12; докт. техн. наук проф. Б. А. Козлов — § 4.4, пп. 5.1.2—5.1.4, 5.2.2—5.2.4, § 6.2, 6.3; канд. физ.-мат. наук Ю. К. Коненков в соавторстве — гл. 36; акад. АН УССР докт. физ.-мат. наук проф. В. С. Королюк — § 28.3; канд. физ.-мат. наук Н. Ю. Кузнецов в соавторстве — гл. 12; Е. И. Литвак в соавторстве — пп. 7.6.1—7.6.3, 7.6.5, 7.6.6; канд. физ.-мат. наук Ю. Е. Малащенко — § 13.7; канд. физ.-мат. наук В. Ф. Матвеев в соавторстве — гл. 10; лауреат Ленинской премии чл.-кор. АН СССР докт. техн. наук проф. И. А. Мизин в соавторстве — пп. 7.5.4, 7.6.4 и гл. 34; канд. физ.-мат. наук И. В. Павлов — гл. 22 (кроме § 22.1, 22.2), гл. 23 (кроме § 23.8, 23.9); докт. техн. наук Г. С. Пашковский в соавторстве — гл. 16; проф. Ф. Прошан (США)

в соавторстве — п. 3.1.4 и гл. 25 (без § 2.5.1); докт. техн. наук *К. Райнишке* (ГДР) — гл. 30; канд. физ.-мат. наук *Г. Б. Рубальский* — пп. 15.1.1—15.1.5, в соавторстве п. 15.1.6; чл.-кор. АН СССР докт. техн. наук проф. *Ю. Н. Руденко* в соавторстве — § 1.7 и гл. 32; лауреат Государственной премии докт. физ.-мат. наук проф. *А. Д. Соловьев* — гл. 27; канд. техн. наук *Е. Р. Ставровский* в соавторстве — гл. 33; канд. физ.-мат. наук *К. Айда Суанес* (Республика Куба) — § 6.5; лауреат Государственной премии СССР докт. техн. наук проф. *Р. С. Судаков* — § 21.5, 21.6; докт. техн. наук проф. *М. Г. Сухарев* в соавторстве — гл. 33; докт. техн. наук проф. *О. И. Тескин* — § 21.7, 22.1, 22.2; канд. техн. наук *М. В. Топольский* — § 19.8, в соавторстве п. 19.5.3; докт. техн. наук проф. *И. А. Ушаков* — гл. 1—4 (кроме п. 3.1.4 и § 4.4), пп. 5.1.1, 5.2.1, § 5.4, 6.1, 6.4, 7.1—7.4, пп. 7.5.1—7.5.3, гл. 8, § 13.1, 13.2, пп. 13.3.3, 13.3.6, § 13.4—13.6, 13.8, 15.2, 25.1, 28.1, 28.2, приложения и список литературы, а также в соавторстве — § 1.7, пп. 7.6.1—7.6.3, 7.6.5, 7.6.6, пп. 13.3.1, 13.3.2, 13.3.4, 13.3.5, п. 15.1.6, гл. 16, 29, 31, 32, 35; проф. *П. Франкен* (ГДР) в соавторстве — § 28.4; канд. техн. наук *Ф. И. Фишбейн* — гл. 18, 19 (кроме п. 19.5.3 и § 19.8), в соавторстве п. 19.5.3; докт. техн. наук проф. *Г. Н. Черкесов* — гл. 9; канд. техн. наук *В. П. Чирков* в соавторстве — гл. 26; проф. *А. Штреллер* (ГДР) в соавторстве — § 28.4; канд. техн. наук *И. Б. Шубинский* — § 28.5; канд. техн. наук *А. Э. Шура-Бура* — § 5.3 и гл. 14, в соавторстве — пп. 13.3.1, 13.3.2, 13.3.4, 13.3.5.

Редактору справочника доставляет огромное удовольствие выразить свою признательность давним коллегам — Э. В. Дзиркалу, И. В. Павлову, М. В. Топольскому и Ф. И. Фишбейну, которые оказали большую помощь в процессе подготовки рукописи справочника.

Авторы и редактор будут весьма признательны читателям за отзывы и замечания по содержанию книги, которые следует направлять по адресу: 101000 Москва, Почтамт, а/я 693, издательство «Радио и связь».

И. Ушаков